Образец выполнения ДЗ №2 по ИиДУ

30 вариант

Для данных диф. ур-ний (задачи 1, 2, 4) найти общие решения (общие интегралы) или частные решения (частные интегралы) для указанных начальных условий.

Задача 1: $\begin{cases} xy'' = 4\sqrt{xy' + x^2} + y', \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 0. \end{cases}$ Задача Коши

Решение: $xy'' = 4\cdot\sqrt{xy' + x^2} + y'$ ДУ 2-го порядка

отсутствует $y \Rightarrow$ II тип $\Rightarrow$ Замена $\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases}$

$x \neq 0$

$$xp' = 4\sqrt{xp + x^2} + p$$

$$p' = \frac{4}{x}\sqrt{xp + x^2} + \frac{p}{x}$$

$$p' = 4\cdot\sqrt{\frac{xp + x^2}{x^2}} + \frac{p}{x}$$

$$p' = 4\cdot\sqrt{\frac{p}{x} + 1} + \frac{p}{x} \quad \text{однородное}$$

$$\frac{p}{x} = u \Rightarrow p = u\cdot x$$

$$p' = u'x + u$$

$$u'x + \cancel{u} = 4\sqrt{u+1} + \cancel{u}$$

$$u'x = 4\sqrt{u+1}$$

$$\frac{x\,du}{dx} = 4\sqrt{u+1} \quad \Big| : x \neq 0,\ u \neq -1$$

$$\frac{du}{\sqrt{u+1}} = 4\frac{dx}{x} \quad \text{с разделяющимися переменными}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u}} = 4\cdot\int \frac{dx}{x}$$

$$\int (1+u)^{-1/2} d(u+1) = 4\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{(1+u)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 4\ln|x| + C, \ \forall C$$

$$2\sqrt{1+u} = 4\ln|x| + C$$

$$\sqrt{1+u} = 2\ln|x| + C_1, \ \forall C_1$$

$$\sqrt{1+\frac{p}{x}} = 2\ln|x| + C_1$$

$$\sqrt{1+\frac{y'}{x}} = 2\ln|x| + C_1$$

Начальное условие: $y'(1)=0 \Rightarrow$ при $x=1$, $y'=0$

$$\sqrt{1+\frac{0}{1}} = 2\ln|1| + C_1$$

$$1 = 2\cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$\sqrt{1+\frac{y'}{x}} = 2\ln|x| + 1$$

$$\cancel{1}+\frac{y'}{x} = (2\ln|x|+1)^2 = 4\ln^2|x| + 4\ln|x| + \cancel{1}$$

$$y' = 4x\ln^2|x| + 4x\ln|x|$$

$$\boxed{dy = 4\int x\ln^2|x|\,dx + 4\int x\ln|x|\,dx}$$

$$\int x\ln^2|x|\,dx = \left|\begin{array}{l} u=\ln^2|x| \\ du = 2\ln|x|\cdot\frac{1}{|x|}\operatorname{sgn} x \\ dv = x\,dx \end{array}\right| =$$

$$= \left| v = \frac{x^2}{2} \right| = \ln^2|x| \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \ln|x| \cdot \frac{1}{|x|}\, \mathrm{sgn}\, x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln^2|x| - \int x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \ln|x| \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2|x| - \int x \ln|x| \, dx$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \ln|x| \\ du = \frac{1}{|x|}\, \mathrm{sgn}\, x \\ dv = x\,dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \ln^2|x| - \frac{1}{2} x^2 \ln|x| +$$

$$+ \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{|x|}\, \mathrm{sgn}\, x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2|x| - \frac{1}{2} x^2 \ln|x| +$$

$$+ \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2|x| - \frac{1}{2} x^2 \ln|x| + \frac{x^2}{4}$$

$$\int x \ln|x| \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln|x| \\ du = \frac{1}{|x|}\, \mathrm{sgn}\, x \\ dv = x\,dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \ln|x| - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \mathrm{sgn}\, x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln|x| - \frac{1}{2} \int x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln|x| - \frac{x^2}{4}$$

$$y = \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x^2 \ln^2|x| - \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x^2 \ln|x| + \cancel{4} \cdot \frac{x^2}{\cancel{4}} + 4 \left(\frac{1}{2} x^2 \ln|x| - \frac{x^2}{4} \right) + C_2 =$$

$$= 2x^2 \ln^2|x| - \cancel{2x^2 \ln|x|} + \cancel{x^2} + \cancel{2x^2 \ln|x|} - \cancel{x^2} + C_2 =$$

$$= 2x^2 \ln^2|x| + C_2$$

Начальное условие: $y(1) = 1$ т.е при $x = 1,\ y = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \cdot 1^2 \ln^2|1| + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$y = 2x^2 \ln^2|x| + 1.$$

Ответ: $y = 2x^2 \ln^2 x + 1$

Задача 2: $y''(e^y+1) = (y')^2 e^y$

Решение: $y''(e^y+1) = (y')^2 e^y$ Д.У 2-го порядка

Отсутствует $x \Rightarrow \begin{cases} y' = p(y), \\ y'' = p \cdot p' \end{cases}$ ← Замена

$\cancel{p} \cdot p' \cdot (e^y+1) = p^{\cancel{2}} \cdot e^y$, $p \neq 0$

$\frac{p'}{p} = \frac{e^y}{e^y+1}$

$\frac{dp}{p} = \frac{e^y}{e^y+1} dy$ с разделяющимися переменными

$\ln|p| = \int \frac{d(e^y+1)}{e^y+1} = \ln|e^y+1| + C, \forall C$

$p = (e^y+1) \cdot C_2, \forall$

$p = (e^y+1) \cdot C_3, \forall C_3$

$y' = (e^y+1) \cdot C_3$

$\frac{dy}{dx} = (e^y+1) C_3$

$\frac{dy}{e^y+1} = C_3 dx$

$\int \frac{dy}{e^y+1} = C_3 \int dx$

$\int \frac{dy}{e^y+1} = \int \frac{e^y - e^y + 1}{e^y+1} dy = \int dy - \int \frac{e^y dy}{e^y+1} =$

$$= y - \int \frac{d(e^y+1)}{e^y+1} = y - \ln|e^y+1|$$

$$y - \ln|e^y+1| = C_3 x + C_4 \ , \quad \forall C_3, \forall C_4$$

$$y - \ln|e^y+1| - C_3 x - C_4 = 0$$

Ответ: $y - \ln|e^y+1| - C_3 x - C_4 = 0$.

Задача 3: Записать общее решение однородного уравнения. Указать вид частного решения неоднородного уравнения (без вычисления коэффициентов)

$$y^{(IV)} - y''' - 3y'' + y' + 2y = e^x \cos 2x + (x^3-1)e^{-x} + 4xe^{2x} + \sin x - x\cos x$$

Решение

$$y^{(IV)} - y''' - 3y'' + y' + 2y = e^x \cos 2x + (x^3-1)e^{-x} + 4xe^{2x} + \sin x - x\cos x \quad \text{ЛНДУ}$$

$$y^{(IV)} - y''' - 3y'' + y' + 2y = 0 \quad \text{ЛОДУ}$$

$$k^4 - k^3 - 3k^2 + k + 2 = 0$$

$k_1 = 1$

$$\begin{array}{r|l} k^4 - k^3 - 3k^2 + k + 2 & k-1 \\ \hline k^4 - k^3 \quad\quad\quad\quad\quad & k^3 - 3k - 2 \\ -3k^2 + k \quad\quad & \\ -3k^2 + 3k \quad\quad & \\ -2k + 2 & \\ -2k + 2 & \\ 0 & \end{array}$$

$$(k-1)(k^3 - 3k - 2) = 0.$$

$$k^3-3k-2=0$$

$$k_2=-1$$

$$\begin{array}{r|l} k^3-3k-2 & k+1 \\ \underline{-\,(k^3+k^2)} & k^2-k-2 \\ -k^2-3k & \\ \underline{-\,(-k^2-k)} & \\ -2k-2 & \\ \underline{-\,(-2k-2)} & \\ 0 & \end{array}$$

$$(k-1)(k+1)(k^2-k-2)=0.$$

$$k^2-k-2=0$$

$$D=1+4\cdot 2=9=3^2$$

$$k_{3,4}=\frac{1\pm 3}{2}$$

$$k_3=2$$

$$k_4=-1$$

$$(k-1)(k-2)(k+1)^2=0$$

$$k_1=1,\quad k_2=k_4=-1$$

$$k_3=2$$

ФСР ЛОДУ: $=\{e^x,\ e^{2x},\ e^{-x},\ xe^{-x}\}$

$$y_{oo}=\tilde{c}_1 e^x+\tilde{c}_2 e^{2x}+\tilde{c}_3 e^{-x}+\tilde{c}_4 x e^{-x}$$

$$f=\underbrace{e^x\cos 2x}_{f_1}+\underbrace{(x^3-1)e^{-x}}_{f_2}+\underbrace{4xe^{2x}}_{f_3}+\underbrace{\sin x-x\cos x}_{f_4},$$

$f_1 = e^x \cos 2x \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{matrix} \Rightarrow 1 \pm 2i \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4$

$\Rightarrow r = 0$

$Q_n(x) = 1 \Rightarrow n = 0$

$y_{r_1} = \left(A_1 e^x \sin 2x + B_1 e^x \cos 2x\right) x^0 =$

$= e^x \left(A_1 \sin 2x + B_1 \cos 2x\right)$

$f_2 = (x^3 - 1) e^{-x} \Rightarrow \alpha = -1 = k_2 = k_4 \Rightarrow r = 2$

$Q_n(x) = x^3 - 1 \Rightarrow n = 3$

$y_{r_2} = \left(A_2 x^3 + B_2 x^2 + C_2 x + D_2\right) e^{-x} \cdot x^2$

$f_3 = 4x e^{2x} \Rightarrow \alpha = 2 = k_3 \Rightarrow r = 1$

$Q_n(x) = 4x \Rightarrow n = 1$

$y_{r_3} = \left(A_3 x + B_3\right) e^{2x} \cdot x$

$f_4 = \sin x - x \cos x \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{matrix} \Rightarrow \pm i \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4$

$\Rightarrow r = 0$

$\left.\begin{matrix} Q_n(x) = 1 \\ m(x) = -x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} n = 0, \\ m = 1 \end{matrix}\right. \Rightarrow \max\{0, 1\} = 1 = s$

$y_{r_4} = \left(A_4 x + B_4\right) \sin x + \left(C_4 x + D_4\right) \cos x$

$y_{rн} = e^x \left(A_1 \sin 2x + B_1 \cos 2x\right) + \left(A_2 x^3 + B_2 x^2 + C_2 x + D_2\right) e^{-x} \cdot x^2 +$

$+ \left(A_3 x + B_3\right) e^{2x} \cdot x + \left(A_4 x + B_4\right) \sin x + \left(C_4 x + D_4\right) \cos x$

$y_{о} = y_{оо} + y_{rн}$

$y_{он} = \tilde{C}_1 e^{x} + \tilde{C}_2 e^{2x} + C_3 e^{-x} + \tilde{C}_4 x e^{-x} + e^{x}(A_1 \sin 2x + B_1 \cos 2x) + (A_2 x^3 + B_2 x^2 + C_2 x + D_2) e^{-x} \cdot x^2 + (A_3 x + B_3) e^{2x} \cdot x + (A_4 x + B_4) \sin x + (C_4 x + D_4) \cos x$

Ответ: $y_{он} = \tilde{C}_1 e^{x} + \tilde{C}_2 e^{2x} + \tilde{C}_3 e^{-x} + \tilde{C}_4 x e^{-x} + e^{x}(A_1 \sin 2x + B_1 \cos 2x) + (A_2 x^3 + B_2 x^2 + C_2 x + D_2) e^{-x} \cdot x^2 + (A_3 x + B_3) e^{2x} \cdot x + (A_4 x + B_4) \sin x + (C_4 x + D_4) \cos x$

Задача 4:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x} + 8x + 12, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Задача Коши

Решение:

$y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x} + 8x + 12$ ЛНДУ

$y'' + 4y' + 4y = 0$ ЛОДУ

$k^2 + 4k + 4 = 0$

$(k+2)^2 = 0$

$k_1 = k_2 = k = -2$

ФСР ЛОДУ: $= \{e^{-2x}, x e^{-2x}\}$

$y_{оо} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

$$f = \underbrace{2e^{-2x}}_{f_1} + \underbrace{8x + 12}_{f_2}$$

$f_1 = 2e^{-2x} \Rightarrow \alpha = -2 = k_1 = k_2 \Rightarrow r = 2$

$Q_n(x) = 2 \Rightarrow n = 0$

$y_{r_1} = A e^{-2x} \cdot x^2$

$f_2 = 8x + 12 = (8x+12) e^{0\cdot x} \Rightarrow \alpha = 0 \neq k_1 \neq k_2 \Rightarrow r = 0$

$Q_n(x) = 8x + 12 \Rightarrow n = 1$

$y_{r_2} = (Bx + C) e^{0\cdot x} \cdot x^0 = Bx + C$.

$y_{rн} = y_{r_1} + y_{r_2} = Ax^2 e^{-2x} + Bx + C$.

$y'_{rн} = 2Axe^{-2x} - 2Ax^2e^{-2x} + B$

$y''_{rн} = 2Ae^{-2x} - 4Axe^{-2x} - 4Axe^{-2x} + 4Ax^2e^{-2x} =$

$= 4Ax^2e^{-2x} - 8Axe^{-2x} + 2Ae^{-2x}$

$\cancel{4Ax^2e^{-2x}} \cancel{- 8Axe^{-2x}} + 2Ae^{-2x} + \cancel{8Axe^{-2x}} -$

$\cancel{-8Ax^2e^{-2x}} + 4B + \cancel{4Ax^2e^{-2x}} + 4Bx + 4C =$

$= 2e^{-2x} + 8x + 12$

$2Ae^{-2x} + 4Bx + 4B + 4C = 2e^{-2x} + 8x + 12$

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ 4B = 8 \\ 4B + 4C = 12 \end{cases} \Rightarrow \quad A = 1, \quad B = 2, \quad 4C = 12 - 8 = 4, \quad C = 1$$

$y_{rн} = x^2 e^{-2x} + 2x + 1$

$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$

$y_{он} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + x^2 e^{-2x} + 2x + 1$

Начальные условия: $y(0) = 2$

$y'(0) = -1$

при $x = 0$, $y_{чн} = 2 \Rightarrow C_1 + 1 = 2$

$C_1 = 1$

$y_{он}' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}(-2) + 2x e^{-2x} -$

$-2x^2 e^{-2x} + 2 = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x} +$

$+2x e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x}$

при $x = 0$, $y_{он}' = -1$

$-2 \cdot 1 \cdot 1 + C_2 = -1$

$C_2 = 1$

$y_{чн} = e^{-2x} + x e^{-2x} + x^2 e^{-2x} + 2x + 1$

Ответ: $y_{чн} = e^{-2x} + x e^{-2x} + x^2 e^{-2x} + 2x + 1$

Задача 5: Найти общее решение ЛНДУ по данному частному решению y_1 соответствующего ЛОДУ.

$y'' + y' ctg x - y \csc^2 x = 2\sin x$, $y_1 = \csc x$

Решение: $y'' + y'\operatorname{ctg} x - y\csc^2 x = 2\sin x$ ЛНДУ

$y'' + y'\operatorname{ctg} x - y\csc^2 x = 0$ ЛОДУ

$y_1 = \csc x$ – частное решение ЛОДУ

Найдём y_2 – частное решение ЛОДУ

$$\boxed{y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx}$$

$p_1(x) = \operatorname{ctg} x$

$\csc x = \frac{1}{\sin x} = y_1$

$$y_2 = \frac{1}{\sin x} \cdot \int \frac{e^{-\int \operatorname{ctg} x\,dx}}{\frac{1}{\sin^2 x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \int \sin^2 x \cdot e^{-\int \frac{\cos x}{\sin x}dx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \int \sin^2 x \cdot e^{-\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \int \sin^2 x \cdot e^{-\ln|\sin x|}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \int \sin^2 x \cdot \frac{1}{|\sin x|}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \int |\sin x|^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{|\sin x|}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \int |\sin x| \, dx = \frac{1}{\sin x} \cdot \int (\pm \sin x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \cdot (\pm 1) = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\,x$$

$\pm$

$y_1 = \csc x$

$y_2 = ctg\,x$

$y_{oo} = C_1 \csc x + C_2\, ctg\,x$

Метод Лагранжа: $\boxed{y_{он} = C_1(x) \csc x + C_2(x)\, ctg\,x}$

$$\begin{cases} C_1' \csc x + C_2'\, ctg\,x = 0, \\ C_1' (\csc x)' + C_2' (ctg\,x)' = 2\sin x \end{cases}$$ система для варьируемых переменных

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \left((\sin x)^{-1}\right)' - \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x$$

$$(ctg\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin x} C_1' + \frac{\cos x}{\sin x} C_2' = 0 \\ -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot C_1' - \frac{1}{\sin^2 x} \cdot C_2' = 2\sin x \end{cases}$$

$\sin x \neq 0$

из ОДЗ

$$\begin{cases} C_1' + \cos x\, C_2' = 0, \\ -\cos x\, C_1' - C_2' = 2\sin^3 x \end{cases}$$

$$c_1' = -\cos x \cdot c_2'$$

$$(-\cos x \cdot c_2')\cdot(-\cos x) - c_2' = 2\sin^3 x$$

$$c_2' \cdot \cos^2 x - c_2' = 2\sin^3 x$$

$$c_2'(\cos^2 x - 1) = 2\sin^3 x$$

$$-c_2'(1-\cos^2 x) = 2\sin^3 x$$

$$-c_2' \cdot \sin^2 x = 2\sin^3 x$$

$$-c_2' = 2\sin x$$

$$c_2' = -2\sin x$$

$$c_2 = -2\int \sin x\,dx = \cos x + \tilde{c}_2$$

$$c_1' = -\cos x \cdot (-2\sin x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

$$c_1 = \int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + \tilde{c}_1$$

$$y_{он} = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \tilde{c}_1\right)\csc x + (\cos x + \tilde{c}_2)\,ctg\,x =$$

$$= \underbrace{\tilde{c}_1 \csc x + \tilde{c}_2\, ctg\, x}_{y_{оо}} + \underbrace{\cos x \cdot ctg\, x - \frac{1}{2}\cos 2x \cdot \csc x}_{y_{чн}}.$$

Ответ: $y_{он} = \tilde{c}_1 \csc x + \tilde{c}_2\, ctg\, x + \cos x\, ctg\, x - \frac{1}{2}\cos 2x \cdot \csc x$