Разбор типового варианта контрольной работы по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»

Классифицировать каждое из дифференциальных уравнений и найти его общий интеграл:

1.	$xyy' = y^2 + 2x^2$	(6.1)

Прежде чем приступить к решению это дифференциального уравнения первого порядка, нужно классифицировать его. Данное дифференциальное уравнение является **однородным дифференциальным уравнением**. Действительно, разделим левую и правую часть уравнения на xy, получим

$$y' = \frac{y}{x} + 2\frac{x}{y}.$$

Делаем замену $\frac{y}{x} = u$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + u$. Переписываем уравнение (6.1) в переменных u, x и приводим подобные слагаемые:

$$u'x = \frac{2}{u}.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Делим переменные:

$udu = 2xdx$

Интегрируем левую и правую части последнего уравнения:

$\frac{u^2}{2} = x^2 + C$,

где C – произвольная постоянная. Выражаем из последнего равенства u и делам обратную замену:

$y^2 = 2x^2(x^2 + C)$

Последнее равенство является общим интегралом дифференциального уравнения. Остается проверить, имеются ли у нас потерянные решения. При делении исходного уравнения на произведение xy мы предполагали, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. В то же время пара чисел $x = 0, y = 0$ является решением исходного уравнения (6.1), но эта точка является принадлежит интегральной кривой при $C = 0$, а значит, не является потерянным решением.

Ответ: $y^2 = 2x^2(x^2 + C)$, где C – произвольная постоянная.

Классифицировать дифференциальное уравнение и найти его общийинтеграл:

2.	$(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx$	(6.2)

Данное уравнение является дифференциальным уравнением **с разделяющимися переменными**. Разделяем переменные:

$$y^2dy=\frac{e^x dx}{(1+e^{2x})}$$

Интегрируем левую и правую части последнего равенства:

$$\frac{y^3}{3}=\operatorname{arctg}(e^x)+C\,,$$

где C – произвольная постоянная. Выражаем из последнего равенства y^3 и получаем общий интеграл уравнения (6.2)

$$y^3=3\operatorname{arctg}(e^x)+3C\,.$$

Проверяем потерянные решения. При делении переменных мы делили на $1+e^{2x}$. Это выражение не обращается в ноль при любых значениях переменной x. Поэтому потерянных решений нет.

Ответ: $y^3=3\operatorname{arctg}(e^x)+3C$, где C – произвольная постоянная.

Классифицировать дифференциальное уравнение и решить задачу Коши.

3.	$xy'=y^2+y\,,$	(6.3)
	$y(1)=2\,.$	(6.4)

Классифицируем дифференциальное уравнение (6.3). Разделив левую и правую части дифференциального уравнения (6.3) на x и перенося второе слагаемое из правой части в левую, получаем **уравнение Бернулли**

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x}$$

с $m = 2$. Решим его методом Бернулли. Делаем замену

$$y = uv, \tag{6.5}$$

тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляем эту замену в последнее дифференциальное уравнение:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = \frac{u^2v^2}{x}.$$

Группируем первое и третье слагаемые в левой части, а второе слагаемое из левой части переносим в правую:

$$v\left(u' - \frac{u}{x}\right) = \frac{u^2v^2}{x} - uv'. \tag{6.6}$$

Выбираем переменную u так, чтобы скобка в левой части равенства обращалась в нуль. Приравнивая скобку в левой части последнего равенства к нулю, получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными следующего вида:

$$u' - \frac{u}{x} = 0. \tag{6.7}$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя последнее равенство, находим

$$\ln|u| = \ln|x| + C,$$

где $C-$ произвольная постоянная. Потенцируя последнее соотношение, получаем

$$|u|=|x|C_1,$$

где $C_1=e^C>0$. Раскрывая оба модуля, получаем

$$u=C_2x,$$

где $C_2=\pm C_1, C_2\neq 0$. В этом уравнении достаточно взять некоторое частное решение. Положим $C_2=1$, то есть

$$u=x. \tag{6.8}$$

Константу C_2 не выбираем равную нулю так, как в противном случае по формуле (6.5) получаем, что $y=0$. А нас интересует ненулевые решения дифференциального уравнения (6.3), так как они не удовлетворяют начальному условию (6.4).

Подставляем (6.8) в (6.5) и, пользуясь (6.6), получаем ещё одно дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными на функцию v:

$$xv^2-xv'=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ или } v^2-v'=0.$$

Решение $x=0$ нас не интересует, так как мы ищем решение дифференциального уравнения (6.3), удовлетворяющего начальному условию (6.4). Остаётся решить дифференциальное уравнение

$$v^2 - v' = 0. \quad (6.9)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Делим переменные:

$$\frac{dv}{v^2} = dx$$

Интегрируя последнее равенство, получаем общий интеграл дифференциального уравнения (6.9)

$$-\frac{1}{v} = x + C,$$

где C– произвольная постоянная. Выражаем из последнего соотношения v:

$$v = -\frac{1}{x + C}. \quad (6.10)$$

Потерянным решением дифференциального уравнения с разделяющимися переменными (9) является решение $v = 0$.Это решение нам не подходит, так как в противном случае в силу формулы (6.5) получили бы, что $y = 0$, что противоречит начальному условию (6.4).

Подставляя теперь (6.10) и (6.8) в (6.5), находим решение дифференциального уравнения (6.3)

$$y = -\frac{x}{x + C}, \quad (6.11)$$

где C– произвольная постоянная. Теперь используем начальное условие (6.4). При подстановке значений $x = 1$ и

$y=-1$ в последнее равенство находим значение постоянной $C=-1{,}5$. Подставляя $C=-1{,}5$ в формулу (6.11), находим решение задачи Коши (6.3), (6.4):

$y=-\dfrac{x}{x-1{,}5}$.

Ответ: $y=-\dfrac{x}{x-1{,}5}$.

Классифицировать дифференциальное уравнение и решить задачу Коши.

4.	$2x^2y'+y+e^{\frac{1}{x}}=0$	(6.12)
	$y(1)=e$	(6.13)

Классифицируем дифференциальное уравнение (6.9). Для этого перенесём второе и третье слагаемые из левой части равенства в правую и разделим на $2x^2$:

$y'+\dfrac{y}{2x^2}=-\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2}$.	(6.14)

Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением, причём $x\neq 0$. Решим его методом вариации произвольной постоянной (Лагранжа). Линейное однородное дифференциальное уравнение, соответствующее линейному неоднородному уравнению (6.14), имеет вид:

$$y' + \frac{y}{2x^2} = 0. \qquad (6.15)$$

Последнее уравнение легко сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x^2}.$$

Делим переменные:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{2x^2}.$$

Интегрируя последнее равенство, получаем

$$\ln|y| = \frac{1}{2x} + C,$$

где C – произвольная постоянная. Выражаем из последнего соотношения $|y|$, пользуясь операцией потенцирования:

$$|y| = C_1 e^{\frac{1}{2x}},$$

где $C_1 = e^C > 0$, $C_1 > 0$. Раскрывая модуль, получим

$$y = C_2 e^{\frac{1}{2x}}, \qquad (6.16)$$

где $C_2 = \pm C_1, C_2 \neq 0$. При разделении переменных мы делили на y, то есть предполагали, что $y \neq 0$. $y = 0$ потерянным решением уравнения (6.15), но два этих решения можно объединить за счёт постоянной C_2, считая, что она может принимать значение, равное нулю. Таким образом, общим решением линейного однородного дифференциального уравнения (6.15) является функция

$$y_{00} = C_3 e^{\frac{1}{2x}}, \tag{6.17}$$

где C_3 – произвольная постоянная.

Согласно методу Лагранжа, решение дифференциального уравнения (6.14) будем искать в таком виде, что решение линейного однородного уравнения (6.17), только C_3 будет уже не постоянной, а функцией от независимой переменной x:

$$y_{он} = C_3(x) e^{\frac{1}{2x}}. \tag{6.18}$$

Теперь последнюю формулу нужно подставить в линейное неоднородное уравнение (6.14), чтобы получить дифференциальное уравнение на функцию $C_3(x)$. Вычислим сначала производную от функции вида (6.18):

$$y'_{он} = C'_3(x) e^{\frac{1}{2x}} - \frac{1}{2x^2} C_3(x) e^{\frac{1}{2x}}. \tag{6.19}$$

Подставляя теперь (6.18) и (6.19) в (6.14) и приводя подобные слагаемые, получаем дифференциальное уравнение

$$C'_3(x) = -\frac{e^{\frac{1}{2x}}}{2x^2},$$

решение которого имеет вид:

$$C_3(x)=e^{\frac{1}{2x}}+C_4,$$

где C_4 – произвольная постоянная.

Подставляя последнее равенство в (6.18), находим общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (6.14)

$$y_{он}=\left(e^{\frac{1}{2x}}+C_4\right)e^{\frac{1}{2x}}.$$

Для решения Задачи Коши (6.12), (6.13) остаётся найти значение постоянной C_4.Используя равенство (6.13), находим, что $x=1, y=e$. При подстановке этих значений в общее решение, легко вычислить постоянную:$C_4=0$. Подставляя значение $C_4=0$ в общее решение неоднородного уравнения, получаем решение задачи Коши (6.12), (6.13), которое имеет вид:

$$y_{чн}=e^{\frac{1}{x}}.$$

Ответ: $y_{чн}=e^{\frac{1}{x}}$.

Задачи для подготовки к контрольной работе по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»

Вариант 0.1

Классифицировать каждое из дифференциальных уравнений и найти общий интеграл

1.	$(y^2+2y+x^2)y'+2x=0$,
2.	$xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$.

Классифицировать каждое из уравнений и решить задачу Коши

3.	$(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$, $y(1)=e$.
4.	$y'+y=e^{-x}$, $y(0)=2$

Вариант 0.2

Классифицировать каждое из дифференциальных уравнений и найти общий интеграл

1.	$\frac{dx}{x(y-1)}+\frac{dy}{y(x+2)}=0$,
2.	$(y^4+2x)y'=y$.

Классифицировать каждое из уравнений и решить Задачу Коши

3.	$2y'\operatorname{ctg}x-4y=-y^2\sin 2x$, $y(0)=1$.
4.	$(3x^2-y^2)dy=2xydx$, $y(2)=1$.