Вариант 0

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1) $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0$

$(y^2 + 2y + x^2)y' = -2x$

$$y' = -\frac{2x}{y^2+2y+x^2}$$

$$x' = -\frac{y^2+2y+x^2}{2x} \qquad x = x(y) - ?$$

$$x' = -\frac{1}{2}x - \frac{y^2+2y}{2x} \qquad \text{ОДЗ } x \neq 0.$$

$$x' + \underbrace{\frac{1}{2}}_{p(y)}x = \underbrace{-\frac{y^2+2y}{2}}_{q(y)}x^{-1} \qquad \text{Бернулли} \quad m = -1$$

Метод Бернулли: $x(y) = v(y)\cdot u(y)$

$$v'u + u'v + \frac{1}{2}u\cdot v = -\frac{1}{2}(y^2+2y)\cdot\frac{1}{v\cdot u}$$

$$\underbrace{\left(v' + \frac{1}{2}v\right)}_{=0}\cdot u = -\frac{1}{2}(y^2+2y)\cdot\frac{1}{v\cdot u} - u'v \qquad (*)$$

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{v}{2} \qquad \text{Д.У с раз. перем.} \qquad v \neq 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}dy \Rightarrow \ln|v| = -\frac{1}{2}y + c$$

$$|v| = e^{-\frac{1}{2}y}\cdot e^{c},$$

$v = e^{-\frac{y}{2}} \cdot C_1$, $C_1 = e^c$, $C_1 > 0$

$C_1 = 1 \Rightarrow v = e^{-\frac{y}{2}} \rightarrow$ в (*)

$-\frac{1}{2}(y^2+2y)\cdot\frac{1}{v\cdot u} - u'v = 0$

$\frac{du}{dy}\cdot v = -\frac{1}{2}(y^2+2y)\cdot\frac{1}{v\cdot u}$ д.у с раз. перем.

$\frac{du}{dy} = -\frac{1}{2}(y^2+2y)\cdot\frac{1}{v^2\cdot u} = -\frac{1}{2}(y^2+2y)\cdot\frac{1}{u}\cdot e^{y}$ д.у с раз. пер

$u\,du = -\frac{1}{2}(y^2+2y)e^{y}dy$

$\int u\,du = -\frac{1}{2}\int(y^2+2y)e^{y}dy$

$-\frac{1}{2}\int(y^2+2y)e^{y}dy = -\frac{1}{2}\int(y^2+2y)d(e^{y}) = -\frac{1}{2}(y^2+2y)e^{y} +$

$+\frac{1}{2}\int e^{y}\cdot(2y+2)dy = -\frac{1}{2}(y^2+2y)e^{y} + \int(y+1)d(e^{y}) =$

$= -\frac{1}{2}(y^2+2y)e^{y} + (y+1)e^{y} - \int e^{y}dy = -\frac{1}{2}(y^2+2y)e^{y} +$

$+(y+1)e^{y} - e^{y} + C = -\frac{1}{2}y^2e^{y} - \cancel{ye^{y}} + \cancel{ye^{y}} + \cancel{e^{y}} - \cancel{e^{y}} + C$

$= -\frac{1}{2}y^2e^{y} + C, \forall C$

$\frac{u^2}{2} = -\frac{1}{2}y^2e^{y} + C, \forall C$

$u^2 = -y^2e^{y} + 2C$

$v = e^{-\frac{y}{2}} \Rightarrow v^2 = e^{-y}$

$x^2 = u^2\cdot v^2 = e^{-y}(-y^2e^{y} + 2C) = -y^2 + 2Ce^{-y} =$
$= -y^2 + C_1e^{-y}$

Ответ: $x^2 = -y^2 + C_1e^{-y}$, $\forall C_1$

~~Ответ~~ $\cancel{x^2 = \tilde{c} e^{-y} - 2y - 2}$
$\cancel{x = 0}$

2 $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$ однородное ур-ние

$x \neq 0$

$\frac{y}{x} = u$

$y = u \cdot x$

$y' = u'x + u$

$u'x + \cancel{u} = \cancel{u} + \sqrt{u^2 - 1}$

$u'x = \sqrt{u^2 - 1}$

$x \frac{du}{dx} = \sqrt{u^2 - 1}$

$u \neq \pm 1$

$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{dx}{x}$

$\ln |u - \sqrt{u^2 - 1}| = x + c, \ \forall c$

$|u - \sqrt{u^2 - 1}| = e^x \cdot c_1, \ \forall c_1 > 0$

$u - \sqrt{u^2 - 1} = e^x \cdot c_2, \ \forall c_2 \neq 0$

$u - \sqrt{u^2 - 1} = e^x \cdot c_3$

$\forall c_3$

$\frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = e^x \cdot c_3$

$\frac{y}{x} - \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x} = e^x \cdot c_3$

$y - \sqrt{y^2 - x^2} = x e^x \cdot C_3$, $\forall C_3$

потерянных решений нет

Ответ: $y - \sqrt{y^2 - x^2} = x e^x \cdot C_3$, $\forall C_3$

Классифицировать каждое из уравнений и решить задачу Коши

3 $\begin{cases} (1+x) y\, dx + (1-y) x\, dy = 0, & \text{Д.У.} \\ y(1) = e & \text{нач. усл.} \end{cases}$ задача Коши.

$(1+x) y\, dx + (1-y) x\, dy = 0$ ур-ние с разд переменными

$(1+x) y\, dx = (y-1) x\, dy \quad | : yx$ $\quad x \neq 0$, $y \neq 0$

$$\frac{1+x}{x} dx = \frac{y-1}{y} dy$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy$$

$x + \ln|x| = y - \ln|y| + C$, $\forall C$

$x - y + \ln|x| + \ln|y| = C$

$\ln|x \cdot y| = y - x + C$

$x \cdot y = e^{y-x} \cdot C_1$, $\forall C_1 \neq 0$.

$xy = e^{y-x} \cdot C_2$, $\forall C_2$ – общее решение

Начальное условие: $y(1) = e$

$x=1$, $y=e$.

$e = e^{e-1} \cdot C_2 \Rightarrow C_2 = e^{-e+2}$

$xy = e^{y-x} \cdot e^{-e+2} = e^{y-x-e+2}$ – частное решение

Ответ: $xy = e^{y-x-e+2}$

4 $\begin{cases} y' + y = e^{-x}, \\ y(0) = 2 \end{cases}$ диф. ур. / нач. усл. > задача Коши.

$y' + y = e^{-x}$ ЛНДУ

$y' + y = 0$ ЛОДУ

$\frac{dy}{dx} = -y$ $y \neq 0$.

$\frac{dy}{y} = -dx$

$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$

$\ln|y| = -x + C_1$ $\forall C$

$y = e^{-x} \cdot \tilde{C}$, $\forall \tilde{C}$

$y_{\text{он}} = e^{-x} \cdot \tilde{c}(x)$

$y'_{\text{о.н}} = -e^{-x} \cdot \tilde{c} + e^{-x} \cdot \tilde{c}'$

$\cancel{-e^{-x} \cdot \tilde{c}} + e^{-x} \cdot \tilde{c}' + \cancel{e^{-x} \cdot \tilde{c}} = e^{-x}$

$\tilde{c}' = 1$

$\tilde{c} = \int dx = x + c, \ \forall c$

$y_{\text{он}} = e^{-x}(x + c)$ – общее решение

Начальное условие $y(0) = 2$

при $x = 0$
$y = 2$ $\Rightarrow$ $e^{-0}(0 + c) = 2$

$1 \cdot (0 + c) = 2$

$c = 2$

$y_{\text{ч.н}} = e^{-x}(x + 2)$ – частное решение

Ответ: $y_{\text{ч.н}} = e^{-x}(x + 2)$