Вычисление длины дуги кривой

ПДСК

$y = f(x)$,

a, b - абсциссы начала и конца дуги

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx} \quad (1)$$

$x = f(y)$

c, d – ординаты начала и конца дуги

$$\boxed{l = \int_c^d \sqrt{1 + (x'_y)^2}\, dy} \quad (2)$$

ПЗФ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

$t \in [t_1, t_2]$

$$\begin{cases} x(t_1) = a, \\ x(t_2) = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t_1) = c, \\ y(t_2) = d. \end{cases}$$

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt} \quad (3)$$

Аналог (1), (2)

ПСК

$r = r(\varphi)$

$\alpha \le \varphi \le \beta$

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\, d\varphi} \quad (4)$$

Вывод (3) из (1): $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\, x'(t)\, dt =$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}{(x'_t)^2}}\, x'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}{\cancel{(x'_t)^2}} \cdot \cancel{(x'_t)^2}}\, dt =$$

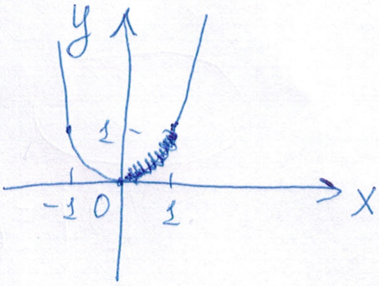
$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$$

[Е.Д] 6.493, 6.507, 6.511

Д/З [Е.Д] 6.500, 6.509 + ДЗ №1 (задача (3))

6.493 $y = x^2, \ x \in [0, 1]$

$l - ?$



Решение: $y'_x = 2x$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \boxed{\overbrace{\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx}^{I}} \overset{\text{инт. по}}{\underset{\text{частям}}{=}}$$

$$= x\sqrt{1+4x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,d\left(\sqrt{1+4x^2}\right) =$$

$a=0$ - начало дуги

$b=1$ - конец дуги

$$= \left(1\cdot\sqrt{1+4\cdot 1^2} - 0\cdot\sqrt{1+4\cdot 0^2}\right) -$$

$$- \int_0^1 x\cdot\frac{1\cdot 8x}{2\sqrt{1+4x^2}}\,dx = (\sqrt{5}-0) - \int_0^1 \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx = \sqrt{5} -$$

$$- \int_0^1 \frac{4x^2+1-1}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx = \sqrt{5} - \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx}_{I} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}} =$$

$$= \sqrt{5} - I + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(2x)}{\sqrt{1+(2x)^2}} = \sqrt{5} - I + \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|\Big|_0^1 =$$

$$= \sqrt{5} - I + \frac{1}{2}\left(\ln\left|2+\sqrt{1+4}\right| - \ln\left|0+\sqrt{1}\right|\right) =$$

$$= \sqrt{5} - I + \frac{1}{2}\left(\ln\left|2+\sqrt{5}\right| - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\ln 1}}\right) = \boxed{\sqrt{5} - I + \frac{1}{2}\ln\left|2+\sqrt{5}\right|}$$

$$I = \sqrt{5} - I + \frac{1}{2}\ln\left|2+\sqrt{5}\right|$$

$$2I = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left|2+\sqrt{5}\right|$$

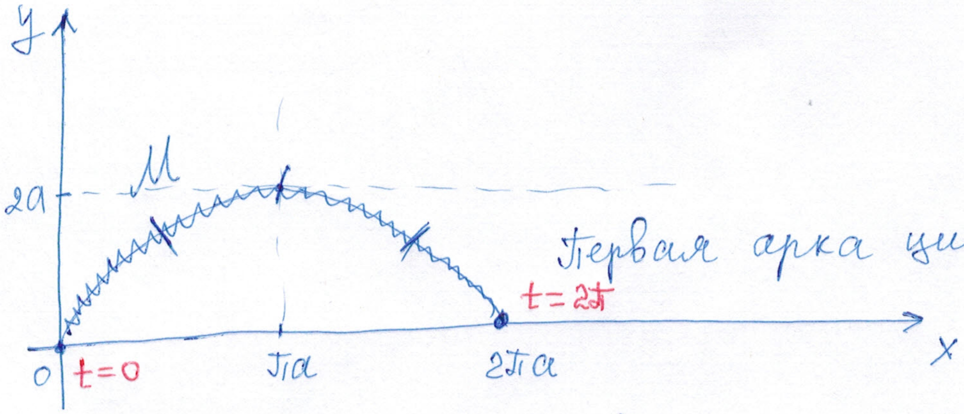
$$I = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|2+\sqrt{5}\right|$$

Ответ

6.507 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $a > 0$

Найти точку, которая делит длину первой арки циклоиды в отношении 1 : 3

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$(\frac{\pi}{2} - 1)a$	πa	$(\frac{3\pi}{2} + 1)a$	$2\pi a$
y	0	a	$2a$	a	0



Найдём длину всей первой арки циклоиды:

$\begin{cases} x'_t = a(1 - \cos t), \\ y'_t = a(\sin t) \end{cases}$

$$\boxed{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t =$$
$$= a^2 - 2a^2\cos t + a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t =$$
$$= a^2 - 2a^2\cos t + a^2 \cdot 1 =$$
$$= 2a^2 - 2a^2\cos t =$$
$$= 2a^2(1 - \cos t) =$$
$$= 2a^2 \cdot 2 \cdot \sin^2\frac{t}{2} =$$
$$= \boxed{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}$$

$\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{2}$

$0 \le t \le 2\pi$

$0 \le \frac{t}{2} \le \pi$

$\sin\frac{t}{2} \ge 0$ при $\frac{t}{2} \in [0; \pi]$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt =$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 2a \cdot 2\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -4a\left(\cos\frac{2\pi}{2} - \cos 0\right) = -4a(-1-1) = 8a$$

длина всей первой арки циклоиды

Пусть $M(x,y)$ – точка, которая делит первую арку циклоиды в отношении $1:3$.

$\Rightarrow$ длина дуги $\overset{\frown}{OM} = 8a : 4 = 2a$

t^* – параметр, при котором попадаем в т. $M(x,y)$, тогда длина дуги $\overset{\frown}{OM}$:

$$l_{OM} = \int_0^{t^*} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{преобразования аналогичные предыдущим}} = 2a\int_0^{t^*} \sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$\boxed{= 2 \cdot 2a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{t^*} = 2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{t^*} = 1$$

$$-2\left(\cos\frac{t^*}{2} - \cos 0\right) = 1$$

$$-2\cos\frac{t^*}{2} + 2 = 1$$

$$-2\cos\frac{t^*}{2} = -1$$

$$\cos\frac{t^*}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{t^*}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t^* = \frac{2\pi}{3}$$ – параметр, при котором мы попадаем в т. $M(x,y)$.

Остаётся найти x и y соответствующие t^*:

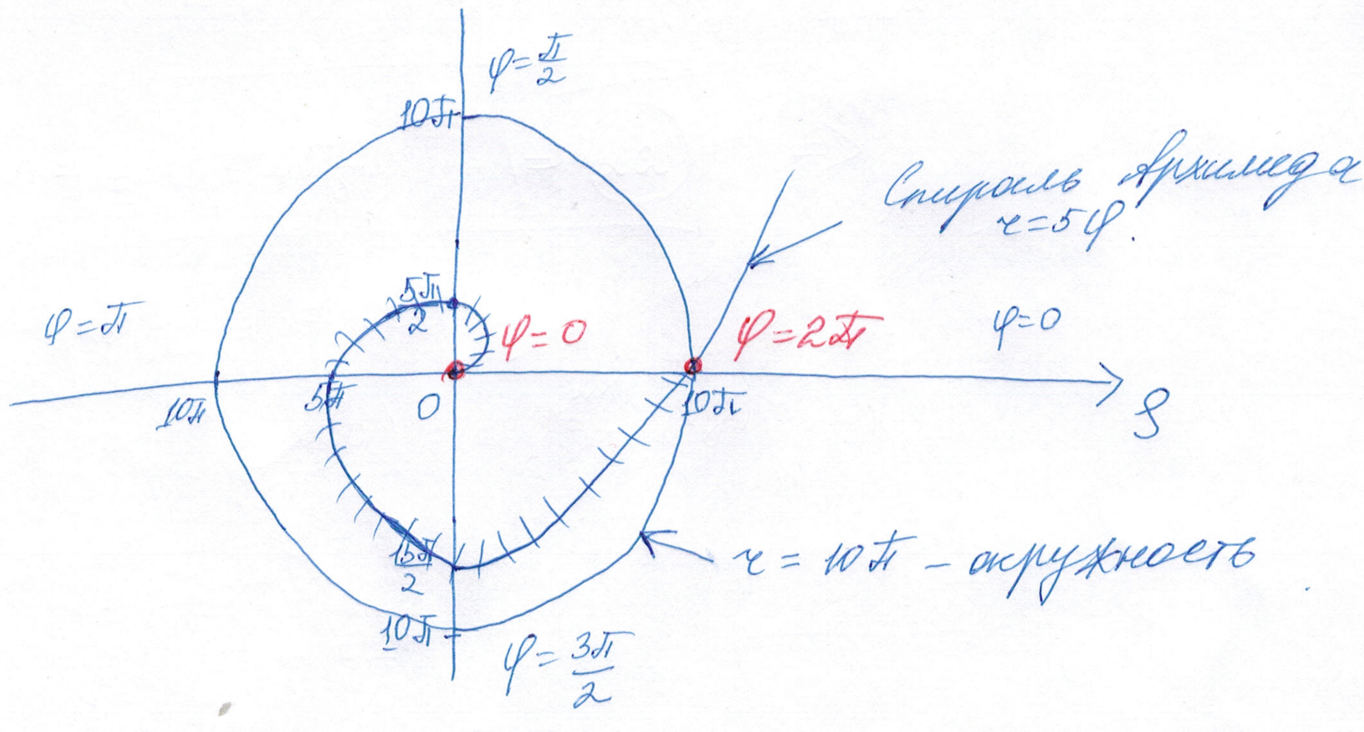
$$\begin{cases} x(t^*) = a\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = a\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ y(t^*) = a\left(1 - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = a\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}a \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow M\left(a\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \frac{3}{2}a\right)$ – Ответ.

6.511 Найти длину дуги спирали Архимеда $r = 5\varphi$, находящейся внутри окружности $r = 10\pi$.

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	0	$\frac{5\pi}{2}$	5π	$\frac{15\pi}{2}$	10π

← $r = 5\varphi$ Спираль Архимеда.



$\alpha = 0$ – начало дуги

$\beta = 2\pi$ – конец дуги

$$r'_\varphi = (5\varphi)'_\varphi = 5$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{(5\varphi)^2 + (5)^2} =$$

$$= 5\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi =$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\, d\varphi}_{= I} = \varphi \cdot \sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \varphi\, d\left(\sqrt{\varphi^2+1}\right) =$$

$$= \left(2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - 0\sqrt{0^2+1}\right) -$$

$$- \int_0^{2\pi} \varphi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\varphi^2+1}} \cdot 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2+1}}\, d\varphi = 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} -$$

$$- \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2+1-1}{\sqrt{\varphi^2+1}}\, d\varphi = 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1} +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}} = 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \underbrace{\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}}_{= I} + \ln\left|\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right|\Big|_0^{2\pi}$$

$$2I = 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right| -$$

$$- \ln\left|0 + \sqrt{0+1}\right|$$

$$2I = 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right|$$

$$I = \pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right|$$

$$= 5x\sqrt{4x^2+1} - \frac{5}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+1}\right|$$

Ответ.