Несобственные интегралы первого и второго рода

первого рода

функция $y=f(x)$ непрерывна, а промежуток интегрирования бесконечен

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx} \quad (1)$$

второго рода

промежуток интегрирования конечен, а ф-ция $y=f(x)$ терпит разрыв второго рода.

$$\boxed{\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx} \quad (2)$$

$f(x)$ в т. $x=b$ терпит разрыв 2-го рода.

Если lim в правой части (1), (2) $\exists$ и конечен, то несоб. инт. 1-го рода (1), несоб. инт. 2-го рода (2) наз-ся **сходящимися**.

Если же lim в правой части (1), (2) $\nexists$ или равен ∞, то нес. инт. 1-го рода (1) расх-ся и нес. инт. 2-го рода (2) **расх-ся**.

Определить сх-ся нес. инт. 1-го / 2-го рода сх-ся или расх-ся м/о с помощью след. инструментов

1-ый инструмент: По определению. Вычислить предел первообразной ф-ции.

2-ой инструмент: Признак сх-сти / расх-сти по неравенству

Теорема: Пусть $y=f(x)$, $y=g(x) \in C([a;+\infty))$ и выполнено нер-во $0 \le f(x) \le g(x)$, то

1) Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сх-ся, то и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сх-ся

2) Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расх-ся, то и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расх-ся

3-ий инструмент: Предельный признак сравнения

Теорема: Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные на $[a; +\infty)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \neq 0, \neq \infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сх-ся или расх-ся одновременно.

4-ый инструмент: Признак абсолютной сх-сти

Теорема: Если $f(x)$ знакопеременная ф-ция на $[a; +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сх-ся, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно.

Аналогичные признаки м/о сформулировать и для несоб. инт. 2-го рода.

Эталонные интегралы:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сх-ся}, & \alpha > 1 \\ \text{расх-ся}, & \alpha \le 1 \end{cases}}$$

1-го рода

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сх-ся при } \alpha < 1, \\ \text{расх-ся при } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

2-го рода

Аналогично:

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \\ &\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{сх-ся при } \alpha < 1, \\ &\text{расх-ся при } \alpha \geq 1 \end{aligned}$$

2-го рода

[Е.Д]
6.411 1-ый метр
6.426 3-ий метр
6.428 2-ой инстр
6.430 4-ый инстр

6.435 1-ый инстр
6.445 3-ий инстр

Д/З [Е.Д] 6.412
6.421
6.431

6.439

+ Д/З №1
4,5 задачи
+ подготовка
к РК.

6.411 $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_e^b =$

нес. инт. 1-го рода

$= -\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{\ln^2 b} - 1\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ сх-ся

1-ый инструмент

6.426 $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}dx =$ | нес. инт. 1-го рода $x \in [1; +\infty)$ |

нес. инт. 1-го рода

$f(x) = \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1} \sim \frac{x^{3/2}}{x^3} = \frac{1}{x^{3/2}} = g(x)$

при $x \to +\infty$

3-ий инструмент

$\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ Интеграл Дирихле

$\alpha = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$

сх-ся

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}dx$ – сх-ся по предельному признаку

6.428 $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \left|\begin{array}{l} \text{нес. инт. 1-го рода} \\ x \in [1;+\infty) \\ -1 \le \sin x \le 1 \\ 2 \le \sin x + 3 \le 4 \end{array}\right|$

2 ой инструмент

$$f(x) = \boxed{\frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}} \geq \frac{2}{\sqrt[3]{x}}} = g(x)$$

$\int\limits_1^{+\infty} g(x)\,dx = 2\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/3}}$ Интеграл Дирихле $\alpha = 1/3 < 1$ расх-ся

$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ расх-ся по нер-ву.

6.430 $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx = \left|\begin{array}{l} \text{нес. инт. 1-го рода} \\ x \in [1;+\infty) \\ \sin\frac{1}{x} \text{ - знакопеременная ф-ция.} \end{array}\right|$

$$f(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}$$

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\right| = \frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{2+x\sqrt{x}} \le \frac{1}{2+x\sqrt{x}} <$$

$$< \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} = g(x)$$

$\int\limits_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ Интеграл Дирихле $\alpha = 3/2 > 1$ сх-ся

$\int\limits_1^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\right| dx$ сх-ся по нер-ву

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx$$ сх-ся абсолютно по признаку абсолютной сх-сти.

6.435 $$\int_1^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт. 2-го рода} \\ \text{особ. } x = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^{e} \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left.\frac{\ln^{-2} x}{-2}\right|_{1+\varepsilon}^{e} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\ln^2 e} - \frac{1}{\ln^2(1+\varepsilon)}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\frac{1}{\ln^2(1+\varepsilon)}}_{\infty}$$

$= \infty \Rightarrow$ расх-ся.

1-ый инструмент

6.445 $$\int_0^{1} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт 2-го рода} \\ \text{особ. в т. } x = 0 \end{array} \right|$$

$$f(x) = \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1} \sim \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{1}{x^{1/3}} = g(x)$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$$ Интеграл Дирихле

$\alpha = \frac{1}{3} < 1$ сх-ся

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}\,dx$$ сх-ся по предельному признаку