Вычисление объёмов тел вращения

Пусть $y=f(x)\in C([a;b])$, $f(x)>0$.

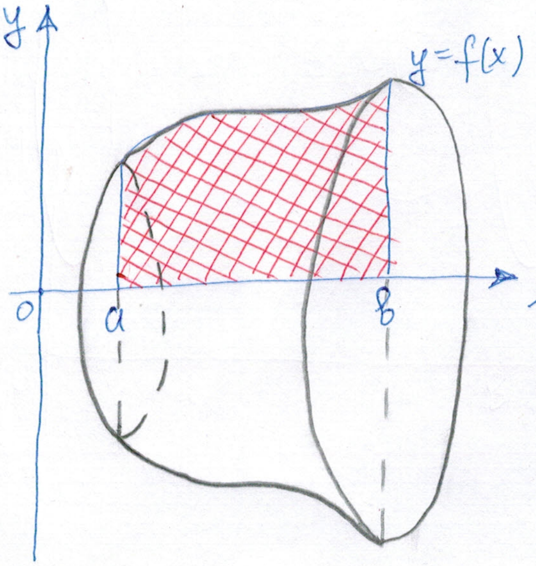


рис. 1

Криволинейная трапеция, ограниченная графиком ф-ции $y=f(x)$, осью Ox, прямыми $x=a$, $x=b$.

Вращаем эту кривол. трап. вокруг оси Ox. !

Крив. трап. – это геометр. фигура.

В результате вращения крив. тр. получаем тело.

$$\boxed{V_{Ox}=\pi\int\limits_a^b y^2(x)\,dx} \quad (1)$$ – формула к рис. 1

Пусть $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)\in C([a,b])$, $f_1, f_2>0$.

Крив. трап. ограничена гр. ф-ций $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$. Эту трапецию вращаем вокруг оси Ox! Получаем тело.

$$V_{Ox}=V_1-V_2=\boxed{\pi\int\limits_a^b\left(y_1^2(x)-y_2^2(x)\right)dx} \quad (2)$$ –

– формула к рис. 2.

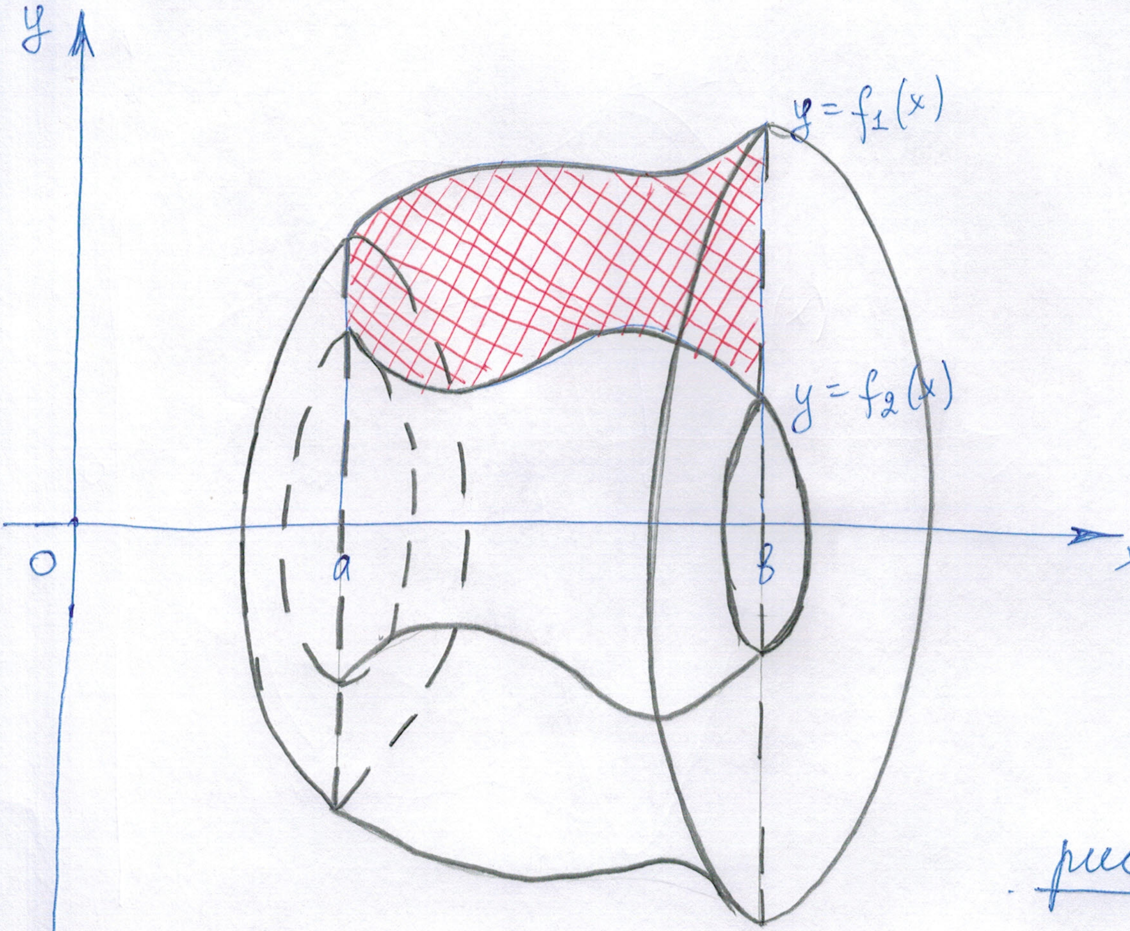


рис. 2

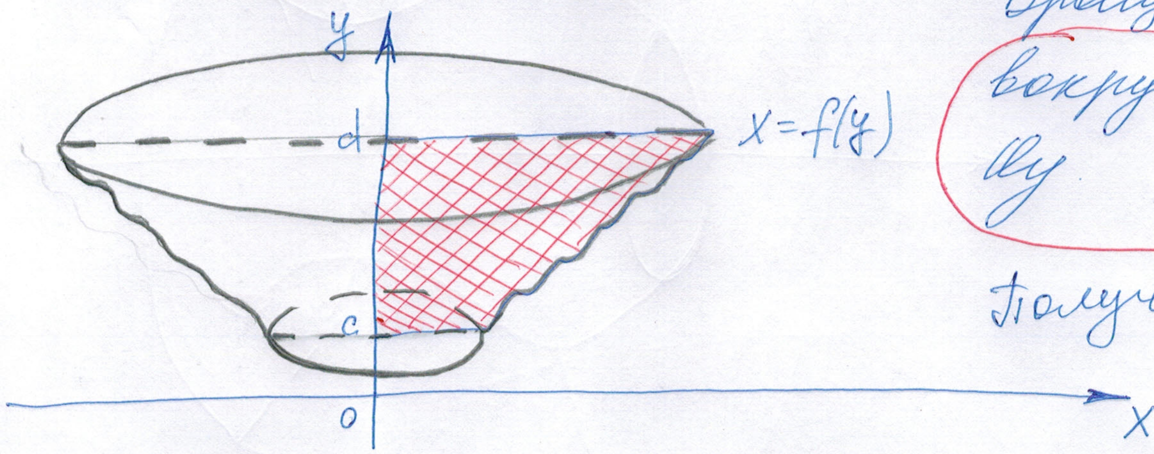
В данном случае $f_1 > f_2$ (график f_1 выше графика f_2). Если вдруг $f_2 > f_1$, то в формуле (2) нужно ф-ции поменять местами

Фактически из большего объёма вычитается меньший. (Можно провести аналогию: например в большое ведро поставить маленькое ведро. Радиус основания вёдер разный, а высота одинаковая. Фактически мы ищем разницу их объёмов)

Теперь вращение вокруг оси Oy.

Пусть ф-ция $x = f(y) \in C([c, d])$.

Крив. трап. ограничена графиком ф-ции $x = f(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и осью Oy.



Вращаем вокруг оси Oy !

Получаем тело.

рис. 3.

$$\boxed{V_{Oy} = \pi \int_c^d x^2(y)\,dy} \quad (1')$$

Аналогично можно вывести формулу

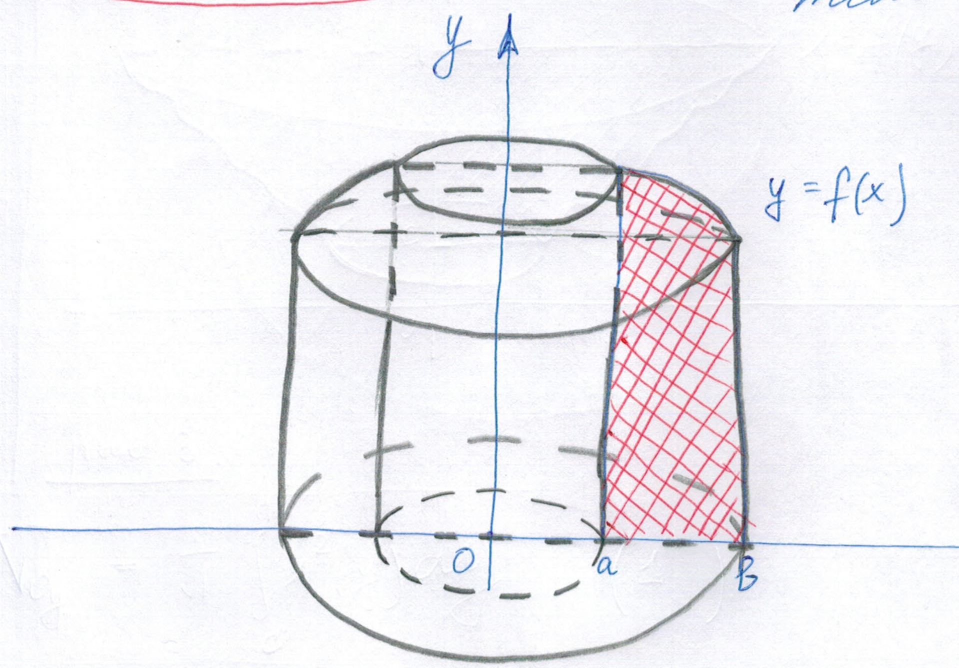
$$V_{Oy} = V_1 - V_2 = \boxed{\pi \int_c^d \left(x_1^2(y) - x_2^2(y)\right) dy} \quad (2')$$

В формуле $(2')$: $x_1(y)$, $x_2(y) \in C([c; d])$, $x_1 > x_2$, $y = c$, $y = d$. Вращаем крив. трап. относительно оси Oy. ! Опять из большего объёма вычитаем меньший.

Пусть $y = f(x) \in C([a;b])$, $f(x) > 0$.

Крив. трап. ограничена графиком ф-ции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.

Эту криволинейную трапецию вращаем вокруг оси Oy. ! В результате получаем тело.



{Здесь фактически из большого цилиндра вычитается меньший. Объём остатка вычисляем.}

$$\boxed{V_{oy} = 2\pi \cdot \int_a^b xy\,dy} \quad (3)$$

Здесь $a \geq 0$!!, $a < b$.

Важно: крив. трап., кот. вращаем д/б расположена по одну сторону от оси вращения. Если это не выполнено, то нужно сдвинуть систему координат т.е. график ф-ции $y = f(x)$, чтоб это условию было выполнено. Исключение – симметричные фигуры.

Следствия: 1 Если ф-ция $y=f(x)$ задана параметрически: $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ $t\in[t_1,t_2]$

$x\in[a,b]$, $y\in[c,d]$ + $\begin{cases} x(t_1)=a \\ x(t_2)=b \end{cases}$, $\begin{cases} y(t_1)=c, \\ y(t_2)=d \end{cases}$

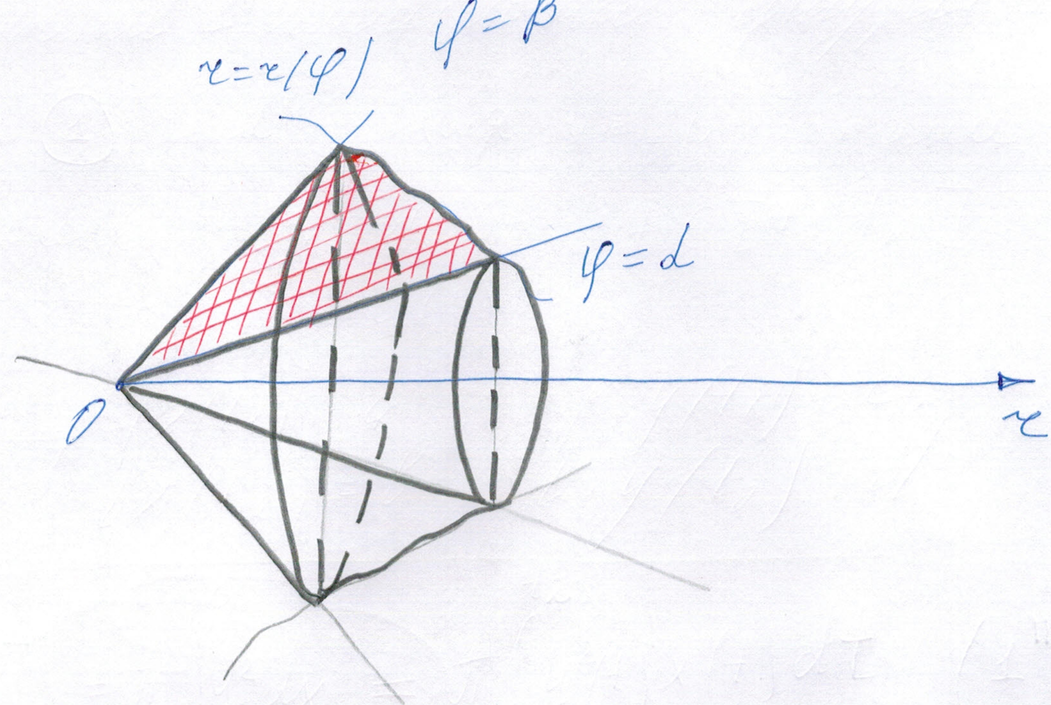
Тогда

$$\boxed{V_{ox}=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_{t_1}^{t_2}y^2(t)x'(t)dt} \quad (1'')$$

$$\boxed{V_{oy}=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_{t_1}^{t_2}x^2(t)y'(t)dt} \quad (1''')$$

$$\boxed{V_{oy}=2\pi\int_a^b xydy=2\pi\int_{t_1}^{t_2}x(t)y(t)x'(t)dt} \quad (3')$$

2 Если кривая задана в полярной системе координат $r=r(\varphi)$, $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$. Т.е. имеется криволинейный сектор, ограниченный лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ и кривой $r=r(\varphi)$. Этот криволинейный сектор



вращаем вокруг полярной оси. В результате получаем тело.

$$\boxed{V_{Oy} = \frac{2}{3}\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi \, d\varphi} \qquad (4)$$

{ Фактически из большего конуса вырезается меньший. Объём остатка вычисляется. }.

Замечание: при решении практических задач объёмное тело рисовать не нужно, достаточно начертить криволинейную трапецию.

Ауд. [Е.Д].

6.535 ПДСК
6.536 ПДСК
6.538
6.543

Д/З. [Е.Д]

№2 из Д/З

+ задачи для подготовки к РК.

Задачи:

6.535 $\begin{cases} x^2 = 2y, \\ 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ – линии, которыми ограничена кривая трапеция

V_{ox} – ?

Решение: $\boxed{y = \frac{1}{2}x^2}$ → Парабола

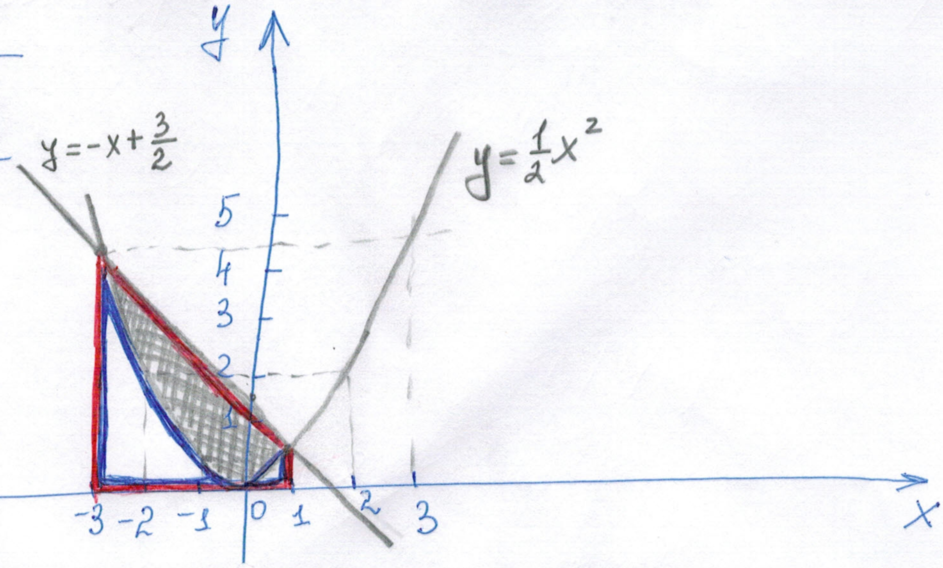
$2y = -2x + 3$

$\boxed{y = -x + \frac{3}{2}}$

Прямая.

x	0	1	2	3
y	0	$\frac{1}{2}$	2	4,5
x	-1	-2	-3	
y	$\frac{1}{2}$	2	4,5	

x	1	-3	0
y	$\frac{1}{2}$	4,5	1,5



Заштрих. фигура – это кривая трапеция, котор. вращаем относительно оси Ox.

$$V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \pi \int_{-3}^{1} \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 dx$$

$$V_2 = \pi \int_{-3}^{1} \left(\frac{1}{2} x^2\right)^2 dx$$

$$V_1 = \pi \int_{-3}^{1} \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 dx = \pi \int_{-3}^{1} \left(\frac{9}{4} - 3x + x^2\right) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{9}{4}x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \pi \left[\left(\frac{9}{4} - \overset{2}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(-\frac{27}{4} - \overset{2}{\frac{27}{2}} - \frac{27}{3}\right)\right] = \pi \left[\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{81}{4} + \frac{27}{3}\right] = \pi \left[\frac{9+4}{12} + \frac{3 \cdot 81 + 27 \cdot 4}{12}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{12}\left[13 + 243 + 108\right] = \frac{364}{12}\pi = \frac{182}{6}\pi = \frac{91}{3}\pi$$

$$V_2 = \pi \int_{-3}^{1} \left(\frac{1}{2} x^2\right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_{-3}^{1} x^4 dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^5}{5}\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= \frac{\pi}{20}\left(1 - (-3)^5\right) = \frac{244}{20}\pi = \frac{122}{10}\pi =$$

$$= \frac{61}{5}\pi$$

$$V = V_1 - V_2 = \overset{5}{\frac{91}{3}}\pi - \overset{3}{\frac{61}{5}}\pi = \frac{455 - 183}{15}\pi = \frac{272}{15}\pi$$

Ответ.

Замечание: Во-первых, можно было считать сразу объём V как разность. Т.е не вычислять по отдельности V_1 и V_2.

Во-вторых, фактически здесь V_1 - это объём, который получается при вращении относительно оси Ox крив. трап. огр. гр. фун. $y = -x + \frac{3}{2}$, прямыми $x = -3$, $x = 1$ и осью Ox;
V_2 - объём, который получается при вращении крив. трапеции огр. гр. фун. $y = \frac{1}{2}x^2$, прямыми $x = -3$, $x = 1$ и осью Ox.

V_1 - вращение "красной" кривол. трапеции относит. Ox

V_2 - вращение "синей" кривол. трапеции относит. Ox.

6.536 $\left.\begin{array}{l} y = e^{-2x} - 1 \\ y = e^{-x} + 1 \\ x = 0 \end{array}\right\}$ - линии, которыми ограничена крив. трап.

V_{Ox} - ?

Решение: Точки пересечения: $e^{-2x} - 1 = e^{-x} + 1$

$e^{-2x} - e^{-x} - 1 - 1 = 0$

$e^{-2x} - e^{-x} - 2 = 0$

$e^{-x} = t,$

$t^2 - t - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9 = 3^2$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$

$t_1 = 2$

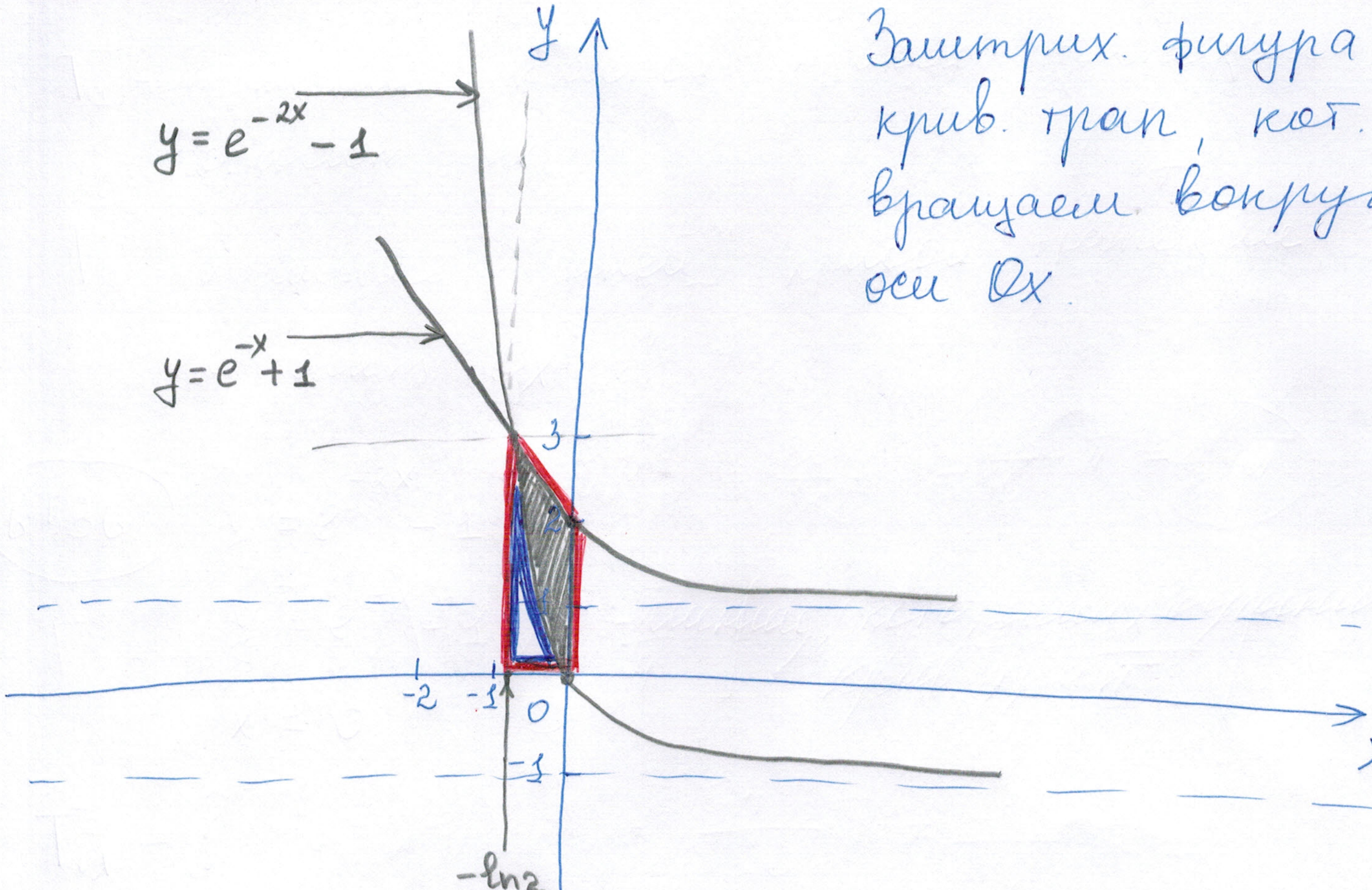
$t_2 = -1 \quad \varnothing$ т.к $t = e^{-x} > 0.$

$e^{-x} = t_1 = 2 = e^{\ln 2}$

$-x = \ln 2$

$x = -\ln 2$ – точка пересечения.

Заштрих. фигура – крив. трап, кот. вращаем вокруг оси Ox.



$y = e^{-2x} - 1$

x	0	$-\ln 2$
y	0	3

$y = e^{-x} + 1$

x	0	$-\ln 2$
y	2	3

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-\ln 2}^{0} (e^{-x}+1)^2 dx - \pi \int_{-\ln 2}^{0} (e^{-2x}-1)^2 dx =$$

$$= \pi \left[\int_{-\ln 2}^{0} \left(e^{-2x} + 2e^{-x} + 1 - (e^{-4x} - 2e^{-2x} + 1)\right) dx \right] =$$

$$= \pi \left[\int_{-\ln 2}^{0} \left(-e^{-4x} + 3e^{-2x} + 2e^{-x}\right) dx \right] =$$

$$= \pi \left[+\frac{1}{4} e^{-4x} - \frac{3}{2} e^{-2x} - 2e^{-x} \Big|_{-\ln 2}^{0} \right] =$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2\right) \right] =$$

$$= \pi \left[\frac{1-6-8}{4} - (\cancel{4} - 6 - \cancel{4}) \right] = \pi \left(6 - \frac{13}{4}\right) = \frac{11}{4}\pi$$

Ответ.

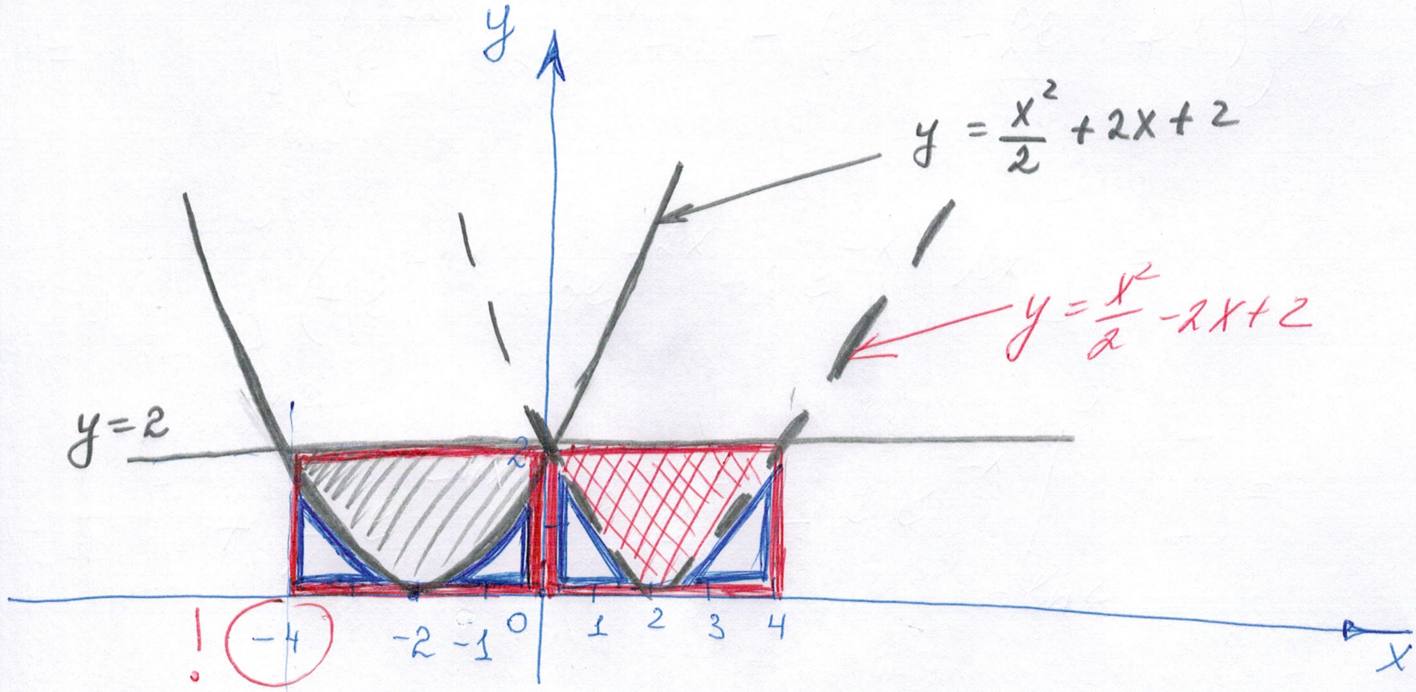
6.538 $\left.\begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \\ y = 2 \end{array}\right\}$ – линии, которыми огран. крив. трапеция

V_{oy} – ?

Решение: $x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -2$, $A(-2, 0)$ – вершина параболы

$y_B = 2 - 4 + 4 = 0$

x	0	-2	-4
y	2	0	2



Здесь $a = -4$, $b = 0$ – пределы интегрирования. А по формуле (3) – $a \geq 0$. ! Поэтому сразу формулу (3) применить нельзя.

Возможны следующие варианты:

1) сдвинуть исходную параболу так, чтобы $a \geq 0$;

2) при вращении исх. пар. вокруг оси Oy мы получаем некоторое тело. Это же тело вращения мы получим, если будем вращать не исходную параболу,

а ту, которая нарисована пунктиром. Главное записать уравнение этой параболы.

Оба метода – это фактически одно и то же. Второй, на мой взгляд проще.

Записать ур-ние пунктирной параболы мы используя свойство симметрии относительно оси Oy: $x \longmapsto (-x)$ т.е заменить x на $(-x)$.

Таким образом, если исходная парабола имеет ур-ние: $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$, то симметричная ей парабола относительно оси Oy будет иметь вид:

$$y = \frac{1}{2}(-x)^2 + 2\cdot(-x) + 2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2.$$

Теперь мы применять формулу (3), так как для параболы $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$: $a = 0$, $b = 4$.

$$V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = 2\pi\int_0^4 x\cdot 2\,dx$$

$$V_2 = 2\pi\int_0^4 x\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\right)dx$$

$$V = 2\pi\int_0^4 2x\,dx - 2\pi\int_0^4 x\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\right)dx =$$

$$= 4\pi\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\Big|_0^4 - 2\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 =$$

$$= 2\pi\cdot 16 - 2\pi\left(\frac{1}{8}\cdot 4^4 - \frac{2}{3}\cdot 4^3 + 16\right) =$$

$$= 2\pi\left(\cancel{16} - 32 - \cancel{16} + \frac{2}{3}\cdot 2^6\right) = 2\pi\cdot\left(\frac{128}{3} - 32\right) = 2\pi\cdot\frac{32}{3} =$$

$$= \frac{64\pi}{3}$$ Ответ

Замечание: Если бы сразу к исходной параболе применили формулу (3), то ответ получился бы тот же самый, но со знаком „–". (этот минус из dx т.е диф-ние по отрицательным x производится)

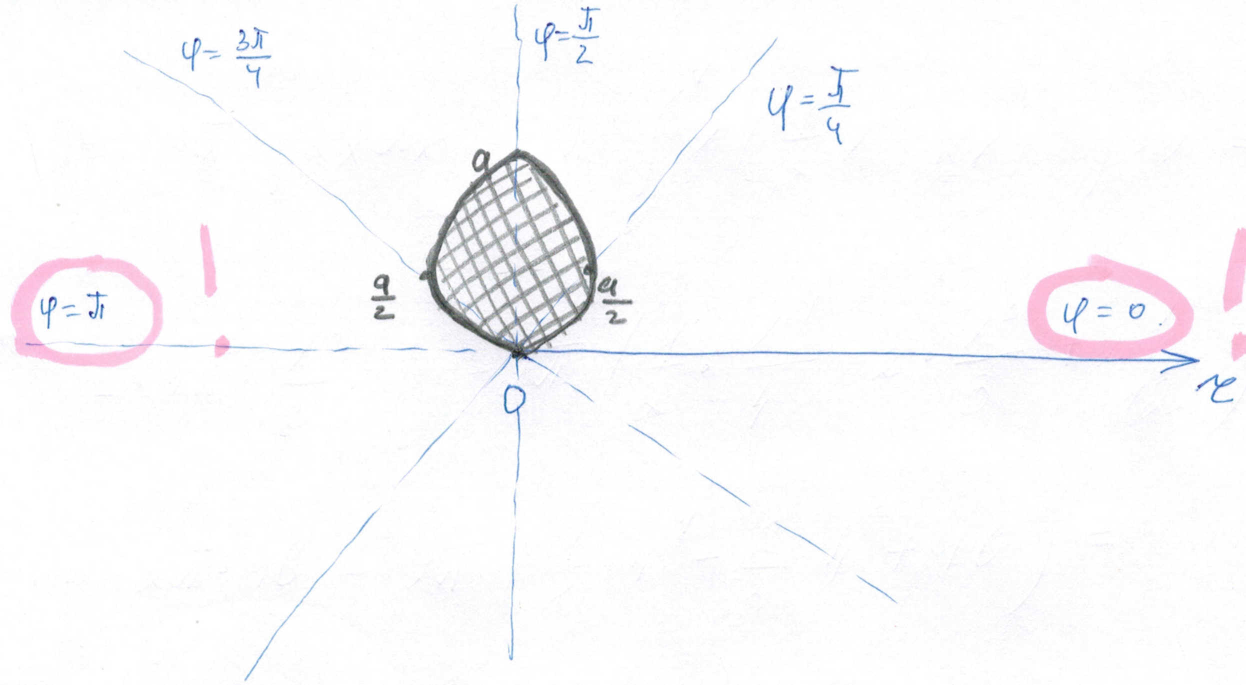
6.543

$r = a\sin^2\varphi$

$V_{oз}$ – ?

Решение:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r	0	$\frac{a}{2}$	a	$\frac{a}{2}$	0



Этот лепесток вращаем вокруг полярной оси. Получаем тело вращения.

$$V_{os} = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi} \left(a \sin^2\varphi\right)^3 \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6\varphi \, d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} \left(1-\cos^2\varphi\right)^3 d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} \left(1 - 3\cos^2\varphi + 3\cos^4\varphi - \cos^6\varphi\right) d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \left[\cos\varphi - 3\cdot\frac{\cos^3\varphi}{3} + \frac{3\cos^5\varphi}{5} - \frac{\cos^7\varphi}{7}\right]\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \Big[-\cancel{1} - (-\cancel{1}) + \frac{3}{5}(-1) - \frac{1}{7}(-1) -$$

$$- \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{3}{5}\cdot 1 - \frac{1}{7}\cdot 1\right) \Big] =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \left[-\frac{3}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{5} + \frac{1}{7} \right] =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \left[\frac{^{5/}2}{7} - \frac{^{7/}6}{5} \right] = -\frac{2}{3}\pi a^3 \cdot \left(-\frac{32}{35}\right) =$$

$$= \frac{64}{105}\pi a^3$$ Ответ.

Замечание: м/о было вычислить интеграл вида $V_{Oy} = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/2} \left(a \sin^2\varphi\right)^3 \sin\varphi \, d\varphi$

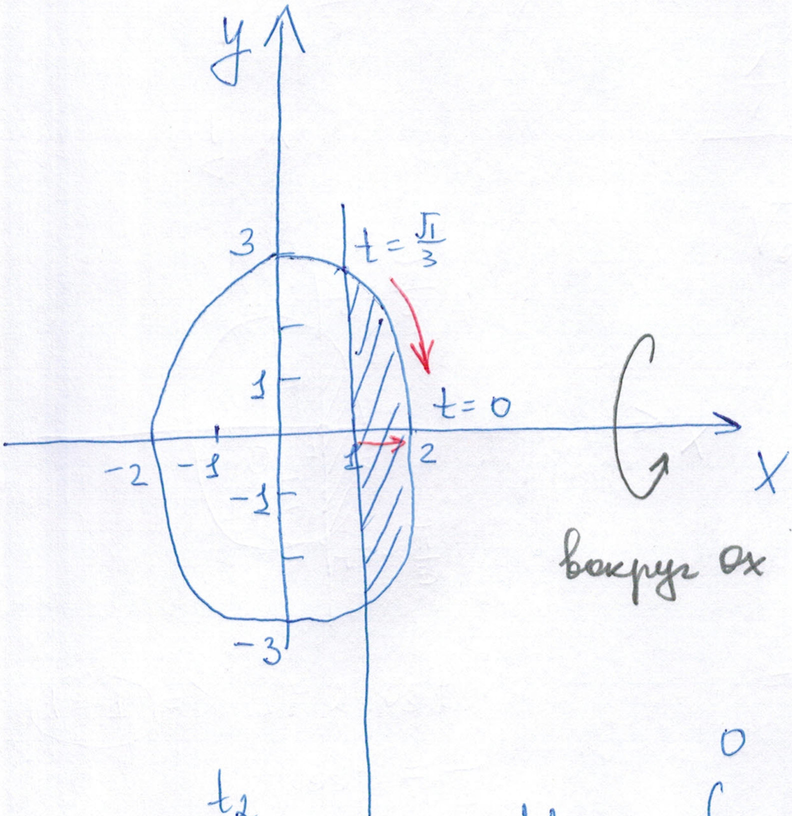
т.е половинку, а затем умножить на два.

Пример: $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t \end{cases}$ при $x \geq 1$

V_{Ox} – ?

Решение: $\begin{cases} \cos t = \frac{x}{2}, \\ \sin t = \frac{y}{3} \end{cases}$ $\quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1}$ эллипс



$x = 1 \Rightarrow 2\cos t = 1$

$\cos t = \frac{1}{2}$

$t = \frac{\pi}{3}$

$x = 2 \Rightarrow 2\cos t = 2$

$\cos t = 1$

$t = 0$

$$V_{Ox} = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\, x'(t)\, dt = \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} 9\sin^2 t \cdot 2(-\sin t)\, dt =$$

$$= 18\pi \int_0^{\pi/3} \sin^3 t\, dt = -18\pi \int_0^{\pi/3} \left(1 - \cos^2 t\right) d(\cos t) =$$

$$= -18\pi \left(\cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{3} \cdot \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \right) = -18\pi \left(\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - 1\right) \right) = -18\pi \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) \right) =$$

$$= -18\pi \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{24} \right) = -18\pi \cdot \frac{-12+7}{24} = -\cancel{18}^{\,\cancel{9}\,3}\pi \frac{(-5)}{\cancel{24}_{\cancel{12}\,4}} = \frac{15}{4}\pi$$

Ответ