Занятие №19

Интегрирование ЛОДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. ФСР. Восстановление ЛОДУ по ФСР.

Система ф-ций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ л з на $[a, b]$, если лин. комб.

$\boxed{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0}$ л.з. $\exists c_i \neq 0$

и при этом $\exists c_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, $c_i \in \mathbb{R}$.

Система ф-ций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ лн з на $[a, b]$, если лин. комб.

$\boxed{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0}$, лнз $c_i = 0$

где все $c_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, $c_i \in \mathbb{R}$.

Определителем Вронского наз-ся определитель вида:

$$\boxed{W[x] := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}$$ вронскиан

Если $W[x] = 0$, $\forall x \in [a, b]$, то $y_1(x), \dots, y_n(x)$ л.з $\forall x \in [a, b]$. Если $\exists x_0 \in [a, b]$, $W[x_0] \neq 0$, то $y_1, \dots, y_n$ л.н.з на $[a, b]$

ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэф-ми имеет вид

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0.}$$ ЛОДУ

Соответствующее ему характеристическое ур-ние имеет вид

$$\boxed{k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0}$$ характ. ур-ние

Характеристический многочлен, стоящий в левой части характеристического уравнения был получен из ЛОДУ путём замены n-ой производной на n-ую степень.

Этапы решения ЛОДУ n-го порядка

1. Решаем харак. ур-ние соответствующее ЛОДУ n-го порядка и находим $k_1, \ldots, k_n$

2. Записываем ФСР ЛОДУ n-го порядка т.е лн.з решения

$$\begin{cases} y_1 = e^{k_1 x} \\ y_2 = e^{k_2 x}, \\ \ldots\ldots \\ y_n = e^{k_n x}. \end{cases}$$ – ФСР ЛОДУ n-го порядка

3 Записываем общее решение ЛОДУ n-го порядка в виде

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = C_1 e^{k_1 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

Построение общего решения ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами по корням характеристического уравнения

1 Хар. ур. имеет n различных корней (действительных)

$k_1, k_2, \ldots, k_n$

ФСР ЛОДУ n-го порядка: $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}$

Общее решение ЛОДУ n-го порядка:

$$y_{oo} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x},$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ – const.

2 Харак. ур. имеет один действ. корень кратности n т.е. $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k$

ФСР ЛОДУ n-го порядка: $\{e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \ldots, x^{n-1} e^{kx}\}$

Общее решение ЛОДУ n-го порядка:

$$y_{oo} = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx} + c_3 x^2 e^{kx} + \ldots + c_n x^{n-1} e^{kx} =$$

$$= e^{kx} (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_n x^{n-1})$$

③ Харак. ур-ние имеет комплексные корни кратности m

ФСР состоит из $2m$ л.н.з решений или „m" пар решений

$\alpha \pm \beta i$ - кратность m

$2m = n$

$e^{\alpha x}\cos\beta x, \; xe^{\alpha x}\cos\beta x, \; x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, \; x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x, \; xe^{\alpha x}\sin\beta x, \; x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, \; x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Ауд:
9.286 +
9.291 +
9.293 +
9.294 +
9.296 +
9.300 +
9.322 +
9.324 +
9.333 +
9.336 +
9.339 +
9.327 +

д/з:
9.288 +
9.289 +
9.295 +
9.299 +
9.301 +
9.325 +
9.326 +
9.328 +
9.330 +
9.332 +
9.334 +
9.338 +

Исследовать на л.з. следующие системы

9.286

$y_1 = x$

$y_2 = \ln x$

$$W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} =$$

$$= x\cdot\frac{1}{x} - \ln x = 1 - \ln x = 0$$

$\ln x = 1 \quad \Rightarrow x = e$

при всех $x \in (0; +\infty)$ $W[x] \neq 0$
при $x = e$ $W[x] = 0$

$\Rightarrow$ $y_1 = x,\ y_2 = \ln x$ л.н.з. Ответ

9.291 $y_1 = \sin x$
$y_2 = \cos x$
$y_3 = \sin 2x$

$$W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin 2x \\ \cos x & -\sin x & 2\cos 2x \\ -\sin x & -\cos x & -4\sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$= 4\sin^2 x \sin 2x + \cos^2 x \sin 2x - \cancel{2\cos 2x \cos x \sin x} -$$
$$- \sin^2 x \sin 2x + \cancel{2\cos x \sin x \cos 2x} + 4\cos^2 x \sin 2x =$$

$$= 4\sin 2x\,(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1}) + \sin x\,(\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{=\cos 2x}) =$$

$$= 4\sin 2x + \sin 2x \cos 2x = \sin 2x\,(4 + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$
$2x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$x = \frac{\pi n}{2}$

$W[x] \neq 0$ при всех $x \in (-\infty; +\infty)$ за исключением точек $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y_1 = \sin x,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin 2x$ л.н.з. Ответ

9.293 $y_1 = e^x$

$y_2 = e^{x+1}$

$$W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{x+1} \\ e^x & e^{x+1} \end{vmatrix} = 0$$

при $\forall x$ $\Rightarrow$ $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{x+1}$ л.з

Ответ

9.294 $y_1 = x$

$y_2 = 0$

$y_3 = e^x$

$$W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & e^x \\ 1 & 0 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} =$$

$= 0$ при $\forall x$ $\Rightarrow$ $y_1 = x$, $y_2 = 0$, $y_3 = e^x$ л.з.

Ответ

Зная ФСР ЛОДУ составить это уравнение

9.296 ФСР $= \{1, e^{-x}\}$

$$y_{o.o.} = c_1 + c_2 e^{-x}$$

$y' = -c_2 e^{-x}$

$y'' = c_2 e^{-x}$

$\boxed{y'' = -y'}$ Ответ

9.300 ФСР $= \{1, \sin x, \cos x\}$

$y_{o.o} = c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$

$y' = c_1 \cos x - c_3 \sin x$

$y'' = -c_1 \sin x - c_3 \cos x$

$y''' = -c_1 \cos x + c_3 \sin x$

$\boxed{y''' = -y'}$ Ответ

9.322 Найти общее решение ЛОДУ

$y'' + 6y' + 13y = 0$ ЛОДУ

$k^2 + 6k + 13 = 0$ хар. ур.

$D = 36 - 4 \cdot 13 = 36 - 52 = -16 < 0$

$k_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$k_{1,2} = -3 \pm 2i$

$\alpha = 3, \ \beta = 2.$

ФСР $= \{e^{-3x} \cos 2x, \ e^{-3x} \sin 2x\}$

$$y_{oo} = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} \sin 2x =$$
$$= e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

Ответ

9.324 Найти общее решение ЛОДУ

$$3y'' - 2y' - 8y = 0$$

$$3k^2 - 2k - 8 = 0$$

$$D = 4 + 3 \cdot 4 \cdot 8 = 4 + 96 = 100 = 10^2$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm 10}{2 \cdot 3}$$

$k_1 = 2$

$k_2 = -\frac{4}{3}$

$$ФСР = \{ e^{2x}, e^{-\frac{4}{3}x} \}$$

$$y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$$

Ответ

9.327 Найти общее решение ЛОДУ

$$y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0$$

$\lambda_3 = 1$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$$

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3-5\lambda^2+17\lambda-13 & \lambda-1 \\ \cline{2-2} \underline{\lambda^3-\lambda} & \lambda^2-4\lambda+13 \\ -4\lambda^2+17\lambda & \\ \underline{-4\lambda^2+4\lambda} & \\ 13\lambda-13 & \\ \underline{13\lambda-13} & \\ 0 & \end{array}$$

$\lambda^2-4\lambda-13=0$

$D=16-4\cdot 13=16-52=-36<0$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$

$\lambda_{1,2}=2\pm3i$

ФСР: $=\{e^x,\ e^{2x}\cos 3x,\ e^{2x}\sin 3x\}$

$y_{oo}=C_1e^x+C_2e^{2x}\cos 3x+C_3e^{2x}\sin 3x$

9.333 $\quad y^{(V)}+8y'''+16y'=0$

$\lambda^5+8\lambda^3+16\lambda=0$

$\lambda(\lambda^4+8\lambda^2+16)=0$

$\lambda=0 \qquad \lambda^4+8\lambda^2+16$

$(\lambda^2+4)^2=0$

$\lambda^2=-4$

$\lambda=\pm2i$ кратности 2

$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\lambda_3=2i,\quad \lambda_4=\lambda_5=-2i$

$ФСР = \{ e^{0\cdot x},\ e^{0\cdot x}\cos 2x,\ e^{0\cdot x}\cdot x\cos 2x,$
$e^{0\cdot x}\sin 2x,\ e^{0\cdot x}\cdot x\sin 2x \} =$

$= \{ 1,\ \cos 2x,\ x\cos 2x,\ \sin 2x,\ x\sin 2x \}$

$y_{oo} = C_1 + C_2\cos 2x + C_3 x\cos 2x + C_4\sin 2x +$
$+ C_5 x\sin 2x$

Ответ

9.336 $y^{(VI)} + 2y^{(V)} + y^{(IV)} = 0.$

$k^6 + 2k^5 + k^4 = 0$

$k^4(k^2 + 2k + 1) = 0.$

$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0 \qquad k^2 + 2k + 1 = 0$

$(k+1)^2 = 0$

$k_5 = k_6 = -1$

$ФСР = \{ e^{0\cdot x},\ x\cdot e^{0\cdot x},\ x^2\cdot e^{0\cdot x},\ x^3\cdot e^{0\cdot x},$
$e^{-1\cdot x},\ x\cdot e^{-1\cdot x} \} =$
$= \{ 1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ e^{-x},\ xe^{-x} \}$

$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{-x} +$
$+ C_6 x e^{-x}$

Ответ

9339 Найти частные решения уравнений по данным начальным условиям:

$$\begin{cases} y''' - y' = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

Задача Коши

$\lambda^3 - \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda = 0, \ \lambda = 1, \ \lambda = -1$

$\text{ФСР} := \{ e^{0 \cdot x}, e^{1 \cdot x}, e^{-1 \cdot x} \} = \{ 1, e^x, e^{-x} \}$

$y_{oo} = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$

$y_{oo}(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 3$

$y'_{oo}(0) = c_2 e^x - c_3 e^{-x} \Big|_{x=0} = c_2 - c_3 = -1$

$y''_{oo}(0) = c_2 e^x + c_3 e^{-x} \Big|_{x=0} = c_2 + c_3 = 1$

$$+\begin{array}{l} c_2 - c_3 = -1 \\ c_2 + c_3 = 1 \\ \hline 2c_2 = 0 \end{array}$$

$c_2 = 0$

$c_3 = 1$

$c_1 = 2$

$y_{чо} = 2 + e^{-x}$ Ответ