Занятие № 16

Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и уравнений Бернулли.

Опр 1. Диф. ур-ние 1-го порядка наз-ся линейным, если неизвестная ф-ция $y = y(x)$ и ее производная $y'(x)$ входят в уравнение в первой степени не перемножаясь м/у собой

$$\boxed{y' + p(x)y = f(x)} \quad (1)$$

Если $f(x) \neq 0$, то (1) наз-ся ЛНДУ

Если $f(x) = 0$, то (1) наз-ся ЛОДУ.

Опр 2. Диф. ур-ние 1-го порядка наз-ся ур-ние Бернулли, если оно имеет вид

$$\boxed{y' + p(x)y = f(x) \cdot y^m}, \text{ где}$$

$m \neq 0$, $m \neq 1$ т.к., если

$m = 0$, то ур-ние Бернулли $\to$

$\to$ ЛНДУ

$m = 1$, то ур-ние Бернулли $\to$

$\to$ ЛОДУ.

Методы решения лин. неод. диф. урав.

метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

метод Бернулли (метод подстановки $y = u \cdot v$)

Уравнение Бернулли решается в два этапа:

1) $z = y^{1-m} \rightarrow$ ЛНДУ

2) $y = u \cdot v$

Ауд.

$\left.\begin{array}{l} 9.67 \\ 9.72 \\ 9.74 \\ 9.78 \end{array}\right\}$ ЛНДУ

9.83 З.К

$\left.\begin{array}{l} 9.88 \\ 9.91 \\ 9.92 \\ 9.95 \end{array}\right\}$ Бернулли

Д/З.

$\left.\begin{array}{l} 9.68 \\ 9.69 \\ 9.75 \\ 9.79 \\ 9.80 \end{array}\right\}$ ЛНДУ

9.84 З.К

$\left.\begin{array}{l} 9.87 \\ 9.93 \\ 9.94 \end{array}\right\}$ Бернулли

967 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ЛНДУ

$y' = -2xy + xe^{-x^2}$

Метод Лагранжа

1) $y' + 2xy = 0$ ЛОДУ

$y' = -2xy$

$\frac{dy}{dx} = -2xy$, $y \neq 0$

$\frac{dy}{y} = -2x$

$\ln|y| = -\cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} + C$, $\forall C$

$\ln|y| = -x^2 + C$

$|y| = e^{-x^2+C} = e^{-x^2} \cdot e^C = e^{-x^2} \cdot C_1$, $\forall C_1 > 0$

$y = \pm e^{-x^2} \cdot C_1$

$y = e^{-x^2} \cdot C_2$, $\forall C_2 \neq 0$.

$y = e^{-x^2} \cdot C_3$, $\forall C_3$

$y_{o.o} = e^{-x^2} \cdot C_3$, $\forall C_3$ общее решение ЛОДУ

2) Общее решение ЛНДУ $y_{он} = e^{-x^2} \cdot C_3(x)$.

Подставляем вид решения $y_{он}$ в ЛНДУ, получаем:

$(e^{-x^2} \cdot C_3(x))' + 2x \cdot e^{-x^2} \cdot C_3(x) = xe^{-x^2}$

$\cancel{-2xe^{-x^2} C_3(x)} + e^{-x^2} \cdot C_3'(x) + \cancel{2xe^{-x^2} C_3(x)} =$

$= xe^{-x^2}$

$c_3'(x) = x$

$c_3(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + \tilde{c}$, $\forall\, \tilde{c}$

$y_{oн} = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + \tilde{c}\right)$

Ответ: $y_{oн} = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + \tilde{c}\right)$ Ответ

9.72 $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$ ЛНДУ

1) $y' + \frac{y}{x} = 0$ ЛОДУ

$y' = -\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ $y \neq 0$

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

$\ln|y| = -\ln|x| + c$, $\forall\, c$

$\ln|y| + \ln|x| = c$

$\ln|y \cdot x| = c$

$|y \cdot x| = e^{c} = c_1$, $\forall\, c_1 > 0$

$y \cdot x = \pm c_1$

$y \cdot x = c_2$, $\forall\, c_2 \neq 0$

$y = \frac{c_2}{x}$, $\forall\, c_2 \neq 0$

$y = \frac{c_3}{x}$, $\forall\, c_3$

$y_{oo} = \frac{C_3}{x}$ – общее решение ЛОДУ.

2) $y_{он} = \frac{C_3(x)}{x}$ – общее решение ЛНДУ

$$\frac{C_3'x - C_3}{x^2} + \frac{C_3}{x^2} = 2\ln x + 1$$

$$\frac{C_3'}{x} = 2\ln x + 1$$

$$C_3' = 2x\ln x + x$$

$$C_3 = 2\int x\ln x\,dx + \frac{x^2}{2} + \tilde{C}$$

$$\int x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \\ x\,dx = dv \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$C_3 = x^2\ln x - \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \tilde{C} = x^2\ln x + \tilde{C}$$

$$y_{он} = \left(x^2\ln x + \tilde{C}\right)\cdot\frac{1}{x} = x\ln x + \frac{1}{x}\tilde{C}, \ \forall\tilde{C}.$$

Ответ: $y_{он} = x\ln x + \frac{1}{x}\tilde{C}, \ \forall\tilde{C}$

Ответ

9.74 $\quad y' = \dfrac{y}{x+y^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^3}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^3}{y} = \frac{1}{y}x + y^2 \quad \text{ЛНДУ}$$

Метод Бернулли или метод подстановки

1) $x = u(y) \cdot v(y)$

$$u'v + v'u = \frac{1}{y}uv + y^2$$

$$u'v + v'u - \frac{1}{y}uv = y^2$$

$$v\left(u' - \frac{1}{y}u\right) = y^2 - uv'$$

а) $u' - \frac{1}{y}u = 0$

$$\frac{du}{dy} = \frac{u}{y} \qquad u \neq 0$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln|u| = \ln|y| + C, \ \forall C$$

$$|u| = C_1 \cdot |y|, \ \forall C_1 > 0$$

$$\left|\frac{u}{y}\right| = C_1$$

$$\frac{u}{y} = \pm C_1$$

$$\frac{u}{y} = C_2, \quad \forall C_2 \neq 0$$

$u = C_3 \cdot y \quad , \forall C_3$

$C_3 = 1$

$u = y$

б) $y^2 - u v' = 0$

$y v' = y^2$ $\qquad$ $y = 0$

$v' = y$

$v = \frac{y^2}{2} + C, \ \forall C$

$x = u \cdot v = y \cdot \left(\frac{y^2}{2} + C\right) = \frac{1}{2} y^3 + Cy, \ \forall C$

$y = 0.$

Ответ

Ответ: $x = \frac{1}{2} y^3 + Cy, \ \forall C$

$y = 0.$

9.78 $\quad xy' + x^2 + xy = y$

$x \frac{dy}{dx} + x^2 + xy = y$

$\frac{dy}{dx} + x + y = \frac{y}{x} \qquad x \neq 0$

$\frac{dy}{dx} + y\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -x$ $\quad$ ЛНДУ

1) $y = u(x) \cdot v(x)$

$$\frac{u\,dv + v\,du}{dx} + x + uv = \frac{uv}{x}$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + v\left(u - \frac{u}{x}\right) = -x$$

$$v\left(\frac{du}{dx} + u - \frac{u}{x}\right) = x - \frac{dv}{dx}u$$

a) $\frac{du}{dx} + u - \frac{u}{x} = 0$

$$\frac{du}{dx} = u\left(\frac{1}{x} - 1\right) \qquad u \neq 0.$$

$$\frac{du}{u} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx$$

$$\ln|u| = \ln|x| - x + C, \ \forall C.$$

$$\ln|u| - \ln|x| = -x + C$$

$$\ln\left|\frac{u}{x}\right| = -x + C$$

$$\left|\frac{u}{x}\right| = e^{-x+C} = e^{-x} \cdot e^{C} = e^{-x} \cdot C_1, \ \forall C_1 > 0$$

$$\frac{u}{x} = \pm e^{-x} \cdot C_1$$

$$\frac{u}{x} = e^{-x} \cdot C_2, \ \forall C_2 \neq 0$$

$$u = C_3 \cdot x \cdot e^{-x}, \ \forall C_3$$

$$C_3 = 1.$$

$u = xe^{-x}$

б) $x - \frac{dv}{dx} \cdot xe^{-x} = 0$

$\frac{dv}{dx} xe^{-x} = x$

$\frac{dv}{dx} = e^{x}$

$dv = e^{x} dx$

$v = e^{x} + \tilde{c}$

$y = u \cdot v = xe^{-x}(e^{x} + \tilde{c}) = x + \tilde{c}xe^{-x}$ Ответ

Ответ $y_{он} = x + \tilde{c}xe^{-x}$, $\forall \tilde{c}$

9.83 $\begin{cases} y' + y\,tg\,x = \frac{1}{\cos x}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$ Задача Коши

$y' + y\,tg\,x = \frac{1}{\cos x}$ ЛНДУ

1) $y' + y\,tg\,x = 0$ ЛОДУ

$\frac{dy}{dx} = -y\,tg\,x$ $\quad y \neq 0$

$\frac{dy}{y} = -tg\,x\,dx$

$\ln|y| = \ln|\cos x| + C, \ \forall C$

$y = \cos x \cdot C_1, \ \forall C_1 \neq 0$

$y_{o.o.} = \cos x \cdot C_2, \ \forall C_2$

2) $y_{o.н} = \cos x \cdot C_2(x)$

$\cos x \cdot C_2' - \cancel{\sin x \cdot C_2} + C_2 \cdot \cancel{\cos x} \cdot \cancel{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x}$

$C_2' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$C_2 = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \ \forall C$

$y_{o.н} = (\operatorname{tg} x + C) \cos x$

Нач. условие $y(0) = 0$.

при $x = 0, \ y = 0$.

$(\operatorname{tg} 0 + C) \cdot \cos 0 = 0$

$(0 + C) \cdot 1 = 0$

$C = 0$

$y_{чн} = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x$ Ответ

Ответ $y_{чн} = \sin x$

9.88 $\quad y' = y\left(y^3\cos x + \operatorname{tg} x\right)$

$y' = y\operatorname{tg} x + y^4\cos x$ Ур-ние Бернулли

$m = 4.$

Замена $z = y^{1-m} = y^{1-4} = y^{-3}$ $\quad y \neq 0$

Цель замены: убрать y^4 т.е свести ур-ние Бернулли к ЛНДУ.

$z = \frac{1}{y^3} \Rightarrow y^3 = \frac{1}{z} \Rightarrow y = z^{-\frac{1}{3}}$

$dy = -\frac{1}{3} z^{-\frac{4}{3}} dz$

$-\frac{1}{3} z^{-\frac{4}{3}} \frac{dz}{dx} = z^{-\frac{1}{3}}\operatorname{tg} x + z^{-\frac{4}{3}}\cos x$

$\frac{dz}{dx} = -3z^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}\operatorname{tg} x - 3z^{-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}}\cos x$

$\frac{dz}{dx} = -3z\operatorname{tg} x - 3\cos x$

$z' + 3z\operatorname{tg} x = -3\cos x$ ЛНДУ

$z' + 3z\operatorname{tg} x = 0$ ЛОДУ

$\frac{dz}{dx} = -3z\operatorname{tg} x$

$\frac{dz}{z} = -3\operatorname{tg} x\, dx \qquad z \neq 0$

$\ln|z| = 3\ln|\cos x| + C, \ \forall C$

$z = \cos^3 x \cdot C, \ \forall C$

$z_{o.o} = \cos^3 x \cdot C$ – общее решение ЛОДУ

$z_{o.н} = \cos^3 x \cdot C(x)$

$\cancel{3\cos^2 x \cdot (-\sin x) \cdot C(x)} \cancel{+ 3\cos^{\cancel{3}\,2} x \cdot C(x) \cdot \frac{\sin x}{\cos x}} +$

$+ \cos^3 x \cdot C'(x) = -3\cos x$

$C'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x}$

$C(x) = -3\int \frac{dx}{\cos^2 x} = -3\,tg\, x + C$

$z_{o.н}(x) = (-3\,tg\, x + C)\cos^3 x =$

$= -3\,\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} \cdot \cos^{\cancel{3}\,2} x + C\cos^3 x =$

$= -3\sin x\cos^2 x + C\cos^3 x$

$z = \frac{1}{y^3} \Rightarrow y^3 = \frac{1}{z}$

$y^3 = \frac{1}{-3\sin x\cos^2 x + C\cos^3 x}$

$y = (-3\sin x\cos^2 x + C\cos^3 x)^{-1/3}$

$y = 0$

Ответ: $y = (-3\sin x\cos^2 x + C\cos^3 x)^{-1/3}$

$y = 0$

991 $y' = \dfrac{x(x^2+y^2-1)}{2y(x^2-1)}$

$$y' = \frac{x^3+xy^2-x}{2y(x^2-1)} = \frac{x(x^2-1)+xy^2}{2y(x^2-1)} =$$

$$= \frac{x}{2y} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2-1}\cdot y$$

$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2-1}y + \frac{x}{2}y^{-1}$ ур-ние Бернулли

$m = -1$

$z = y^{1-m} = y^{1+1} = y^2$

$y = z^{\frac{1}{2}}$

$dy = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$

$$\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{x^2-1}z^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2}\cdot z^{-\frac{1}{2}}$$

$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{x^2-1}z + x$ ЛНДУ

$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{x^2-1}z$ ЛОДУ $\quad z \neq 0$

$$\frac{dz}{z} = \frac{x\,dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{d(x^2-1)}{x^2-1}$$

$\ln|z| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C, \ \forall C$

$|z| = \sqrt{|x^2-1|}\cdot C_1, \ \forall C_1 > 0$

$z = \sqrt{|x^2-1|}\cdot C_2, \ \forall C_2 \neq 0$

$z = \sqrt{|x^2-1|}\cdot C_3, \ \forall C_3$

$z_{oo} = \sqrt{|x^2-1|}\cdot C_3$

$$z_{oн} = \sqrt{|x^2-1|} \cdot C_3(x)$$

$$z'_{o.н} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{|x^2-1|}} \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1) \cdot \cancel{2}x \cdot C_3 +$$

$$+ \sqrt{|x^2-1|} \cdot C_3'(x)$$

$$\cancel{\frac{x \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}} \cdot C_3} + \sqrt{|x^2-1|} \cdot C_3' =$$

$$= \frac{x}{x^2-1} \cdot \sqrt{|x^2-1|} \cdot C_3 + x =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}} \cdot \cancel{\frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}} \cdot \cancel{\sqrt{|x^2-1|}} \operatorname{sgn}(x^2-1) C_3 + x$$

$$\sqrt{|x^2-1|} \cdot C_3' = x$$

$$C_3' = \frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

$$C_3 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{|x^2-1|}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x^2-1) \int \frac{d(|x^2-1|)}{\sqrt{|x^2-1|}} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \operatorname{sgn}(x^2-1) \cdot \sqrt{|x^2-1|} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cancel{2}}} + \tilde{C} =$$

$$= \operatorname{sgn}(x^2-1) \cdot \sqrt{|x^2-1|} + \tilde{C}$$

$$z=\left(\operatorname{sgn}(x^2-1)\sqrt{|x^2-1|}+C\right)\sqrt{|x^2-1|}$$

$$y^2=\operatorname{sgn}(x^2-1)\cdot|x^2-1|+C\cdot\sqrt{|x^2-1|}$$

$$y^2=x^2-1+C\sqrt{|x^2-1|}$$

Ответ

Ответ: $y^2=x^2-1+C\sqrt{|x^2-1|}$

9.92 $\quad xy'+y=2x^2y\ln y\,y'$

$$xy'+y-2x^2y\ln y\,y'=0$$

$$\frac{x}{y}y'+1-2x^2\ln y\cdot y'=0$$

$$y'\left(\frac{x}{y}-2x^2\ln y\right)=-1$$

$$y'=-\frac{1}{\frac{x}{y}-2x^2\ln y}$$

$$x'=-\frac{\frac{x}{y}-2x^2\ln y}{1}=$$

$$=2x^2\ln y-\frac{1}{y}x$$ ур-ние Бернулли

$m=2$

$$z=x^{1-m}=x^{1-2}=x^{-1}$$

$$x=\frac{1}{z}$$

$$x'=-\frac{1}{z^2}z'$$

$$-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z} + 2\ln y\cdot\frac{1}{z^2}$$

$$-\frac{dz}{dy} = -\frac{z}{y} + 2\ln y$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} - 2\ln y \quad \text{лнду}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} \quad \text{лоду}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \qquad z \neq 0$$

$$\ln|z| = \ln|y| + c, \ \forall c$$

$$z = y\cdot c, \ \forall c$$

$$z_{oo} = y\cdot c$$

$$z_{oн} = y\cdot c(y)$$

$$z'_{oн} = yc' + c$$

$$yc' + \cancel{c} - \cancel{c} = -2\ln y$$

$$c' = -\frac{2}{y}\ln y$$

$$c = -2\int\frac{1}{y}\ln y\,dy = -2\int \ln y\, d(\ln y) =$$

$$= -\cancel{2}\cdot\frac{\ln^2 y}{\cancel{2}} + \tilde{c}, \ \forall\tilde{c}$$

$$z_{он} = (-\ln^2 y + \tilde{c})\, y = -y \ln^2 y + \tilde{c} y$$

$$\frac{1}{x} = -y \ln^2 y + \tilde{c} y$$

$$x = \frac{1}{-y \ln^2 y + \tilde{c} y}$$

$$-xy \ln^2 y + \tilde{c} x y = 1$$ Ответ

Ответ: $-xy \ln^2 y + \tilde{c} x y = 1.$

9.95
$$\begin{cases} y\,dx + \left(x - \frac{1}{2}x^3 y\right) dy = 0 \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}x^3 y\right) dy = -y\,dx$$

$$\left(x - \frac{1}{2}x^3 y\right) \frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x - \frac{1}{2}x^3 y}$$

$$x' = -\frac{x - \frac{1}{2}x^3 y}{y}$$

$$x' = -\frac{1}{y} x + \frac{1}{2} x^3$$ ур-ние Бернулли

$$m = 3$$

$$z = x^{1-3} = x^{-2}$$

$$x = z^{-\frac{1}{2}}$$

$$x' = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z'$$

$$-\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z' = -\frac{1}{y} z^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dz}{dy} = 2 \cdot \frac{1}{y} z - 1 \quad \text{ЛНДУ}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2z}{y} \quad \text{ЛОДУ}$$

$$\frac{dz}{z} = 2 \frac{dy}{y} \cdot \quad z \neq 0$$

$$\ln|z| = 2 \ln|y| + c, \ \forall c$$

$$z = y^2 \cdot c, \ \forall c$$

$$z_{oo} = y^2 \cdot c$$

$$z_{он} = y^2 \cdot c(y)$$

$$z'_{о.н.} = 2yc + y^2 c'$$

$$\cancel{2yc} + y^2 c' - \cancel{2yc} = -1$$

$$c' = -\frac{1}{y^2}$$

$$c = -\int y^{-2} dy = \frac{1}{y} + \tilde{c}$$

$$z = \left(\frac{1}{y} + \tilde{c}\right) \cdot y^2$$

$$\frac{1}{x^2} = y + cy^2$$

$$x^2 = \frac{1}{y + cy^2}$$ Ответ

Ответ $x^2y + cy^2x^2 = 1$.

Д/З (9.68) $y' = \frac{3y}{x} + x$

$y' - \frac{3y}{x} = x$ ЛНДУ

$y' - \frac{3y}{x} = 0$ ЛОДУ

$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$ $y \neq 0$

$\frac{dy}{y} = 3 \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = 3\ln|x| + c, \forall c$

$|y| = |x|^3 \cdot c, \forall c > 0$

$y = x^3 \cdot c, \forall c$

$y_{oo} = x^3 \cdot c, \forall c$

$y_{o.н} = x^3 \cdot c(x)$

$y_{o н}' = 3x^2 c + x^3 \cdot c'$