Занятие №17

ОДУ высших порядков, основные понятия. Интегрирование уравнений, допускающих понижение порядка.

Опр 1. Дифф. ур-нием высшего порядка наз-ся дифф. ур-ние, имеющее порядок выше первого. Дифф. ур-ние 2-го порядка имеет вид:

$$\boxed{F(x, y, y', y'') = 0} \qquad (1)$$

Дифф. ур-ние 2-го порядка разрешённое относительно старшей производной имеет вид

$$\boxed{y'' = f(x, y, y')} \qquad (2)$$

Дифф. ур-ние n-го порядка имеет вид:

$$\boxed{F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0} \qquad (3)$$

Дифф. ур-ние n-го порядка, разрешён-ное относительно старшей производной имеет вид

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})} \qquad (4)$$

Опр 2: Решением д. у (2) наз-ся ф-ция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке её в уравнение, обращает его в верное тождество.

Опр 3. Общим решением Д.У (2) наз-ся ф-ция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, которая яв-ся решением Д.У $\forall\, C_1, C_2$ и из которой м/о выделить частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

Опр 4. Всякое решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ Д.У (2), полученное из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при конкретных значениях переменных $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$ наз-ся частным решением

Опр 5. Общее решение Д.У (4) наз-ся ф-ция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, которая яв-ся решением Д.У (4) при $\forall\, C_1, C_2, \dots, C_n$ и из которого м/о выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

Интегрирование диф. ур-ний, допускающих понижение порядка

Рассмотрим $\underline{\text{IV}}$ типа уравнений

I тип   Д.У n-го порядка, которое зависит только от x

$$y^{(n)} = f(x).$$

Решение такого Д.У. получается путем n-кратного интегрирования. При этом получается n констант $C_1, C_2, \dots, C_n$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1, \quad \forall C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2, \quad \forall C_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \dots \int dx}_{n-1 \text{ раз}} \int f(x) dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n$$

II тип   ДУ 2-го порядка вида $F(x, y', y'') = 0$ т.е. отсутствует y.

Замена: $\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases} \Rightarrow F(x, p, p') = 0.$

Решение: 1. Решение Д.У $p' = f(x, p)$ Интегрирование.

Отыскание ф-ции $p = \Psi(x, C_1)$

2 Обратная замена

$p(x) = y'(x)$

Снова решаем ДУ 1-го порядка

$y' = \Psi(x, C_1)$.

интегрируем.

Находим ф-цию $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ - общее решение диф. ур-ния 2-го порядка

III тип Диф. ур-ние 2-го порядка

$F(y, y', y'') = 0$.

отсутствует x.

Замена: $\begin{cases} y' = p(y), \\ y'' = p \cdot p' \end{cases} \Rightarrow F(y, p, p \cdot p') = 0$

$y' = \frac{dy}{dx} = p(y)$

$y'' = (y')' = (p(y))' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot p'$

Решение: 1 Решаем диф. ур-ние 1-го порядка вида

$p' = f(y, p)$

Интегрируем.

Получаем ф-цию $p = \Psi(y, C_1)$

(2) Возвращаемся к замене

$y' = p$. Решаем Д.У 1-го порядка

$y' = \Psi(y, C_1)$. Интегрируем.

Находим ф-цию $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ – общее решение Д-У 2-го порядка.

IV тип Д.У вида $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ допускает понижение порядка на единицу в том случае, когда левая часть диф. ур-ния представима в виде производной некоторого диф. выражения порядка $n-1$ т.е.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \left(F_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\right)'$$

Ауд.

~~9.202~~	✓	
~~9.210~~	✓	
9.214	✓	I тип
9.215	✓	II тип
9.216	✓	IV тип
9.229	✓	не нужно
9.239	✓	IV тип
9.247	✓	II тип 3.К
9.251	✓	III тип 3.К
9.273		не нужен

Д/З

~~9.204~~	✓	
~~9.208~~	✓	
9.213	✓	I
9.220	✓	III
9.223	✓	II
9.237	✓	не нужен
9.238	✓	IV
9.248	✓	II 3.К
9.249	✓	3.К
9.271		не нужен

$\cancel{y' = 2a(x-k)}$

$\cancel{y'' = 2a}$

$\cancel{y''' = 0}$ ~~Ответ~~

9.214 $xy''' = 2x+3$ $x \neq 0$

$y''' = 2 + \frac{3}{x}$

I тип. ур-ния допускающего понижение порядка

$y'' = 2x + 3\ln|x| + C_1, \quad \forall C_1$

$y' = \cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}} + 3\int \ln|x|dx + C_1 x + C_2 =$

$= x^2 + 3\int \ln|x|\,dx + C_1 x + C_2, \quad \forall C_2$

$\int \ln|x|\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln|x| \\ du = \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn}x\,dx \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right|$

$= x\ln|x| - \int x\cdot\frac{1}{|x|}\operatorname{sgn}x\,dx =$

$= x\ln|x| - x$

$y' = x^2 + 3x\ln|x| - x + C_1 x + C_2$

$$y = \frac{x^3}{3} + 3\int x \ln|x|\, dx - 3\frac{x^2}{2} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3, \quad \forall c_3.$$

$$\int x \ln|x|\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln|x| \\ du = \frac{1}{x}\operatorname{sgn} x\, dx \\ x\,dx = dv \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn} x\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}x^2$$

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\ln|x| \underline{- \frac{3}{4}x^2} - \frac{3}{2}x^2 \underline{+ c_1\frac{x^2}{2}} +$$

$$+ c_2 x + c_3, \quad \forall c_1, c_2, c_3$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \underbrace{\frac{2c_1 - 3}{4}}_{c_1} x^2 + \frac{3}{2}x^2\ln|x| + c_2 x + c_3 =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + c_1 x^2 + \frac{3}{2}x^2\ln|x| + c_2 x + c_3,$$

Ответ

$$\forall c_1, c_2, c_3.$$

Ответ: $y = \frac{1}{3}x^3 + c_1 x^2 + \frac{3}{2}x^2 \ln|x| + c_2 x + c_3$

9.215 $\quad x^2 y'' = (y')^2$

нет y $\Rightarrow$ Замена: $y' = p(x)$

II тип. ур. доп. пон. пор. $\quad y'' = p'$

$x^2 p' = p^2$ $\quad$ $x \neq 0$

$x^2 \frac{dp}{dx} = p^2$ $\quad$ $p \neq 0 \to y \neq const$

$\frac{dp}{dx} = \frac{p^2}{x^2}$ $\quad$ ур-ние с разделяющимися переменными

$\frac{dp}{p^2} = \frac{dx}{x^2}$

$\int p^{-2} dp = \int x^{-2} dx$

$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{x} + \tilde{C}, \quad \forall \tilde{C}$

$\frac{1}{p} = \frac{1}{x} + c_1, \quad \forall c_1$

$p = \frac{1}{\frac{1}{x} + c_1}$

$p = \frac{x}{1 + c_1 x}$ — общее решение

$y' = \frac{x}{1 + c_1 x}$

Пусть $c_1 \neq 0$, тогда

$$y' = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{c_1 x}{1 + c_1 x} = \frac{1 + c_1 x - 1}{1 + c_1 x} \cdot \frac{1}{c_1} =$$

$$= \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1} \cdot \frac{1}{1 + c_1 x}$$

$$dy = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1} \cdot \frac{1}{1 + c_1 x} \right) dx$$

$$y = \frac{1}{c_1} x - \frac{1}{c_1} \cdot \int \frac{dx}{1 + c_1 x} = \frac{1}{c_1} x - \frac{1}{c_1^2} \ln |1 + c_1 x| +$$

$$+ c_2, \quad \forall c_2$$ ответ

Если $c_1 = 0$, тогда

$$y' = x$$

$$dy = x\,dx$$

$$y = \frac{1}{2} x^2 + c_2, \quad \forall c_2$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = const \end{array} \right\}$$

потерянные решения

Ответ: $y = \frac{1}{c_1} x - \frac{1}{c_1^2} \ln |1 + c_1 x| + c_2$,

$\forall c_1 \neq 0, \ \forall c_2$

$y = \frac{1}{2}x^2 + c_2$, $\forall c_2$, $c_1 = 0$.

9.216 $y'' - 2yy' = 0$

$y'' = 2yy' = (y^2)'$

IV тип. ур. доп. пон. пор.

$y' = y^2 + c_1$, $\forall c_1$

$\frac{dy}{dx} = y^2 + c_1$

$\frac{dy}{y^2 + c_1} = dx$

1) $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $\frac{dy}{y^2} = dx$

$-\frac{1}{y} = x + c_2$

$y = -\frac{1}{x + c_2}$ решение

$y = 0$ решение

2) $c_1 > 0$, $c_1 = c_2^2$

$\frac{dy}{y^2 + c_2^2} = dx$

$\frac{1}{c_2} \operatorname{arctg} \frac{y}{c_2} = x + c_3$, $\forall c_3$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{C_2} = C_2x + C_2 \cdot C_3 = C_2x + C_4, \quad \forall C_4$$

$$\frac{y}{C_2} = \operatorname{tg}(C_2x + C_4)$$

$$y = C_2 \operatorname{tg}(C_2x + C_4)$$ Ответ

3) $C_1 < 0$

$$C_1 = -C_5, \quad \forall C_5 > 0$$

$$C_5 = C_6^2, \quad \forall C_6 \neq 0$$

$$\frac{dy}{y^2 - C_6^2} = dx$$

$$\frac{1}{2C_6}\ln\left|\frac{y - C_6}{y + C_6}\right| = x + C_7, \quad \forall C_7$$

$$\ln\left|\frac{y - C_6}{y + C_6}\right| = 2C_6x + C_7 = C_8x + C_7, \quad \forall C_8$$ Ответ

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -\dfrac{1}{x + C_2} \\ y = C_2 \operatorname{tg}(C_2x + C_4) \\ \ln\left|\dfrac{y - C_6}{y + C_6}\right| = C_8x + C_7 \end{array}\right.$$

9229 $\quad y''' = y''^2$

нет x, нет y, нет y' — Аналог II типа диф. ур. доп. пон порядка.

Замена: $\begin{cases} y'' = p(x) \\ y''' = \dfrac{dp}{dx} = p' \end{cases}$

$\dfrac{dp}{dx} = p^2$ $\qquad p \neq 0 \Rightarrow y'' \neq 0$

$\dfrac{dp}{p^2} = dx$ $\qquad y' \neq const \neq c_1$

$\qquad y \neq c_1 x + c_2$

$-\dfrac{1}{p} = x + C, \quad \forall C$

$p = -\dfrac{1}{x+C}$

$y'' = -\dfrac{1}{x+C}$

$y' = -\ln|x+C| + k_1, \quad \forall k_1$

$y = -\int \ln|x+C|\,dx + k_1 x + k_2, \quad \forall k_2$

$$\int \ln|x+c|\,dx = \left| \begin{array}{l} \ln|x+c| = u \\ du = \dfrac{1}{x+c}\cdot \operatorname{sgn}(x+c)\,dx \\ dx = dv \\ v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\ln|x+c| - \int \frac{x}{x+c}\operatorname{sgn}(x+c)\,dx =$$

$$= x \ln|x+c| - \int \frac{x}{x+c}\,dx =$$

$$= x \ln|x+c| - \int \frac{x+c-c}{x+c}\,dx =$$

$$= x \ln|x+c| - \int dx + c\int \frac{dx}{x+c} =$$

$$= x\ln|x+c| + c\ln|x+c| - x$$

$$y = -x\ln|x+c| - c\ln|x+c| + x + k_1 x + k_2 =$$

$$= -x\ln|x+c| - c\ln|x+c| + (1+k_1)x + k_2$$

Ответ

Ответ: $y = -x\ln|x+c| - c\ln|x+c| + (1+k_1)x +$
$+k_2$

9.239 $\quad y'' = \dfrac{y - xy'}{x^2} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)'$ $\quad$ ОДЗ $x \neq 0$.

$y' = -\dfrac{y}{x} + c_1, \quad \forall c_1$

$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = c_1$ $\quad$ ЛНДУ

$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 0$ $\quad$ ЛОДУ

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ $\quad y \neq 0$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_2, \ \forall C_2$$

$$y = \frac{C_2}{x}, \ \forall C_2 \neq 0.$$

$$y = \frac{C_2}{x}, \ \forall C_2.$$

$$y_{о.о} = \frac{C_2}{x}$$

$$y_{о.н} = \frac{C_2(x)}{x}$$

$$y'_{о.н} = \frac{C_2' x - C_2}{x^2}$$

$$\frac{C_2'}{x} - \cancel{\frac{C_2}{x^2}} + \cancel{\frac{C_2}{x^2}} = C_1$$

$$C_2' = C_1 x$$

$$C_2 = C_1 \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$y_{о.н} = \frac{C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3}{x} = \frac{C_1}{2} x + \frac{C_3}{x} =$$

$$= C_4 x + \frac{C_3}{x}$$ Ответ.

Ответ: $y = C_4 x + \frac{C_3}{x}$

9.247 $\begin{cases} y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}, \\ y(2) = 0, \\ y'(2) = 4. \end{cases}$

Задача Коши

О.Д.З.
$x \neq 0$
$y \neq const$

нет y $\Rightarrow$ Замена: $\begin{cases} y' = p(x) \\ y' = p' \end{cases}$

$p' = \dfrac{p}{x} + \dfrac{x^2}{p}$ ур-ние Бернулли

$m = -1$

$z = p^{1-m} = p^2$

$p = z^{\frac{1}{2}}$

$dp = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz}{dx} = \frac{1}{x} z^{\frac{1}{2}} + x^2 \cdot z^{-\frac{1}{2}}$$

$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2}{x} z + 2x^2$ ЛНДУ

$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2z}{x}$ ЛОДУ

$z = 0$

$\dfrac{dz}{z} = 2 \dfrac{dx}{x}$ ур-ние с разд. пер.

$\ln|z| = 2 \ln|x| + c, \ \forall c$

$z = x^2 \cdot c, \ \forall c \neq 0$

$z = x^2 \cdot C, \quad \forall C$

$z_{o.o} = x^2 \cdot C$

$z_{o.н} = x^2 \cdot C(x)$

$\cancel{2x \cdot C} + x^2 C' - \frac{2}{\cancel{x}} \cancel{x^2} \cdot C = 2x^2$

$x^2 C' = 2x^2$

$C' = 2$

$C = 2x + C_1, \quad \forall C_1$

$z_{o.н} = x^2 \cdot (2x + C_1), \quad \forall C_1$

$p^2 = x^2 (2x + C_1)$

$p = \left(x^2(2x + C_1)\right)^{1/2}$

$y' = x\sqrt{2x + C_1}$

$$y = \int x\sqrt{2x + C_1}\,dx = \left| \begin{aligned} &\sqrt{2x + C_1} = t \\ &2x + C_1 = t^2 \\ &2x = t^2 - C_1 \\ &x = \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{C_1}{2} \\ &dx = \tfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}t\,dt = \\ &= t\,dt \end{aligned} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{C_1}{2}\right) t^2\,dt = \frac{1}{2}\int t^4\,dt - $$

$$- \frac{C_1}{2}\int t^2\,dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} - \frac{C_1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} =$$

$$= \frac{t^5}{10} - \frac{c_1}{6} t^3 = \frac{1}{10} (2x+c_1)^2 \sqrt{2x+c_1} -$$

$$- \frac{c_1}{6} (2x+c_1) \sqrt{2x+c_1} = (2x+c_1) \sqrt{2x+c_1} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{10} (2x+c_1) - \frac{c_1}{6} \right) + c_2 =$$

$$= (2x+c_1) \sqrt{2x+c_1} \cdot \frac{6x+3c_1-5c_1}{30} + c_2 =$$

$$= (2x+c_1) \sqrt{2x+c_1} \cdot \frac{6x-2c_1}{30} + c_2 =$$

$$= \frac{2}{30} (2x+c_1) \sqrt{2x+c_1} (3x-c_1) + c_2 =$$

$$= \frac{1}{15} (2x+c_1) \sqrt{2x+c_1} (3x-c_1) + c_2$$

общее решение

Начальные условия:

$y(2) = 0$

$$y(2) = \frac{1}{15} (4+c_1) \sqrt{4+c_1} (6-c_1) + c_2 = 0$$

$$\frac{1}{15} (4+c_1)^{3/2} (6-c_1) + c_2 = 0$$

$y'(2) = 4$

$y'(x) = x \sqrt{2x+c_1}$

$y'(2) = 2 \sqrt{4+c_1} = 4$

$$\sqrt{4+C_1} = 2$$
$$4 + C_1 = 4$$
$$C_1 = 0$$

$$\frac{1}{15}\sqrt{4^3}\cdot 6 + C_2 = 0$$

$$\frac{1}{15}\cdot\left(2^6\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 6 + C_2 = 0$$

$$\frac{1}{\cancel{15}_{5}}\cdot 2^3\cdot \cancel{6}^{2} + C_2 = 0$$

$$\frac{2^4}{5} + C_2 = 0$$

$$C_2 = -\frac{16}{5}$$

$$y = \frac{1}{15}\,2x\cdot\sqrt{2x}\cdot 3x - \frac{16}{15} =$$

$$= \frac{1}{15}\left(6x^2\sqrt{2x} - 16\right)$$ – частное решение.

Ответ: $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{15}$ Ответ

9.251
$$\begin{cases} \frac{y''}{y'} = \frac{2yy'}{1+y^2}, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$ Задача Коши.

нет x => Замена: $y' = p(y)$

$y'' = p \cdot p'$

$$\frac{\cancel{p} \cdot p'}{\cancel{p}} = \frac{2yp}{1+y^2}$$

$$p' = \frac{2yp}{1+y^2}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{2y}{1+y^2} dy \qquad p \neq 0$$

$$\ln|p| = \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2}$$

$$\ln|p| = \ln|1+y^2| + c_1, \ \forall c_1$$

$$p = (1+y^2) \cdot c_1, \ \forall c_1 \neq 0$$

$$p = c_1 \cdot (1+y^2)$$

$$y' = c_1 \cdot (1+y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \cdot (1+y^2)$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = c_1 dx$$

$$\operatorname{arctg} y = c_1 x + c_2, \ \forall c_2$$

$y = tg\,(c_1 x + c_2)$ – общее решение

$tg\,(c_1 \cdot 0 + c_2) = 0$

$tg\, c_2 = 0$

$c_2 = 0$

$$y' = \frac{1}{1 + (c_1 x + c_2)^2} \cdot c_1$$

$c_2 = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + (c_1 x)^2} \cdot c_1$

при $x = 0 \Rightarrow y' = c_1 = 1$

$y = tg\, x$ – частное решение

Ответ: $y = tg\, x$. Ответ