Модуль 2

Дифференциальные уравнения

Занятие 15

ОДУ 1-го порядка, его решение. Геометрическое решение ОДУ 1-го порядка. Метод изоклин. Интегрирование ОДУ с разделяющимися переменными и однородных диф. ур-ний.

Опр 1. ОДУ 1-го порядка наз-ся ур-ние, которое зависит от одной переменной x, неизвестной ф-ции $y(x)$ и её производной y'.

$$F(x, y, y') = 0.$$

Опр 2. ОДУ 1-го порядка разрешённым относительно старшей производной (т.е первой производной) наз-ся уравнение вида

$$y' = f(x, y)$$

Опр 3. Решением ОДУ 1-го порядка наз-ся ф-ция $y = \varphi(x)$ такая, что после подстановки её и её производной в диф. ур-ние получаем верное тождество.

Опр 4. Если решение ОДУ найдено в неявном виде, то оно наз-ся общим интегралом диф. ур-ния $\Phi(x, y, C) = 0$

Опр 5. Порядком диф. ур-ния наз-ся порядок максимальной производной, входящей в это диф. уравнение.

Опр 6. Изоклиной ур-ния $y' = f(x, y)$ наз-ся всякая кривая $f(x, y) = k$ при фиксированном k.

Геометрический метод решения ОДУ 1-го порядка или метод изоклин показывает как можно восстановить график решения (т. е интегральную кривую) по направлению касательных.

ДУ 1-го порядка

с разделяющимися переменными

$y' = f(x, y)$

$f_1(x) g_1(y) dx + f_2(x) g_2(y) dy = 0$

Метод решение: разделение переменных

однородные уравнения

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$

$f\left(\frac{y}{x}\right) = y'$

Метод решения: замена $\frac{y}{x} = u(x)$

$y = u(x) \cdot x$

$y' = u'x + u$

Ауд. ~~9.1~~
~~9.4~~ } ~~определение~~
~~9.9~~
~~9.18~~ ~~метод изоклин~~ ?

~~$y' = (y - \frac{x}{4})$ метод изоклин~~ ?

9.27
9.30
9.33 } разд. пер.
9.35
9.39
9.44

9.48
9.49 } однородные
9.55

9.64
9.65 } задача Коши

Д/З. ~~9.3~~
~~9.6~~ } ~~определение~~
~~9.12~~
~~9.20~~ ~~метод изоклин~~ ?

~~$y' = -\sqrt{y - 2x}$~~ ~~метод изоклин~~ ?

9.22
9.26
9.28
9.34 } разд. перем.
9.36
9.40
9.45

9.47
9.51 } однородные
9.53

9.66 задача Коши.

Решить диф. ур-ния

9.27 $y'\sqrt{1-x^2} = 1+y^2$

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{1-x^2} = 1+y^2$$

$$\sqrt{1-x^2}\,dy = 1+y^2\,dx$$ ур. с разд. пер.

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$ $x \neq \pm 1$

$$\int\frac{dy}{1+y^2} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\operatorname{arctg} y = \arcsin x + C, \ \forall C$

$\operatorname{arctg} y - \arcsin x = C$

если $x = \pm 1 \Rightarrow$ $0 \cdot dy = 1+y^2 \cdot d(0)$

$0 = 0$

$x = \pm 1$ потерянные решения.

Ответ: $\begin{cases} \operatorname{arctg} y - \arcsin x = C, \ \forall C \\ x = \pm 1. \end{cases}$

9.30 $(1+y^2)\,x\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$ ур. с разд. пер

$$(1+y^2)\,x\,dx = -(1+x^2)\,dy$$

$$x\,dx = -\frac{1+x^2}{1+y^2}\,dy$$

$$\frac{x}{1+x^2}\,dx = -\frac{dy}{1+y^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = -\int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$-\operatorname{arctg} y = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c, \ \forall c$$

$$\operatorname{arctg} y = -\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \tilde{c}, \ \forall \tilde{c}$$

$$\operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| = \tilde{c}, \ \forall \tilde{c}$$

Ответ: $\operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| = \tilde{c}, \ \forall \tilde{c}$

О.Д.З.

$\cos y \neq 0$

9.33 $\quad 2e^x \operatorname{tg} y\,dx + (1+e^x)\sec^2 y\,dy = 0$ $\quad y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in$

$(1+e^x)\sec^2 y\,dy = -2e^x \operatorname{tg} y\,dx$ $\quad$ ур. с разд. пер.

$$\sec^2 y\,dy = -\frac{2e^x}{1+e^x}\operatorname{tg} y\,dx$$

$\operatorname{tg} y \neq 0$

$$\frac{d(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y} = -2\,\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}$$

$y \neq \pi n,\ n \in$

$$\ln|\operatorname{tg} y| = -2\ln|e^x+1| + c, \ \forall c$$

$$\ln|\operatorname{tg} y| + 2\ln|e^x+1| = c$$

$$\ln|\operatorname{tg} y\cdot(e^x+1)^2| = c$$

$$|\operatorname{tg} y\cdot(e^x+1)^2| = e^c = c_1, \ \forall c_1 > 0$$

$$\operatorname{tg} y\cdot(e^x+1)^2 = c_2, \ \forall c_2 \neq 0.$$

Доп. реш.: $(1+e^x)\cdot\sec^2 \pi n\cdot 0 = -2e^x \underbrace{\operatorname{tg} \pi n}_{=0}\cdot dx$

$$0 = 0.$$

$$\operatorname{tg} y \cdot (1+e^x)^2 = C, \ \forall C.$$

Ответ: $\operatorname{tg} y \cdot (1+e^x)^2 = C$.

9.35 $(1+x^2)dy + y\sqrt{1+x^2}\,dx - xy\,dx = 0$

$$(1+x^2)dy + y(\sqrt{1-x^2} - x)dx = 0$$

$$(1+x^2)dy = -y(\sqrt{1-x^2} - x)dx \quad \text{ур-ние с разд. пер.}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\sqrt{1+x^2} - x}{1+x^2}dx = \quad y \neq 0.$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= -\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$\ln|y| = -\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right| + C, \ \forall C$$

$$|y| = \left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right|\cdot C, \ \forall C > 0$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+\sqrt{1+x^2}|}\cdot C, \ \forall C \neq 0$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+\sqrt{1+x^2}|}\cdot C, \ \forall C$$

Ответ: $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x+\sqrt{1+x^2}|}\cdot C, \quad \forall C$

9.39 $\quad y' = (4x+y+1)^2$

$4x+y+1 = z$

$y = z - 4x - 1$

$y' = z' - 4$

$z' - 4 = z^2$

$\dfrac{dz}{dx} = z^2 + 4$

$\dfrac{dz}{z^2+4} = dx$

$\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{z}{2} = \ln|x| + c, \quad \forall c$

$\operatorname{arctg}\dfrac{z}{2} = 2\ln|x| + \tilde{c}, \quad \forall \tilde{c}$

$\dfrac{z}{2} = \operatorname{tg}(2\ln|x| + \tilde{c})$

$z = 2\operatorname{tg}(2\ln|x| + \tilde{c})$

$4x+y+1 = 2\operatorname{tg}(2\ln|x| + \tilde{c})$

$y = 2\operatorname{tg}(2\ln|x| + \tilde{c}) - 4x - 1, \quad \forall \tilde{c}$

Ответ: $y = 2\operatorname{tg}(2\ln|x| + \tilde{c}) - 4x - 1, \quad \forall \tilde{c}$

9.44 $\begin{cases}(xy^2+x)\,dy+(x^2y-y)\,dx=0, \\ y(1)=1\end{cases}$ задача Коши

$x(y^2+1)\,dy+y(x^2-1)\,dx=0$ ур-ние с разд. пер.

$x(y^2+1)\,dy=-y(x^2-1)\,dx$

$\frac{y^2+1}{y}\,dy=-\frac{x^2-1}{x}\,dx$ $\quad x\neq 0$, $y\neq 0$.

$\left(y+\frac{1}{y}\right)dy=\left(\frac{1}{x}-x\right)dx$

$\ln|y|+\frac{y^2}{2}=\ln|x|-\frac{x^2}{2}+C, \forall C.$

$\ln|y|-\ln|x|=-\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+C$

$\ln\left|\frac{y}{x}\right|=-\frac{y^2+x^2}{2}+C$

$\begin{cases}\ln\left|\frac{y}{x}\right|+\frac{y^2+x^2}{2}=C \\ x=0, \quad y=0\end{cases}$ общее решение

при $x=1$, $y=1$

$\ln\left|\frac{1}{1}\right|+\frac{1+1}{2}=C$

$0+1=C \Rightarrow C=1$

$\ln\left|\frac{y}{x}\right|+\frac{y^2+x^2}{2}=1$ частный интеграл

Ответ: $\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{y^2+x^2}{2} = 1$. частное решение

9.48 $y' = \frac{x-y}{x+y}$

$y' = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$ $x \neq 0$.

$\frac{y}{x} = u$

$y = u(x) \cdot x$

$y' = u'x + u$

$u'x + u = \frac{1-u}{1+u}$

$(u'x+u)(1+u) = 1-u$

$u'x + u'xu + u + u^2 - 1 + u = 0$

$u'x(1+u) = -u^2 - 2u + 1$

$x(1+u)\frac{du}{dx} = -u^2 - 2u + 1$ $-u^2-2u+1 \neq 0$

$\frac{1+u}{-u^2-2u+1}du = \frac{dx}{x}$

$\frac{-\frac{1}{2}(-2u-2)du}{-u^2-2u+1} = \frac{dx}{x}$

$-\frac{1}{2} \cdot \frac{d(-u^2-2u+1)}{-u^2-2u+1} = \frac{dx}{x}$

$$-\frac{1}{2}\ln|-u^2-2u+1| = \ln|x| + C, \ \forall C$$

$$-\frac{1}{2}\ln|-u^2-2u+1| - \ln|x| = C$$

$$\frac{1}{2}\ln|-u^2-2u+1| + \ln|x| = C$$

$$\ln|-u^2-2u+1|^{1/2} + \ln|x| = C$$

$$\ln\left|x\cdot\sqrt{-\frac{y^2}{x^2}-2\frac{y}{x}+1}\right| = C$$

$$\ln\left|x\cdot\sqrt{\frac{-y^2-2yx+x^2}{x^2}}\right| = C$$

$$\ln\sqrt{-y^2-2yx+x^2} = C$$

$x=0,\ y=0$ — потер. решение.

$$0\cdot d0 = \frac{0-0}{0+0}$$

Ответ: $\ln\sqrt{-y^2-2xy+x^2} = C, \ \forall C$

$x=0,\ y=0.$

9.49 $\quad (x^2+xy)y' = x\sqrt{x^2-y^2} + xy + y^2$

$$y' = \frac{x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2}{x(x+y)} =$$ $x\neq 0$

$$= \frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}}$$ однородное

$\frac{y}{x} = u(x)$

$y = u(x) \cdot x$

$y' = u'x + u$

$$u'x + u = \frac{\sqrt{1-u^2} + u + u^2}{1+u}$$

$$(u'x+u)(1+u) = \sqrt{1-u^2} + u + u^2$$

$$u'x + u'xu + \cancel{u} + \cancel{u^2} = \sqrt{1-u^2} + \cancel{u} + \cancel{u^2}$$

$$u'x(1+u) = \sqrt{1-u^2}$$

$$\frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{dx}{x}$$

$1-u^2 \neq 0$

$u^2 \neq 1$

$u \neq \pm 1$

$$-\frac{1}{2}\frac{d(1-u^2)}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$$

$y \neq \pm x$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-u^2}}{\frac{1}{2}} + \arcsin u = \ln|x| + c, \ \forall c$$

$$\arcsin u - \sqrt{1-u^2} = \ln|x| + C$$

$$\arcsin\frac{y}{x} - \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} = \ln|x| + C, \forall C$$ общее решение

$x=0$ потерянное решение.

$y = \pm x$ $\quad (x^2 + x\cdot x)\cdot 1 - x\sqrt{x^2-x^2} + x^2 + x^2$

$2x^2 = 2x^2$

$y = \pm x$ потерянное решение.

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} \arcsin\frac{y}{x} - \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} = \ln|x| + C, \ \forall C \\ y = \pm x \end{array}\right.$

955 $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$ однородное

$x \neq 0$

$\frac{y}{x} = u(x)$

$y' = u(x) \cdot x$

$y' = u'x + u$

$u'x + \cancel{u} = \cancel{u} + \sqrt{1-u^2}$

$$\frac{x\,du}{dx} = \sqrt{1-u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$$ $u \neq \pm 1 \Rightarrow y = \pm x$

$\arcsin u = \ln|x| + C, \ \forall C$

$\arcsin \frac{y}{x} = \ln|x| + C, \ \forall C$

$\frac{y}{x} = \sin(\ln|x| + C) \ \forall C$

$y = x \cdot \sin(\ln|x| + C), \ \forall C$

$x = 0$ не яв-ся пог. реш.

$y = \pm x$ $\quad x \cdot 1 - x = \sqrt{x^2 - x^2}$, если $y = x$

$\quad -x + x = \sqrt{x^2 - x^2}$, если $y = -x$

Ответ: $y = x\sin(\ln|x| + C), \ \forall C$

$y = \pm x$

964 $\begin{cases} xy' = y \ln \frac{y}{x}, \\ y(1) = 1 \end{cases}$ Задача Коши.

О.Д.З. $x \neq 0$, $y > 0$

$x \neq 0$

$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$

$\frac{y}{x} = u(x)$

$u(x) \cdot x = y \Rightarrow y' = u'x + u$

$u'x + u = u \ln u$

$u'x = u \ln u - u = u(\ln u - 1)$

$u \neq e \Rightarrow y \neq xe$

$u \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$

$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$

$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C, \ \forall C$

$\ln\left|\frac{\ln u - 1}{x}\right| = C, \ \forall C$

$\frac{\ln u - 1}{x} = C_1, \ \forall C_1 \neq 0$

$\ln u - 1 = x \cdot C_1$

$\ln u = xC_1 + 1$

$\ln \frac{y}{x} = xC_1 + 1$ общее решение, $\forall C_1 \neq 0$.

если $y = xe$, то $x \cdot e = y \cdot 1 = xe$

$y = xe$ – пот. решение.

$\ln \frac{y}{x} = x \cdot C + 1$, $\forall C$ – окончательный ответ

Начальное условие: $y(1) = 1$

при $x=1$, $y=1$, т.е

$$\ln\frac{1}{1} = 1\cdot C_1 + 1$$

$$0 = C_1 + 1$$

$$C_1 = -1.$$

$\ln\frac{y}{x} = -x + 1$ – частное решение.

Ответ: $y = x e^{-x+1}$

9.65 $\begin{cases} (\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0, \\ y(1) = 1 \end{cases}$ Задача Коши

ОДЗ: $x>0$

$$(\sqrt{xy} - x)\,dy = -y\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{xy} - x}$$

$x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{\frac{y}{x}} - 1}$$ однородное

$$\frac{y}{x} = u(x)$$

$$y = u(x)\cdot x$$

$$y' = u'x + u$$

$$u'x + u = -\frac{u}{\sqrt{u} - 1}$$

$$(\sqrt{u} - 1)(u'x + u) = -u$$

$$\sqrt{u}\,u'x + u\sqrt{u} - u'x - x - \cancel{u} = -\cancel{u}$$

$u'(x\sqrt{u} - x) = -u^{3/2}$

$u'x(\sqrt{u} - 1) = -u^{3/2}$

$\frac{\sqrt{u} - 1}{u\sqrt{u}}\,du = -\frac{dx}{x}$ $\quad u \neq 0$ $\quad y \neq x$

$u > 0 \Rightarrow y > 0$

$\frac{du}{u} - u^{-3/2}\,du = -\frac{dx}{x}$

$\ln|u| - \frac{u^{-1/2}}{-1/2} = -\ln|x| + C, \ \forall C$

$\ln|u| + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{u}} = -\ln|x| + C$

$\ln\left|\frac{y}{x}\right| + 2\sqrt{\frac{x}{y}} = -\ln|x| + C$ – общее решение

$y = x$, то $(x - x)\,dy + y\,dx = 0$

$0 \cdot dy + x \cdot 1 = 0$

$x = 0$.

$x = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

$x = 0$ – пот. решение.

Начальное условие: $y(1) = 1$

при $x = 1$, $y = 1$

$\ln 1 + 2 = -\ln 1 + C \Rightarrow C = 2$

$\ln\left|\frac{y}{x}\right| + 2\sqrt{\frac{x}{y}} = -\ln|x| + 2$ – частное решение

Ответ: $\ln\left|\frac{y}{x}\right| + 2\sqrt{\frac{x}{y}} = -\ln|x| + 2$