Интегрирование ЛНДУ высшего порядка методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа)

Пусть (1) $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, ЛНДУ

(2) $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, ЛОДУ

$y_1(x), y_2(x)$ – два лнз решения ЛОДУ (2)

или ФСР $= \{y_1(x), y_2(x)\}$ ЛОДУ (2) $\Longrightarrow$

тогда $y_{оо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1, C_2 – const

? Как найти $y_{он}$ – ? т.е общее решение ЛНДУ (1)

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа):

1. $y_{он} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$, (3)

$C_1(x), C_2(x)$ – некоторые ф-ции от x

Пока их вид не знаем

2. Система варьируемых переменных

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (4)$$

В результате решения (4) находим $c_1'(x)$ и $c_2'(x)$. Потом $c_1(x)$ и $c_2(x)$ путём интегрирования $c_1'(x)$ и $c_2'(x)$. Подставляем $c_1(x)$, $c_2(x)$ в (3).

Задачи: 9.342
9.344

Д/З. 9.343
9.345

9.342 $\quad y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$ ЛНДУ

$y'' + 3y' + 2y = 0$ ЛОДУ

$k^2 + 3k + 2 = 0$ хар. ур-ние

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1^2$

$k_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2}$

$k_1 = -1, \quad k_2 = -2 \Rightarrow k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$

ФСР ЛОДУ: $= \{ e^{-x}, e^{-2x} \}$

$y_{oo} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ – общее решение ЛОДУ
$c_1, c_2 = const$

$y_{он} = c_1(x) e^{-x} + c_2(x) e^{-2x}$ – вид общего решения ЛНДУ

функции

Система варьируемых переменных:

$$\begin{cases} c_1'(x) e^{-x} + c_2'(x) e^{-2x} = 0 \\ -c_1'(x) e^{-x} - 2c_2'(x) e^{-2x} = \dfrac{1}{e^x+1} \end{cases} \quad \text{" + "}$$

$$-c_2'(x) e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1}$$

$$c_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}$$

$$c_2(x) = -\int \frac{e^x d(e^x)}{e^x+1} = -\int \frac{e^x+1-1}{e^x+1} d(e^x) =$$

$$= -\int d(e^x) + \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = -e^x +$$

$$+ \ln|e^x+1| + \tilde{c}_2, \quad \forall \tilde{c}_2 = const$$

$$c_1' e^{-x} = -c_2' e^{-2x}$$

$$c_1' = -c_2' e^{-x} = \frac{e^{2x}}{e^x+1} \cdot e^{-x} = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$c_1(x) = \int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln|e^x+1| + \tilde{c}_1$$

$\tilde{c}$ - const

Подставляем $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в $y_{он}$:

$$y_{он} = \left(\ln|e^x+1| + \tilde{c}_1\right)e^{-x} + \left(-e^x + \ln|e^x+1| + \tilde{c}_2\right)e^{-2x} = \underbrace{e^{-x}\ln|e^x+1| + e^{-2x}\ln|e^x+1| - e^{-x}}_{y_{чн}} + \underbrace{\tilde{c}_1 e^{-x} + \tilde{c}_2 e^{-2x}}_{y_{оо}}$$

$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$ – верно!

9.344 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$ ЛНДУ

$y'' - 2y' + y = 0$ ЛОДУ

$k^2 - 2k + 1 = 0$ хар-ур.

$(k-1)^2 = 0$.

$k_1 = k_2 = 1$ – корень кратности 2

ФСР ЛОДУ: $= \{e^x, xe^x\}$

$y_{oo} = c_1 e^x + c_2 x e^x$ – общее решение ЛОДУ

c_1, c_2 – const

$y_{oн} = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x$ – вид общего решения ЛНДУ

$c_1(x), c_2(x)$ – некоторые ф-ции от x

Система варьируемых переменных:

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' x e^x = 0, \\ c_1' e^x + c_2' e^x + c_2' x e^x = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases}$$

$$-c_2' \cancel{e^x} = \frac{-\cancel{e^x}}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$c_2' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$c_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + \tilde{c}_2$$

$$\forall \tilde{c}_2 = const$$

$$c_1'(x)\cancel{e^x} = -c_2'(x)\,x\cancel{e^x}$$

$$c_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$c_1(x) = \frac{1}{2}\int\frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{\cancel{\frac{1}{2}}} + c_1 =$$

$$= \sqrt{4-x^2} + \tilde{c}_1, \quad \forall c_1 = const$$

$c_1(x), c_2(x)$ подставляем в вид $y_{он}$:

$$y_{он} = \left(\sqrt{4-x^2} + \tilde{c}_1\right)e^x + \left(\arcsin\frac{x}{2} + \tilde{c}_2\right)xe^x =$$

$$= \underbrace{\tilde{c}_1 e^x + \tilde{c}_2 x e^x}_{y_{оо}} + \underbrace{\sqrt{4-x^2}\cdot e^x + xe^x\arcsin\frac{x}{2}}_{y_{чн}}$$

$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$

Нахождение общего решения ЛНДУ при известном частном решении соответствующего ЛОДУ ($n = 2$)

$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$ ЛНДУ

$p_1(x), p_2(x) \in C([a,b])$

$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ ЛОДУ

y_1 – частное решение ЛОДУ

$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx$ – второе частное решение ЛОДУ

$y_{oo} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ – общее решение ЛОДУ

Решение ЛНДУ находим методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа)

Задачи: ① $x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x}$

$y_1(x) = x$

② $y'' - y' + e^{2x}y = e^{3x}$,

$y_1 = \cos e^x$

③ $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$, ~~4~~/3

$y_1 = \frac{1}{x}$

① $x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x}$

$$y'' + \underbrace{\frac{x}{x^2(1-\ln x)}}_{p_1(x)}y' - \frac{1}{x^2(1-\ln x)}y = \frac{(1-\ln x)^{\cancel{2}}}{x\cdot x^2\cancel{(1-\ln x)}} = \underbrace{\frac{1-\ln x}{x^3}}_{f(x)}$$

$$p_1(x) = \frac{x}{x^2(1-\ln x)} = \frac{1}{x(1-\ln x)}$$

$y_1(x) = x$

$f(x) = \frac{1-\ln x}{x^3}$

$$\boxed{y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx}$$

$$\int p_1(x)\,dx = \int \frac{dx}{x(1-\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{1-\ln x} =$$

$$= -\int \frac{d(1-\ln x)}{1-\ln x} = -\ln|1-\ln x|$$

$$e^{-\int p_1(x)\,dx} = e^{\ln|1-\ln x|} = |1-\ln x|$$

$$y_2 = x \cdot \int \frac{|1-\ln x|\,dx}{x^2} = x \int \frac{\pm(1-\ln x)\,dx}{x^2} =$$

$$= x \cdot \pm 1 \cdot \left[\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx \right] =$$

$$= \pm x \left[-\frac{1}{x} - \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx \right] =$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,dx \\ \frac{1}{x^2}\,dx = dv \\ v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$= \mp 1 \mp \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)x = \mp 1 \pm \ln x \pm 1 =$$

$= \pm \ln x$ – второе частное решение ЛОДУ второго порядка

$$\begin{cases} y_1(x) = x, \\ y_2(x) = \pm \ln x \end{cases}$$

$$y_{oo} = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) = c_1 \cdot x \pm c_2 \ln x =$$

$= c_1 \cdot x + c_3 \ln x$ – общее решение ЛОДУ второго порядка

$y_{он} = c_1(x)\, x + c_3(x) \ln(x)$ – вид общего решения ЛНДУ второго порядка

$$\begin{cases} c_1' x + c_3' \ln x = 0, \\ c_1' \cdot 1 + c_3' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1 - \ln x}{x^3} \end{cases}$$ – система варьируемых переменных

$$\begin{cases} c_1' x + c_3' \ln x = 0, \\ c_1' + c_3' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1 - \ln x}{x^3} \end{cases} \Bigg| \cdot x \quad \text{" – "}$$

$$c_3' \ln x - c_3' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$c_3' \cdot (\ln x - 1) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$C_3' = \frac{1-\ln x}{x^2} \cdot \frac{1}{\ln x - 1} = -\frac{\cancel{1-\ln x}}{\cancel{1-\ln x}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$C_3' = -\frac{1}{x^2}$$

$$C_3 = -\int \frac{dx}{x^2} = \cancel{-\ln x + \tilde{C}_3} = \frac{1}{x} + \tilde{C}_3, \quad \forall \tilde{C}_3 - const$$

$$C_1' x = -C_3' \ln x$$

$$C_1' x = \frac{1}{x^2} \ln x$$

$$C_1' = \frac{1}{x^3} \ln x$$

$$C_1 = \int \frac{\ln x}{x^3} dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{x^3} dx = dv \\ -\frac{1}{2x^2} = v \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \tilde{C}_1$$

$$\forall \tilde{C}_1 - const$$

$$-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \tilde{C}_1 \qquad \frac{1}{x} + \tilde{C}_3$$

$$y_{он} = \left(\cancel{-\frac{\ln x}{x^2}} - \cancel{\frac{1}{x} + \tilde{C}_1} \right) x + \left(-\ln x + \tilde{C}_3 \right) \ln x \; -$$

общее решение ЛНДУ

(2) $y'' - y' + e^{2x} y = e^{3x}$ ЛНДУ

$y_1 = \cos e^x$

$y'' - y' + e^{2x} y = 0$ ЛОДУ

$$\boxed{y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx}$$

$p_1(x) = -1$

$f(x) = e^{3x}$

$$y_2 = \cos e^x \cdot \int \frac{e^{+\int dx}}{\cos^2 e^x} dx =$$

$$= \cos e^x \cdot \int \frac{1}{\cos^2 e^x} \cdot e^x dx = \cos e^x \int \frac{d(e^x)}{\cos^2 e^x} =$$

$$= \cos e^x \cdot \operatorname{tg} e^x = \sin e^x$$ – второе частное решение ЛОДУ.

$y_{oo} = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cos e^x + c_2 \sin e^x$ – общее решение ЛОДУ

$c_1, c_2 - const$

$y_{он} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 = c_1(x) \cos e^x + c_2(x) \sin e^x$ – вид общего решения ЛНДУ

Система варьируемых переменных:

$$\begin{cases} c_1' \cdot \cos e^x + c_2' \cdot \sin e^x = 0, \\ -c_1' \cdot \sin e^x \cdot e^x + c_2' \cdot \cos e^x \cdot e^x = e^{3x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1' \cdot \cos e^x + c_2' \cdot \sin e^x = 0, \\ -c_1' \sin e^x + c_2' \cos e^x = e^{2x} \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot \sin e^x \\ \cdot \cos e^x \end{array} \right. \quad \text{"}+\text{"}$$

$$c_2' \sin^2 e^x + c_2' \cos^2 e^x = e^{2x} \cdot \cos e^x$$

$$c_2' (\sin^2 e^x + \cos^2 e^x) = e^{2x} \cdot \cos e^x$$

$$c_2' = e^{2x} \cdot \cos e^x$$

$$c_2 = \int e^{2x} \cdot \cos e^x dx = \int e^x \cos e^x d(e^x) = |e^x = t|$$

$$= \int t \cos t \, dt = \int t \, d(\sin t) =$$

$$= t \cdot \sin t - \int \sin t \, dt = t \sin t + \cos t + \tilde{c}_2 =$$

$$= e^x \sin e^x + \cos e^x + \tilde{c}_2 \;, \quad \forall \tilde{c}_2 = const$$

$$c_1' = -c_2' \operatorname{tg} e^x = -e^{2x} \cdot \cancel{\cos e^x} \cdot \frac{\sin e^x}{\cancel{\cos e^x}} =$$

$$= -e^{2x} \cdot \sin e^x$$

$$c_1 = -\int e^{2x} \sin e^x dx = -\int e^x \sin e^x d(e^x) =$$

$$= |e^x = t| = -\int t \sin t \, dt =$$

$$= +\int t\, d(\cos t) = t\cos t - \int \cos t\, dt =$$

$$= t\cos t - \sin t + \tilde{c}_1, \quad \forall \tilde{c}_1 = const$$

$$c_1 = e^x \cos e^x - \sin e^x + \tilde{c}_1, \quad \forall \tilde{c}_1 = const$$

$$y_{он} = \Big(\overbrace{e^x \cos e^x - \sin e^x + \tilde{c}_1}^{c_1(x)}\Big)\cos e^x +$$

$$+ \Big(\underbrace{e^x \sin e^x + \cos e^x + \tilde{c}_2}_{c_2(x)}\Big)\sin e^x =$$

$$= \tilde{c}_1 \cos e^x + \tilde{c}_2 \sin e^x + e^x \cos^2 e^x +$$

$$+ e^x \sin^2 e^x \cancel{- \sin e^x \cos e^x} \cancel{+ \cos e^x \sin e^x} =$$

$$= \tilde{c}_1 \cos e^x + \tilde{c}_2 \sin e^x + e^x(\cos^2 e^x + \sin^2 e^x) =$$

$$= \underbrace{\tilde{c}_1 \cos e^x + \tilde{c}_2 \sin e^x}_{y_{оо}} + \underbrace{e^x}_{y_{чн}}$$