Лекция №6, 7

15 марта
22 марта

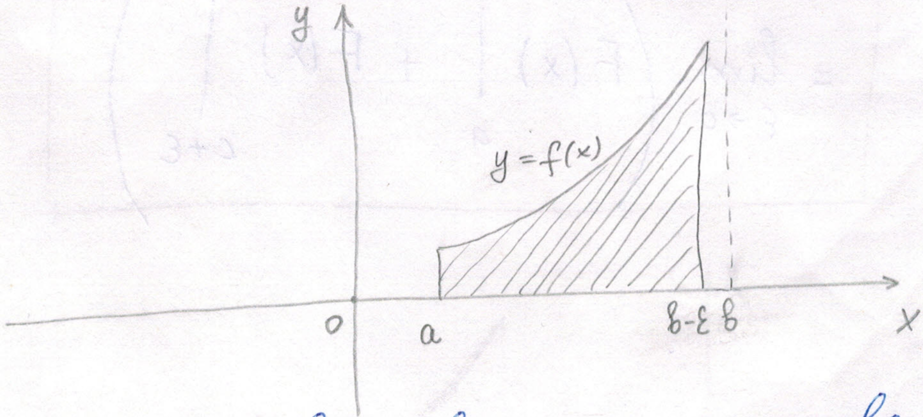
Несобственные интегралы II-го рода

15в Пусть ф-ция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b)$, а в точке b терпит разрыв II-го рода. Тогда

Опр 1: Интеграл наз-ся несобственным интегралом II-го рода, если отрезок интегрирования конечен, а ф-ция терпит разрыв II-го рода.

Опр 2: Несобственным интегралом II-го рода или интегралом от неограниченной ф-ции на интервале $[a, b)$ наз-ся предел

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon}} \quad (1)$$

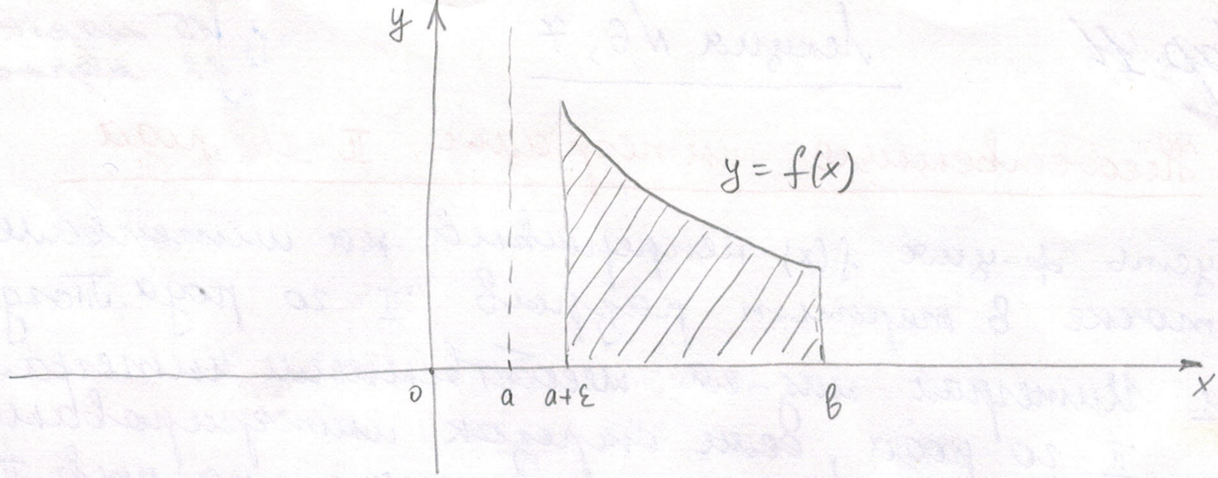


Опр 3: Если предел в правой части равенства (1) $\exists$ и конечен, то несобственный интеграл II-го рода сх-ся; если предела $\nexists$ или он равен ∞, то несобственный интеграл II-го рода расходится.

Аналогично м/о определить следующие несобственные интегралы:

Пусть $x = a$ т.р II-го рода, $f(x) \in C((a, b])$

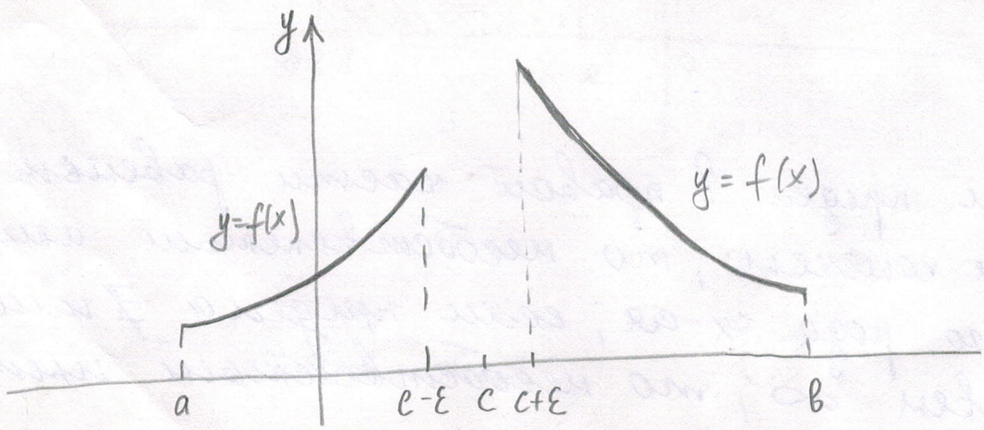
Тогда
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^{b}} \quad (2)$$



Пусть $x = c$ т. р. II-го рода. $c \in (a, b)$, $f(x)$ – непрерывна везде на $[a, b]$ за исключением точки $x = c$.

Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right] = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(F(x)\Big|_a^{c-\varepsilon} + F(x)\Big|_{c+\varepsilon}^{b} \right)} \quad (3)$$



Пусть $x = a$, $x = b$ т. р II-го рода, $f(x) \in C[(a, b)]$

Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}} \quad (4)$$

Опр 4. Пусть $J_1 = \int_a^b f(x)\,dx$ и $J_2 = \int_a^b |f(x)|\,dx$ – два

несобственных интеграла II-го рода.

Тогда 1) Если J_2 – сходится, то J_1 – сходится абсолютно;

2) Если J_1 – сходится, а J_2 – расходится, то J_1 – сходится условно.

Признаки сходимости и расходимости

1 Теорема 1 (признак сравнения по неравенству)

Пусть на $[a, b)$ ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, а в т. $x = b$ ф-ции терпят бесконечный разрыв II-го рода и $0 \le f(x) \le g(x)$.

Тогда: 1) если $\int_a^b g(x)\,dx$ – сходится, то $\int_a^b f(x)\,dx$ также сходится;

2) если $\int_a^b f(x)\,dx$ – расходится, то $\int_a^b g(x)\,dx$ также расходится.

2 Теорема 2 (предельный признак сравнения)

Пусть на $[a, b]$ ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные а в т. $x = b$ терпят бесконечный разрыв II-го рода и $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, тогда если $\exists$ конечный предел отношения $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix}$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3 Теорема 3 (признак абсолютной сходимости)

Если $f(x)$ – знакопеременная ф-ция на $[a, b)$, а в точке $x = b$ она терпит разрыв II-го рода и $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, тогда $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно.

Эталонные интегралы

$$\int_0^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln|x| \Big|_\varepsilon^b \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln|b| - \ln|\varepsilon| \right) = \ln|b| - \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|\varepsilon| =$$

$$= \infty \Rightarrow \int_0^b \frac{dx}{x} \text{ расх-ся}$$

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_\varepsilon^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_\varepsilon^b =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \cdot b^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{при } 1-\alpha > 0 \text{ т.е } \alpha < 1 \\ \infty & \text{при } 1-\alpha < 0 \text{ т.е } \alpha > 1 \end{cases}$$

В итоге
$$\boxed{\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сх-ся при } \alpha < 1, \\ \text{расх-ся при } \alpha \geq 1 \end{cases}}$$

Интеграл Дирихле т.р 2-го рода $x = 0$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{d(b-x)}{(b-x)^\alpha} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\alpha+1}\cdot\frac{1}{-\alpha+1} + \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{-\alpha+1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{-\alpha+1} & \text{при } -\alpha+1>0,\ \alpha<1 \\ \infty & \text{при } -\alpha+1<0,\ \alpha>1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{d(b-x)}{b-x}\cdot(-1) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|b-x|\Big|_a^{b-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\varepsilon| +$$

$$+\ln|b-a| = \infty \Rightarrow \int_a^b\frac{dx}{b-x} - \text{расх-ся.}$$

В итоге: $$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \text{сх-ся при } \alpha<1 \\ \text{расх-ся при } \alpha\geqslant 1 \end{cases}}$$

Интеграл Дирихле т.р 2-го рода $x=b$.

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a-\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a-\varepsilon}^{b} \frac{d(x-a)}{(x-a)^\alpha} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left. \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_{a-\varepsilon}^{b} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1-\alpha} (-\varepsilon)^{1-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{1-\alpha} & \text{при } 1-\alpha > 0,\ \alpha < 1 \\ \infty & \text{при } 1-\alpha < 0,\ \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a-\varepsilon}^{b} \frac{d(x-a)}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|x-a| \Big|_{a-\varepsilon}^{b} =$$

$$= \ln|b-a| - \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|-\varepsilon| = \infty$$

В итоге
$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \text{сх-ся при } \alpha < 1 \\ \text{расх-ся при } \alpha \geq 1 \end{cases}}$$

Интеграл Дирихле т-р 2-го рода $x = a$.