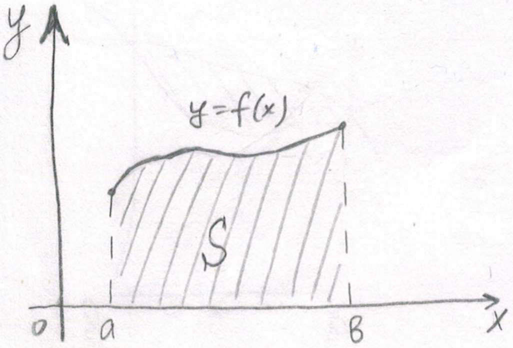
Геометрическое приложение определённого интеграла

16В экз

1 Площадь плоских фигур.

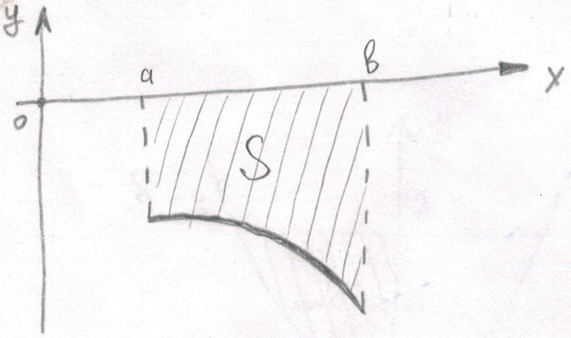
а) Декартовая система координат

– Если $f(x) \in C[a,b]$ и $f(x) \geq 0$, то из геом. смысла опред. интеграла $\Rightarrow$, что S соотв. криволин. трапеции вычисляется по формуле:



$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y(x)\,dx} \quad (1)$$

– Если $f(x) \in C[a,b]$ и $f(x) < 0$, тогда



$$\boxed{S = -\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b y(x)\,dx} \quad (2)$$

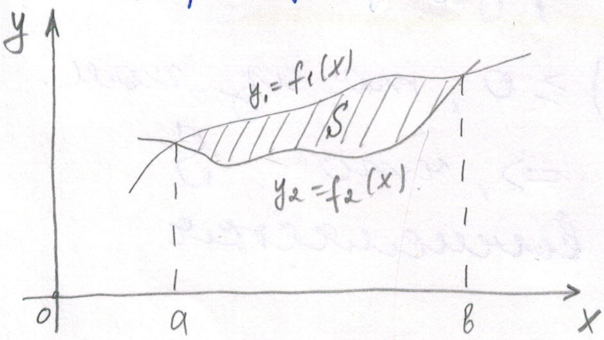
$S > 0$.

Или обобщение 2-х предыдущих ф-ций, т.е если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$ или $f(x) < 0$, то

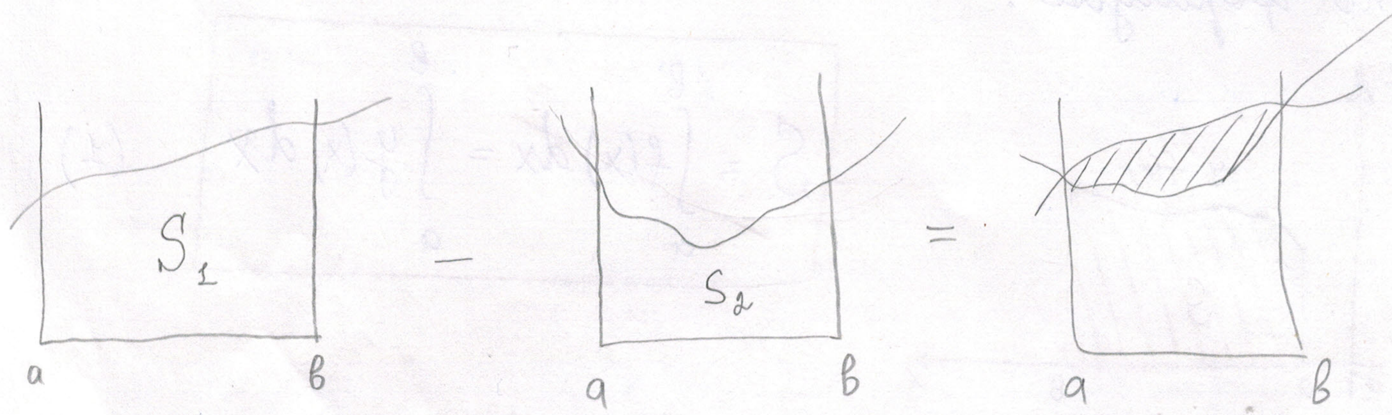
$$\boxed{S = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|} \quad (3)$$

Если плоская геометрическая фигура ограничена и сверху, и снизу графиками непрерывных функций

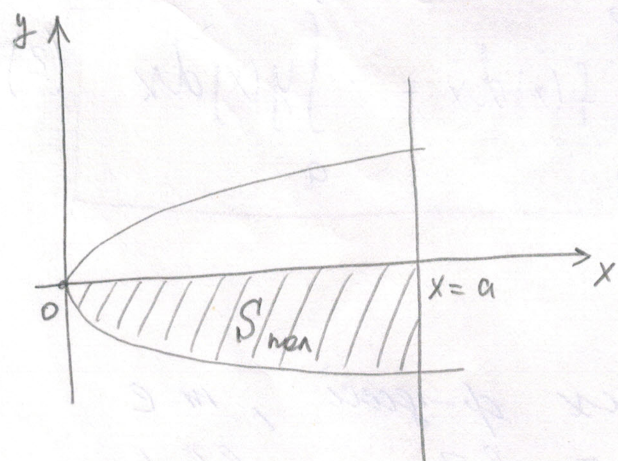
$$\begin{cases} y_1 = f_1(x), \\ y_2 = f_2(x), \end{cases}$$ то площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

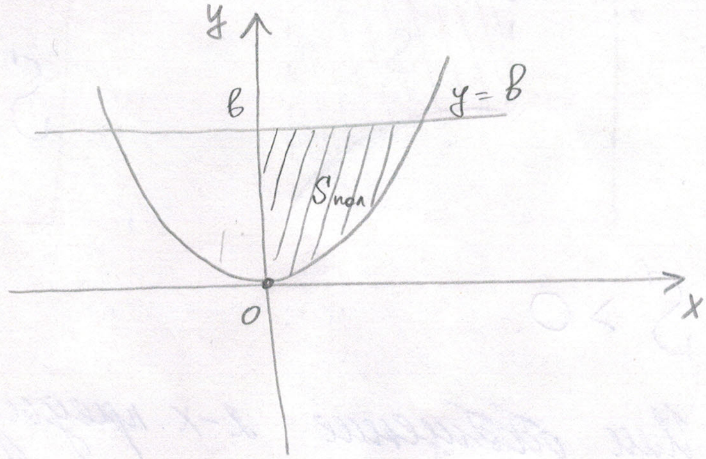


$$\boxed{S = S_1 - S_2 = \int_a^в (y_1 - y_2)\,dx} \quad (4)$$

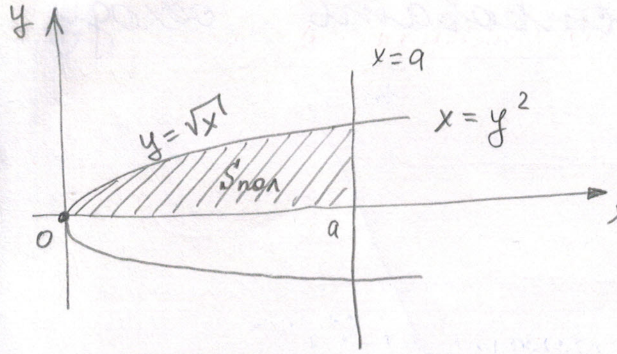


Если фигура симметрична относительно оси Ox или Oy, то $S_ф = 2\,S_{пол}$.





пример: Найти площадь фигуры, ограниченной дугой параболы $x = y^2$ и прямой $x = a$.



$$S_{пол} = \int_0^a y(x)\,dx = \int_0^a \sqrt{x}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^a = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{a^3} = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$$

$$S_ф = 2\,S_{пол} =$$

$$= 2\cdot\frac{2}{3}a\sqrt{a} =$$

$$= \frac{4}{3}a\sqrt{a} \quad \text{Ответ}$$

б) параметрическое задание ф-ции

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где t - параметр $t \in [t_1, t_2]$,

причём $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$, $a < b$

$x'(t) > 0$ на $[t_1, t_2]$, тогда

$$S = \int_a^b y(x)\,dx = \left| \begin{aligned} & y = y(t) \\ & x = x(t) \\ & a \le x \le b \\ & dx = x'(t)\,dt \\ & x(t_1) = a \\ & x(t_2) = b \end{aligned} \right| = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt$$

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt} \quad (5)$$

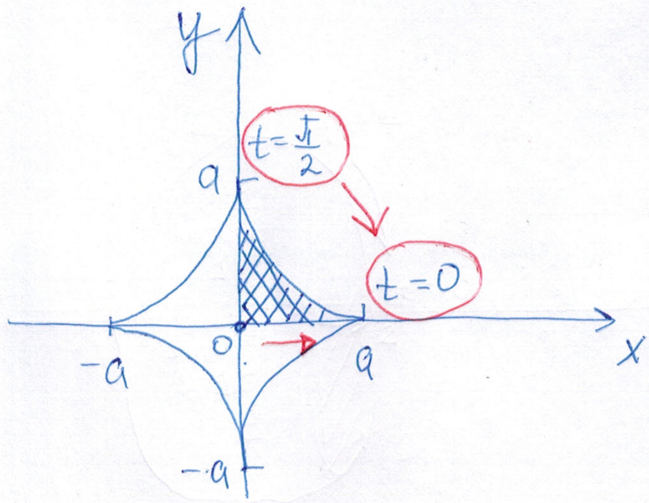
<u>Замечание</u>: Изменение параметра $t \in [t_1, t_2]$ соответствует росту переменной x: от a до b.

пример: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, Астроида

S - ?

Решение:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	a	0	$-a$	0	a
y	0	a	0	$-a$	0



$S = 4S^*$

$$S^* = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \underbrace{a\sin^3 t}_{y} \cdot \underbrace{3a\cos^2 t \cdot (-\sin t)}_{x'} dt$$

$$= 3a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^4 t \, dt = \ldots =$$

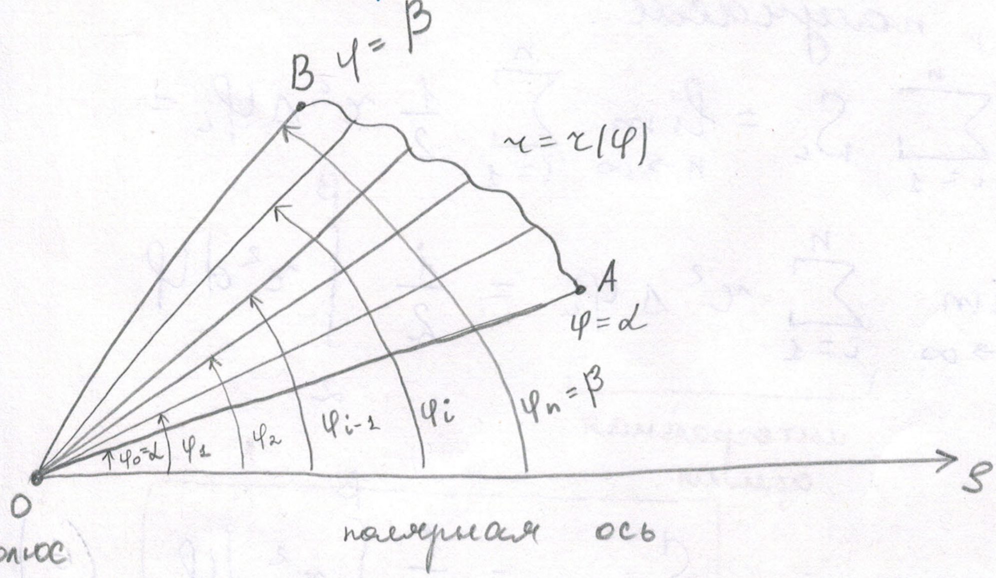
$$= \frac{3\pi a^2}{32}$$

$$S = 4 \cdot \frac{3\pi a^2}{32} = \frac{3\pi}{8} a^2$$ ← Ответ

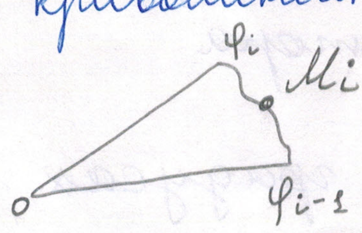
в) полярная система координат

17в экз.

Аналогом криволинейной трапеции в полярной системе координат яв-ся криволинейный сектор, ограниченный лучами $\begin{cases} \varphi=\alpha, \\ \varphi=\beta \end{cases}$ и кривой $r=r(\varphi)$



1. Разобьём сектор AOB на углы лучами $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_{i-1}<\varphi_i<\varphi_{i+1}<\ldots<\varphi_{n-1}<\varphi_n=\beta$
2. Обозначим ч/з $\Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}$ – малые криволинейные сектора, S_i – площадь малого криволинейного сектора. Выберем точки $M_i \in \Delta\varphi_i$ и лежащие на кривой $r=r(\varphi)$.



3. Заменим каждый из малых криволинейных секторов круговым сектором, проведённым ч/з точки M_i

Тогда $S_{\text{крив. сектора малого}} = S_i \approx S_{\text{кругового сектора}} = \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi_i$

4. $$S_{AOB} = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi_i$$

5. Переходим к пределу в последнем соотношении при $n \to \infty$, получаем:

$$S_{AOB} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} S_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi_i =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} r^2 \Delta \varphi_i}_{\text{интегральная сумма}} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$$

В итоге, получаем: $\boxed{S_{\text{фиг}} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi}$ (6)

Замечание: S кругового сектора в радианах:

$\boxed{S = \frac{1}{2} r \Delta \varphi}$, r - радиус круга

$\Delta \varphi$ - длина дуги сектора

S кругового сектора в градусах:

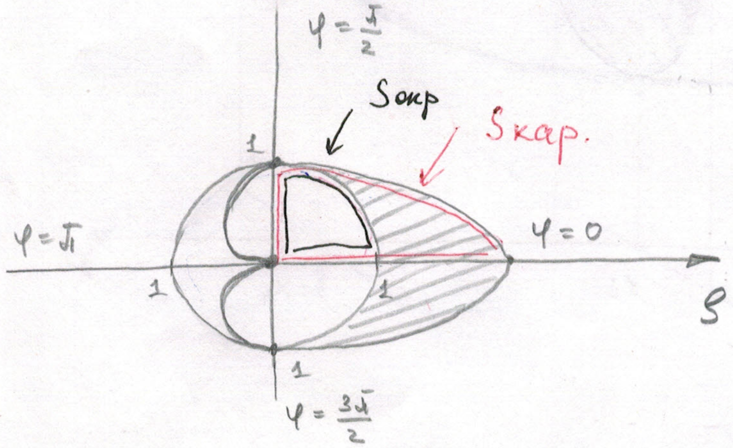
$\boxed{S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha}$, R - радиус круга

α - градусная мера центрального угла.

Пример: Найти S фигуры расположенной вне окружности $r = 1$ и одновременно внутри кардиоиды $r = 1 + \cos\varphi$.

Для начала найдём точки пересечения этих кривых: $\begin{cases} r = 1 \\ r = 1 + \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow$

$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$



φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	2	1	0	1

$$S_{фиг} = 2 S_{пол.}$$

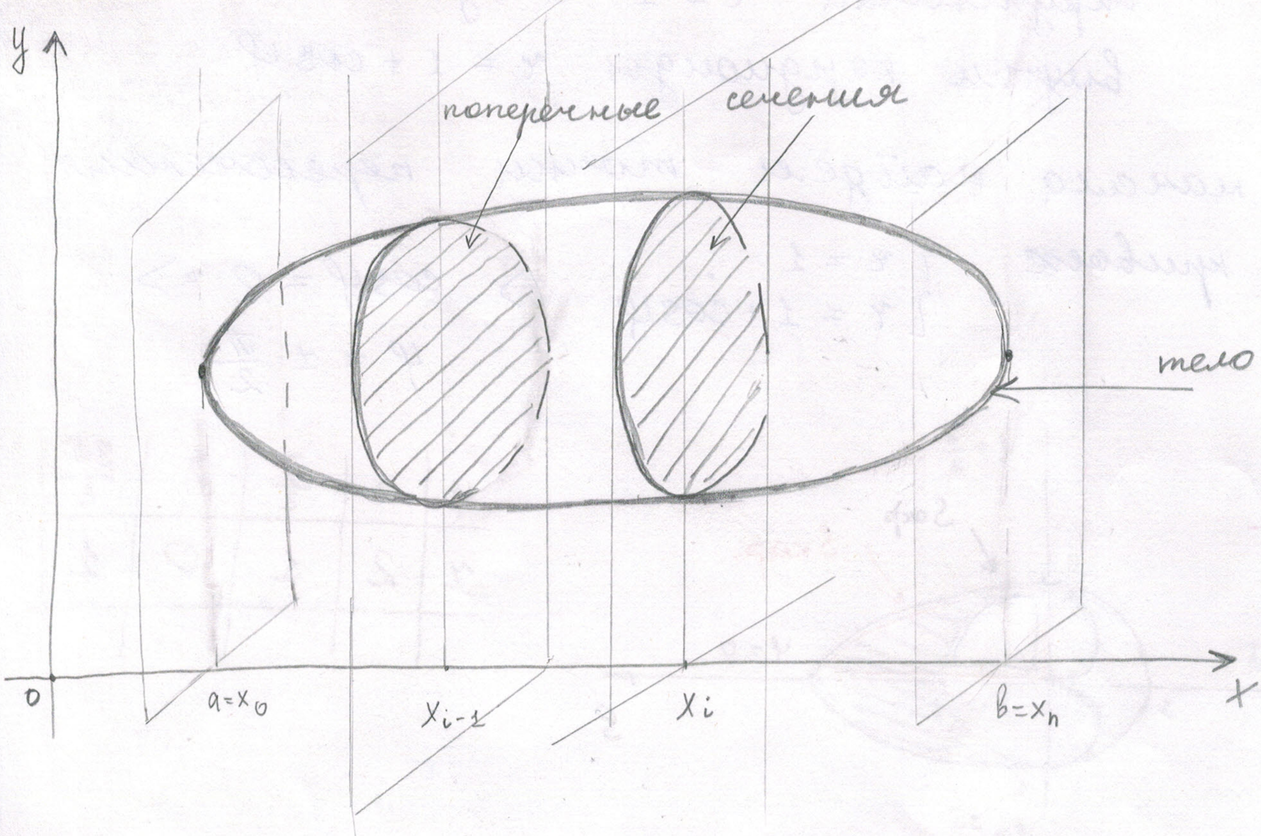
$$S_{пол} = S_{кар} - S_{окр} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2 \cdot d\varphi = \ldots = 1 + \frac{\pi}{8}$$

$$S_{фиг} = 2\left(1 + \frac{\pi}{8}\right) = 2 + \frac{\pi}{4}$$ Ответ

2 Объёмы тел

Пусть T – тело. Известна S – площадь любого сечения этого тела плоскостью перпендикулярной оси Ox, то есть плоскостью поперечного сечения

Это будет ф-ция $S = S(x)$, $a \le x \le b$.

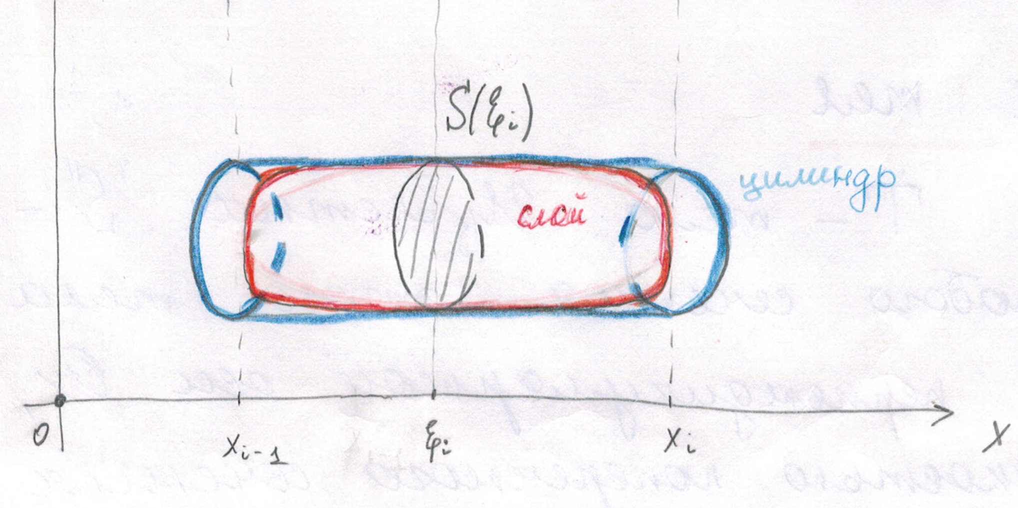


Предположим, что $S = S(x) \in C[a,b]$, тогда

1. проведём поперечные плоскости $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, …, $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, …, $x = x_n = b$.

   Эти плоскости разбивают тело на слои

2. в каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем точку ξ_i и построим цилиндр, т.е тело, образующие которого $\parallel$ оси Ox.



3. Каждый слой тела T заменим прямым цилиндром. Объём такого цилиндра с основанием $S(\xi_i)$ и высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ равен

$$V_{цилиндра} = S(\xi_i)\Delta x_i$$

4. Объём всего тела T в этом случае равен
$$V_{тела} = \sum_{i=1}^{n} V_i \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i ,$$

где V_i - объём i-го слоя, который приближённо равен объёму цилиндра.

5. Переходим в последнем соотношении к пределу, получим
$$V_{тела} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i}_{\text{интегр. сумма}} =$$
$$= \int_a^b S(x)\,dx,$$ где $S(x)$ - это известная площадь поперечного сечения

В итоге получаем: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$ (7)

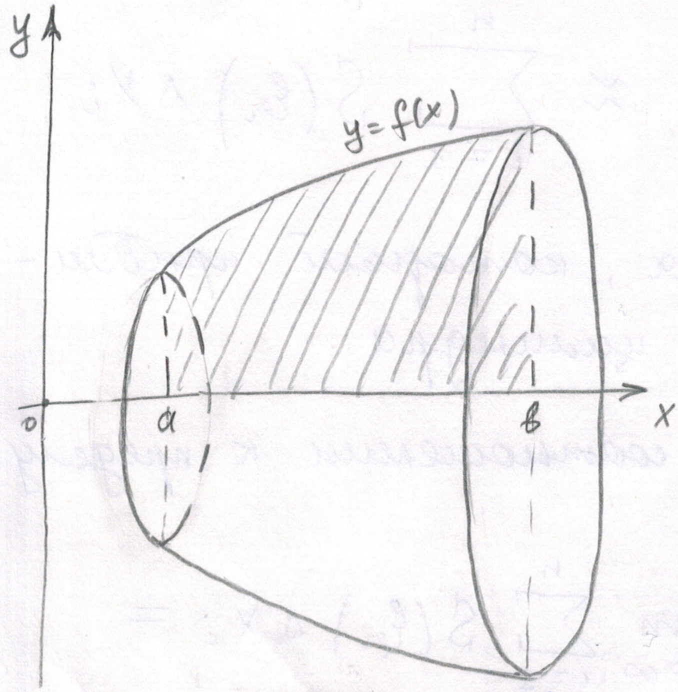
18б экз

3 Тела вращения (объём, площадь поверхности вращения т.е внешняя оболочка)

а) вокруг оси Ox.

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную функцией $y = f(x) > 0$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox. Эту трапецию будем вращать вокруг оси Ox. В этом случае любое произвольное поперечное сечение плоскостью $\perp$ оси Ox есть круг радиусом $y=f(x)$. Площадь поперечного сечения

$$S=\{\pi r^2\}=\pi y^2$$

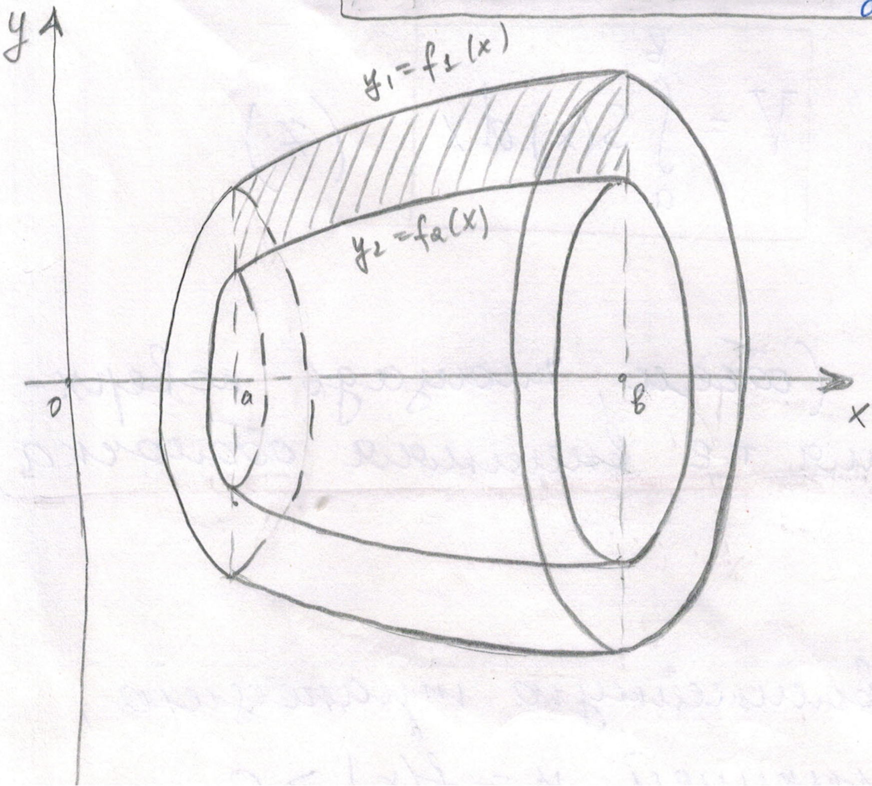


Применяя эту формулу для объёма поперечного сечения, получаем, что

$$\boxed{V_{\substack{\text{тела вр.}\\ Ox}}=\int_a^b \pi y^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx} \quad (8)$$

Объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной двумя кривыми y_1 и y_2 будет равен

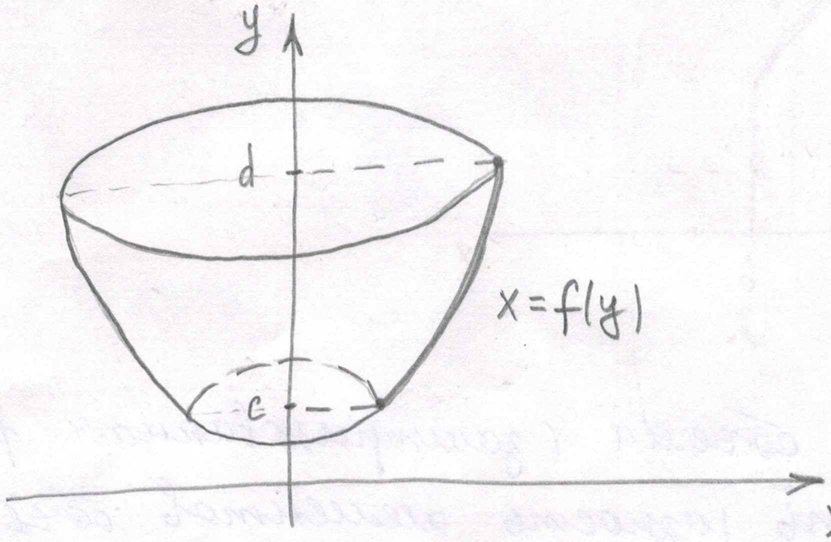
$$\boxed{V_{Ox}=V_1-V_2=\pi\int_a^b (y_1^2-y_2^2)\,dx} \quad (9)$$



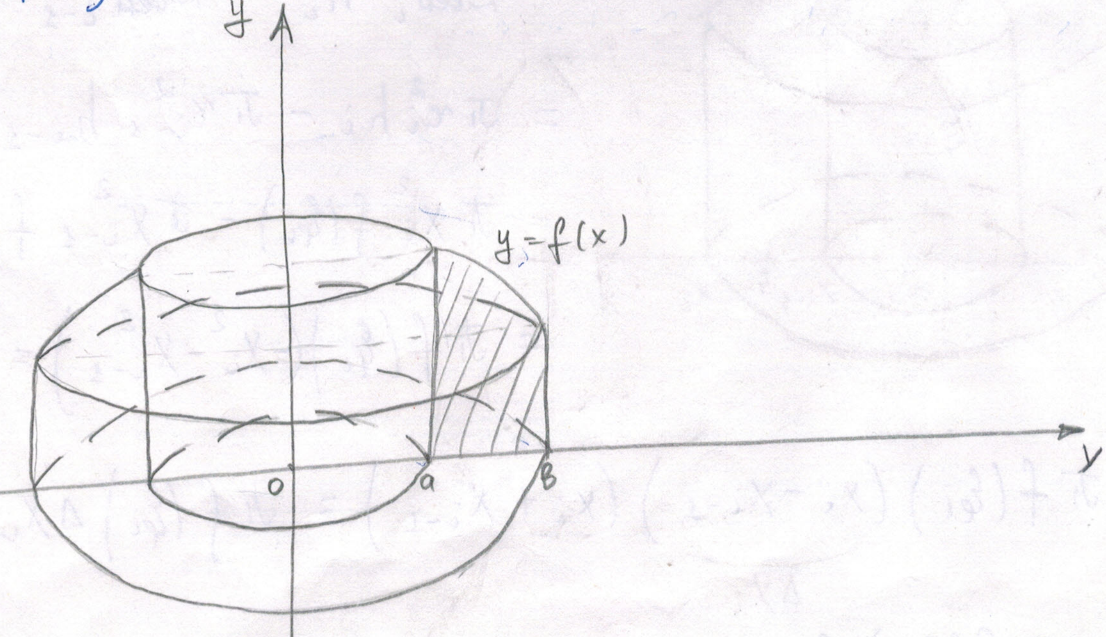
б) вокруг оси Oy.

Пусть криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = f(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$, осью Oy вращается вокруг оси Oy. Тогда по аналогии с формулой (8)

$$\boxed{V_{\substack{т.вр.\\Oy}} = \pi \int_c^d x^2\,dy} \qquad (10)$$



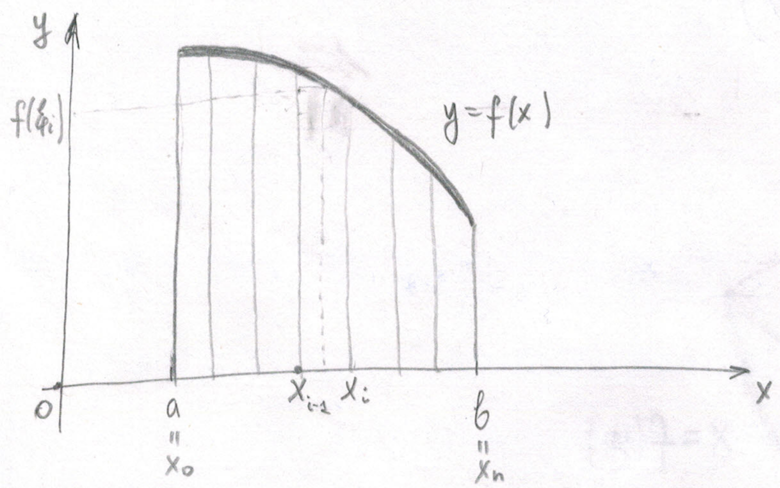
Пусть теперь тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, имеющей основание $[a, b] \in OX$ и ограниченная графиком ф-ции $y = f(x)$.



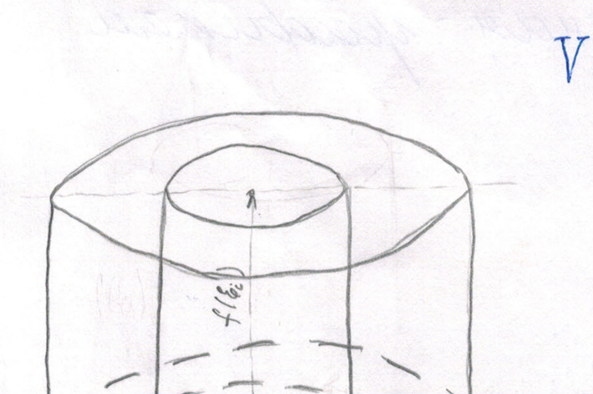
1. Разобьём отрезок $[a, b]$ на n-отрезков след. образом $a = x_0 < x_1 < \dots x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Обозначим ч/з $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

2. В каждом частичном отрезке выберем точку $\xi_i \in \Delta x_i$



3. За элемент объёма (заштрихованная фигура) м/о выбрать разность элементов объёма цилиндров. Объём каждого из цилиндров вычисляется следующим образом



$$V = V_i - V_{i-1} = \Delta V_i =$$

$$= S_{осн_i} h_i - S_{осн_{i-1}} h_{i-1} =$$

$$= \pi r_i^2 h_i - \pi r_{i-1}^2 h_{i-1} =$$

$$= \pi x_i^2 f(\xi_i) - \pi x_{i-1}^2 f(\xi_i) =$$

$$= \pi f(\xi_i)(x_i^2 - x_{i-1}^2) =$$

Обозначим

$$= \pi f(\xi_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i}(x_i + x_{i-1}) = \pi f(\xi_i)\Delta x_i \overbrace{(x_i + x_{i-1})}^{2\xi_i} =$$

$$= 2\pi f(\xi_i)\,\xi_i\,\Delta x_i$$

4. Переходим к пределу в последнем соотношении, получаем:

$$V_{тела} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to\infty} 2\pi \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\xi_i \Delta x_i}_{\text{интегральная сумма}} =$$

$$= 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

В итоге получаем, что $\boxed{V_{Oy} = 2\pi \int_a^b xy\,dx}$ (11) $a>0$!

Замечание: Если $a<0$, то нужно сдвинуть кривую, чтоб $a \geq 0$.

Следствие 1. Если ф-ция $y=f(x)$ задана параметрически, т.е $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $\begin{matrix} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{matrix}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 \leq t \leq t_2$, причём $\left.\begin{array}{l} \begin{cases} a=x(t_1), \\ b=x(t_2), \end{cases} \\ \begin{cases} c=y(t_1), \\ d=y(t_2). \end{cases} \end{array}\right\} (*)$

Тогда

1) $V_{\substack{т.вр \\ Ox}} \overset{(8)}{=} \pi\int_a^b y^2\,dx = (*) = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)\,dt$

2) $V_{\substack{т.вр \\ Oy}} \overset{(10)}{=} \pi\int_c^d x^2\,dy = (*) = \pi\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)y'(t)\,dt$

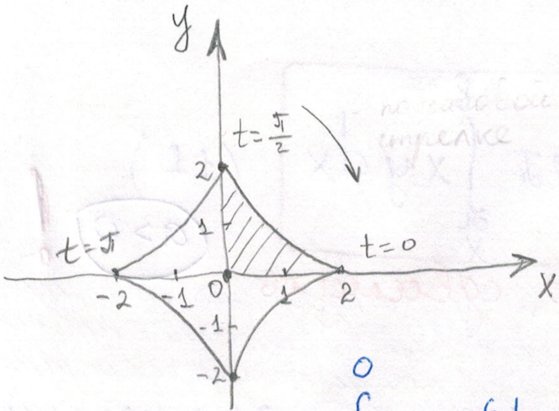
3) $V_{\substack{т.вр \\ Oy}} \overset{(11)}{=} 2\pi\int_a^b xy\,dx = (*) =$

$$= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)x'(t)\,dt$$

пример: Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox астроиды

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
x	2	0	-2	0
y	0	2	0	-2



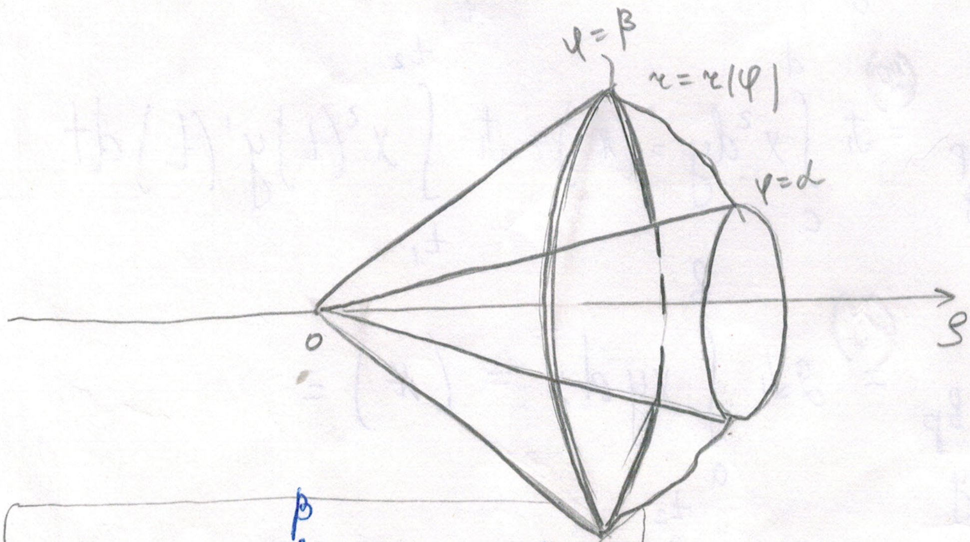
$$V_{\substack{т.вр \\ Ox}} = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt$$

$$V_{ox} = 2V_1 = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 4\sin^6 t \cdot 2 \cdot 3\cos^2 t\,(-\sin t)\,dt =$$

$$= 48\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 t \sin^6 t \, d(\cos t) = 48\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 t\,(1-\cos^2 t)^3 d(\cos t) =$$

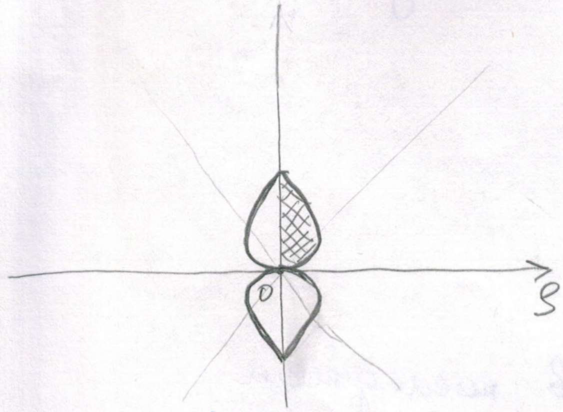
$$= \ldots = \frac{256}{105}\pi \quad \text{Ответ}$$

Следствие 2: Если кривая задана в полярной системе координат $r = r(\varphi)$, а криволинейный сектор ограничен лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = r(\varphi)$.



$$\boxed{V_{o\rho} = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi \, d\varphi} \quad (12)$$

пример: Найти объём тела, образованного вращением вокруг полярной оси кривой $r = a\sin^2\varphi$



φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r	0	$\frac{a}{2}$	a	$\frac{a}{2}$	0

$$V_{o\varsigma} = \frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}(a\sin^2\varphi)^3\sin\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^6\varphi\sin\varphi\, d\varphi =$$

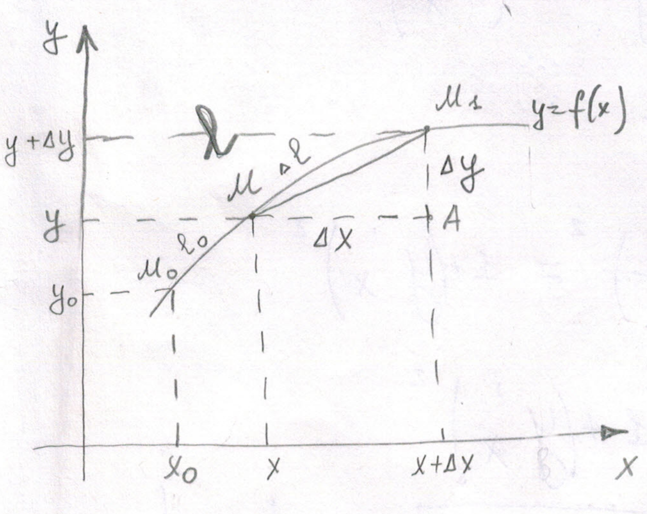
$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)^3 d(\cos\varphi) = \dots = \frac{64}{105}\pi a^3$$ Ответ

ЭКЗ

4 Длина дуги 19 В

а) декартовая система координат

Рассмотрим кривую на плоскости, заданную уравнением $y = f(x) \in C^1[a,b]$ — т.е $f(x)$ непр. и диф-ма.



Пусть $M_0(x_0, y_0)$

$M(x,y)$ — переменная точка

$\ell_0 = \ell(x)$ — длина дуги $\overset{\frown}{M_0M}$

Дадим переменной x приращение Δx, тогда

$M \to M_1$

$x \to x + \Delta x$

$y \to y + \Delta y$

$\ell = \overset{\frown}{M_0M_1}$

$\ell_0 = \overset{\frown}{M_0M} \to \ell_0 + \Delta\ell$

Тогда длина дуги ℓ_0 получит приращение $\Delta\ell = \overset{\frown}{MM_1}$

Пусть MM_1 — хорда, стягивающая дугу $\overset{\frown}{MM_1}$.

Найдём $l'_x = \frac{dl}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta x}$

Из ΔMAM_1 получаем: $MM_1^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \;\Big|\cdot : \Delta l^2$

$$\left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot \Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad \Big| : (\Delta x)^2$$

$$\left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

Переходим к пределу при $\Delta x \to 0$ в последнем соотношении, получаем:

левая часть — $\left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = \left| \begin{array}{l} \text{при } \Delta x \to 0 \;\; M_1 \to M \\ \overset{\frown}{MM_1} = \Delta l \to MM_1 \\ \text{дуга} \to \text{хорде} \;\; \Rightarrow \\ \left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \to 1 \text{ при} \\ \Delta x \to 0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = \left(l'_x\right)^2$$

правая часть — $1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right) = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1 + (y'_x)^2$$

Итак, получаем $\left(l'_x\right)^2 = 1 + (y'_x)^2$

$$l'_x = \sqrt{1 + (y'_x)^2} \quad \Big| \cdot dx$$

$$l'_x\, dx = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$$

$$\boxed{dl = \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx} \quad (V)$$

$$\int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$$

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx} \qquad (13)$$

б) параметрическая форма задания функции.

$$dl = \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \boxed{\sqrt{dx^2+dy^2} = dl} \qquad (*)$$

Итак: $l = \int_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{dx^2+dy^2} =$

$$= \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \\ dx = x'(t)\,dt \\ (dx)^2 = dx^2 = (x'(t)\,dt)^2 = (x'(t))^2 (dt)^2 = (x'(t))^2 dt^2 \\ (dy)^2 = (y'(t))^2 dt^2 \\ (dx)^2 + (dy)^2 = (x'^2 + y'^2)\,dt^2 \\ \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt \Rightarrow \boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\,dt} \qquad (14)$$

в) полярная система координат

206 экз

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ r = r(\varphi) \\ \alpha \le \varphi \le \beta \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{\left((r\cos\varphi)'\right)^2 d\varphi^2 + \left((r\sin\varphi)'\right)^2 d\varphi^2} =$$

$$= \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{r'^2\cos^2\varphi - \cancel{2r'r\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\sin^2\varphi + r'^2\sin^2\varphi + \cancel{2rr'\sin\varphi\cos\varphi} + r^2\cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

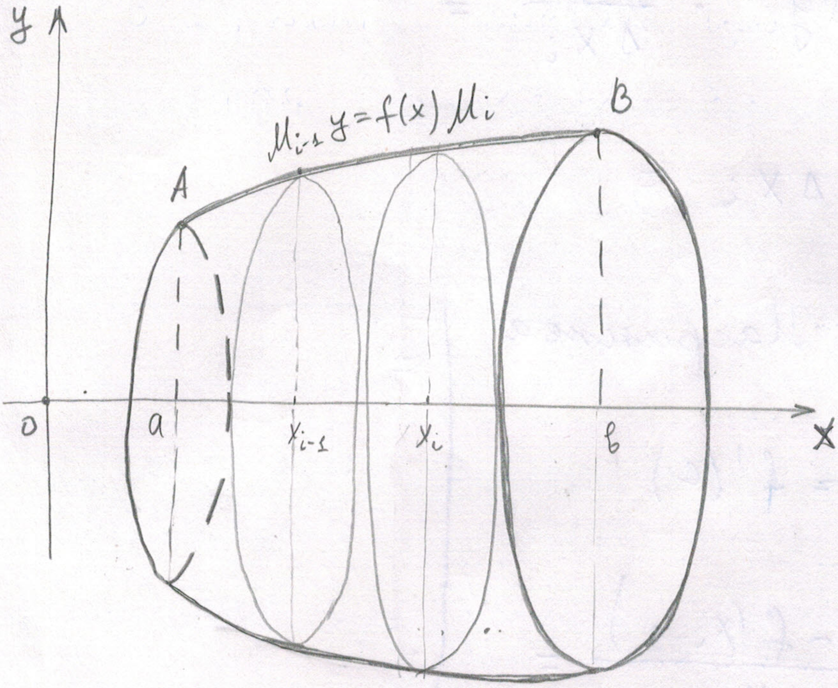
$$= \sqrt{r'^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi$$

В итоге получаем, что $\boxed{l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi}$ (15)

5 Площадь поверхности вращения (внешняя оболочка)

Пусть ф-ции $y = f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны. Определим площадь поверхности, образованной вращением дуги $\breve{AB}$ кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, $[a, b] \in Ox$.

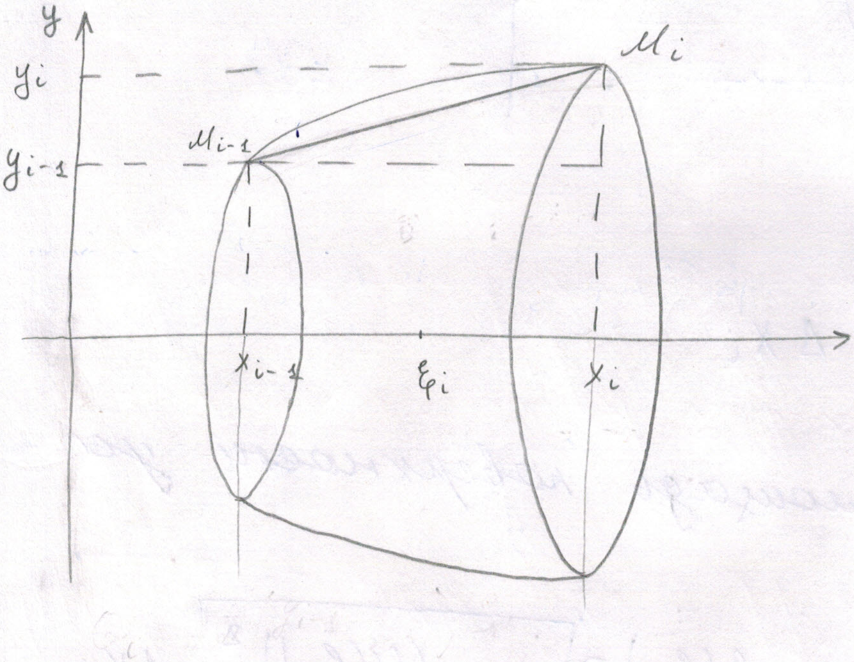


1. Разбиваем $[a, b]$ на „n" частей

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$

2. Проводим хорды ч/з соседние точки т.е соединяем $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{i-1}M_i, \ldots, M_{n-1}B$

Обозначим ч/з $\Delta S_i = M_{i-1}M_i$



3. Каждая хорда при вращении опишет усечённый конус

Площадь поверхности усечённого конуса

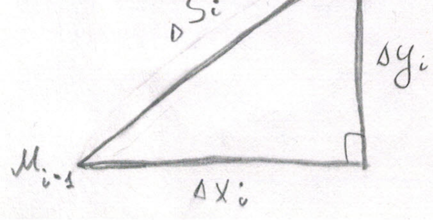
$Q_i = 2\pi R_i S_i$

R_i – средний радиус

S_i – образующая конуса

$$R_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\xi_i)$$

по Т о среднем $\exists\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$



$$\Delta S_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \quad \Big| \ \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}$$

$$S_i = \Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \; \Delta x_i =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{По теореме Лагранжа} \\ \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \\ \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \\ \qquad = f'(\xi_i) \\ x_{i-1} \le \xi_i \le x_i \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2} \; \Delta x_i$$

4. Таким образом площадь поверхности усечённого конуса

$$Q_i = 2\pi R_i S_i = 2\pi \cdot f(\xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \; \Delta x_i$$

5. Переходим к пределу в последнем соотношении, получаем

$$Q_{\text{пов. вр} \atop OX} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} Q_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i}_{\text{интегральная сумма}} =$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\cdot \underbrace{\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}_{dS}$$

В итоге получаем

$$\boxed{Q_{\substack{\text{пов.вр}\\ Ox}} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+{y'_x}^2}\,dx} \qquad (16)$$

Аналогично мо вывести формулу

$$\boxed{Q_{\substack{\text{пов.вр}\\ Oy}} = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy} \qquad (17)$$

Следствия 1 Если ф-ция задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = x'_t\,dt \\ dy = y'_t\,dt \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$t_1 \le t \le t_2$, тогда

$$Q_{\substack{\text{пов.вр}\\ Ox}} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+{y'_x}^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\, x'(t)\, dt =$$

$$= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\, dt.$$

В итоге получаем

$$\boxed{Q_{\substack{\text{пов. вр}\\ Ox}} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\, dt \quad (18)}$$

Аналогично выводится формула

$$\boxed{Q_{\substack{\text{пов. вр}\\ Oy}} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\, dt \quad (19)}$$

2 Полярная система координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \alpha \le \varphi \le \beta$$

$$Q_{Oy} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\, dl = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r\sin\varphi \sqrt{r^2 + r'^2_\varphi}\, d\varphi$$

В итоге получаем

$$\boxed{Q_{\substack{\text{пов. вр.}\\ Oy}} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r\sin\varphi \sqrt{r^2 + r'^2_\varphi}\, d\varphi \quad (20)}$$