Лекция №8 29 марта

Дифференциальные уравнения

Модуль 2

Опр 1. Диф. ур-нием n-го порядка наз-ся ур-ние, которое зависит от одной независимой переменной x, неизвестной ф-ции $y(x)$ и её производных до n-го порядка включительно.

$$\boxed{F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0} \quad (1)$$

Здесь F - действительная ф-ция действительной переменной.

Опр 2. Если из ур-ния (1) м/о выразить старшую, то есть n-ую производную как функцию остальных переменных

$$\boxed{y^{(n)}(x) = f(x, y', y', \dots, y^{(n-1)})}, \quad (2)$$

то ур-ние (2) наз-ся диф. ур-нием n-го порядка, разрешённым относительно старшей т.е n-ой производной.

Опр 3. Если искомая ф-ция $y(x)$ зависит от одной переменной x, то дифференциальное ур-ние наз-ся обыкновенным.

Если же искомая функция $y(x)$ зависит от нескольких переменных, то диф. ур. наз-ся диф. ур.-нием в частных производных.

Далее будем рассматривать только обыкновенные диф-ные ур-ния.

Опр 4. Максимальный порядок производной, входящей в диф. ур-ние наз-ся порядком этого диф. ур-ния.

Ур-ния (1) и (2) имеют n-ый порядок

Опр 5: Решением диф. ур-ния (1) или (2) наз-ся ф-ция $y = \varphi(x)$ такая, что после подстановки её и её производной в (1) или (2) получаем верное тождество.

Опр 6: Процесс отыскания решения диф. ур-ния наз-ся его интегрированием. А график решения диф. ур-ния — интегральной кривой.

21

Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Опр 1: Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка наз-ся уравнение, которое зависит от одной переменной x, неизвестной ф-ции y(x) и её производной.

$$\boxed{F(x, y, y') = 0} \quad (1)$$

Опр 2: Обыкновенным дифференциальным уравнением разрешённым относительно старшей производной т.е y' наз-ся уравнение вида

$$\boxed{f(x, y) = y'} \quad (2)$$

Интегрирование диф. ур-ния в общем случае приводит к бесконечному множеству решений отличных друг от друга постоянной величиной C. Чтобы решение дифференциального ур-ния приобрело конкретное значение его нужно подчинить некоторому дополнительному условию.

Опр 3: Условие такое, что при $x = x_0$ ф-ция $y = y_0$ наз-ся начальным условием.

Опр 4: Задача отыскания решения диф. ур-ния 1-го порядка (2), удовлетворяющего заданному начальному условию наз-ся задачей Коши.

Задача Коши представляет собой совокупность диф. ур-ния и начального условия:

$$\boxed{\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}} \quad \left.\begin{matrix} (2) \text{ - диф. ур-ние} \\ (3) \text{ - нач. условие} \end{matrix}\right\} \text{Задача Коши}$$

Опр 5: Общим решением диф. ур-ния 1-го порядка наз-ся ф-ция $y = \varphi(x, C)$, которая удовлетворяет условиям:

1) $y = \varphi(x, C)$ - решение диф. ур-ния (2) при $\forall C$.

2) какого бы ни было начальное условие (3) можно найти такое $C = C_0$, что ф-ция $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять начальному условию.

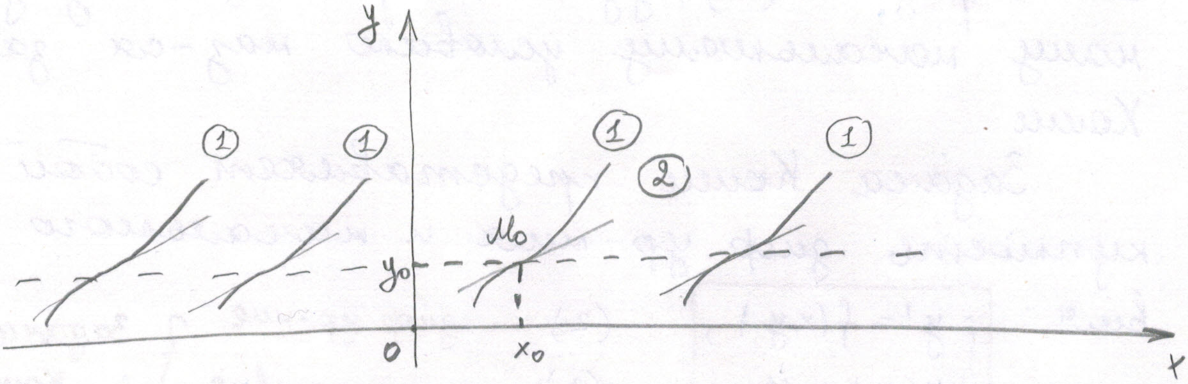
Опр 6: Частным решением диф. ур-ния 1-го порядка наз-ся $\forall$ ф-ция $y = \varphi(x, C_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении $C = C_0$.

Общее решение - это совокупность всех частных решений.

Опр 7: Если общее решение диф. ур-ния найдено в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, то такое решение наз-ся общим интегралом диф. ур-ния.

Опр 8: Ур-ние $\Phi(x, y, C_0) = 0$ наз-ся частным решением диф. ур-ния.

Геометрическая интерпретация общего решения диф. ур-ния



① Графиком общего решения диф. ур-ния яв-ся семейство интегральных кривых $y = \varphi(x, C)$, обладающих тем свойством, что в точках этих кривых с одинаковой ординатой касательные параллельны друг к другу.

② Графиком частного решения $y = \varphi(x, C_0)$ яв-ся одна интегральная кривая, проходящая ч/з точку $M_0(x_0, y_0)$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для диф. ур-ния 1-го порядка

Если в ур-нии $y' = f(x, y)$ ф-ция $f(x, y)$ и её частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывные в некоторой области D, содержащей точку (x_0, y_0), то существует и при том единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию (3)

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что при выполнении её условий существует и при том единственная интегральная кривая, проходящая ч/з точку (x_0, y_0)

Решение диф. ур-ний 1-го порядка

21

Диф. ур-ния 1-го порядка

- Диф. ур-ния с разделяющимися переменными
- Однородные диф. ур-ния
- Линейные диф. ур-ния.
  - Однородные лин. диф. ур-ния
  - Неоднородные лин. диф. ур-ния
  - Ур-ние Бернулли

Методы

1. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)
2. Метод подстановки $y = u \cdot v$ (метод Бернулли)

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Опр 1: Диф. ур-нием с разделяющимися переменными наз-ся ур-ние вида

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)} \quad (1)$$

$f(x)$ - ф-ция зависящая только от x

$g(y)$ - ф-ция зависящая только от y.

Решение

1. Умножим (1) на dx и разделим на $g(y) \neq 0$.

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

2. Интегрируем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

Находим общее решение или общий интеграл

Диф. ур-ние с разделяющимися переменными может иметь вид: $\boxed{f_1(x)\,g_1(y)\,dx + f_2(x)\,g_2(y)\,dy = 0}$

Решение

1. Переносим второе слагаемое вправо:

$$f_1(x)\,g_1(y)\,dx = -f_2(x)\,g_2(y)\,dy \quad \Big| : g_1(y)\cdot f_2(x) \neq 0$$

2. Разделим на произведение ф-ций $g_1(y)\,f_2(x)$:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = \frac{-g_2(y)}{g_1(y)}\,dy$$

3. Интегрируем

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy + C$$

Находим общий интеграл или общее решение.

Замечание: При проведении почленного деления ур-ния на $g_1(y) \neq 0$ и $f_2(x) \neq 0$ могут быть потеряны решения. Поэтому следует отдельно решить это уравнение и установить те решения диф-ур-ния, которые м/б получены из общего решения (особые решения)

пример:
$$\begin{cases} (y+xy)\,dx + (x-xy)\,dy = 0, & (*) \\ y(1) = 1. & (**) \end{cases}$$

Решение:
$$y(1+x)\,dx + x(1-y)\,dy = 0$$
$$y(1+x)\,dx = -x(1-y)\,dy$$
$$y(1+x)\,dx = x(y-1)\,dy \quad \Big| : xy$$
$$\frac{1+x}{x}dx = \frac{y-1}{y}dy$$
$$\int \frac{1+x}{x}dx = \int \frac{y-1}{y}dy$$
$$\ln|x| + x = -\ln|y| + y + C, \ \forall C$$
$$\ln|x| + \ln|y| = y - x + C, \ \forall C$$
$$\ln|x \cdot y| = y - x + C, \ \forall C$$

Общий интеграл диф-ур-ния $(*)$

Используем начальное условие (**):

$y(1) = 1 \Rightarrow x = 1, y = 1. \Rightarrow$

$\ln|1\cdot 1| = 1 - 1 + C \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0.$

В итоге получаем, что $\ln|x\cdot y| = y - x$

или $\boxed{\ln|x\cdot y| + x - y = 0}$ — частный интеграл диф ур-ния (*)

Проверим не потеряли ли мы решения при делении на $x\cdot y$

Пусть $x\cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ или $y = 0$.

Подставим в исходное диф. ур-ние (*):

$(0+0\cdot 0)d0 + (0-0\cdot 0)d0 = 0$

Да, решение $\boxed{x=0, y=0}$ удовлетворяет диф. ур-нию *.

Проверим входит ли оно в уже найденное решение: $\ln|xy| + x - y = 0.$

$\ln|0\cdot 0| + 0 - 0 \neq 0$

Нет, не входит. Следовательно, существует особое решение $x=0, y=0$.

Ответ: $\ln|xy| + x - y = 0$

$x=0, y=0.$

Однородные дифференциальные уравнения

Опр 1: Диф. ур-ние вида $\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$ (1)

наз-ся однородным диф. ур-нием, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ яв-ся однородными функциями одного порядка и уравнение (1) м/б приведено к виду

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)} \text{ или } \boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)}, \quad (2)$$

где f - однородная функция относительно $\frac{y}{x}$

Диф. ур-ние (2) решаем путём замены

$$\frac{y}{x} = u(x) \Rightarrow \begin{cases} y = u(x)\cdot x \\ y' = u'x + u \end{cases}$$

<u>пример</u>: $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ (V)

<u>Решение</u>: Замена: $\frac{y}{x} = u(x) \Rightarrow \begin{cases} y = u(x)\cdot x, \\ y' = u'x + u. \end{cases}$

Подставляем последнюю систему в (V), получаем:

$$u'x + \cancel{u} = \frac{1}{u} + \cancel{u}$$

$$u'x = \frac{1}{u}$$

$$\frac{x\,du}{dx} = \frac{1}{u} \quad \Big/ \cdot dx \quad \Big/ \cdot u$$

$ux\,du = dx \quad \Big|:x \qquad x \neq 0$ из условия диф. ур-ния

$u\,du = \frac{dx}{x}$

$\int u\,du = \int \frac{dx}{x}$

$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + c, \ \forall c$

$u^2 = 2\ln|x| + c$

$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2\ln|x| + c$

$y^2 = x^2(2\ln|x| + c)$ — общий интеграл диф. ур-ния (V)

$x=0$ не яв-ся особым решением т.к

$y' = \frac{0}{y} + \frac{y}{0}$ — на „0" делить нельзя.

Ответ: $y^2 = x^2(2\ln|x| + c)$

Линейные дифференциальные уравнения

21

Опр 1: Диф. ур-ние 1-го порядка наз-ся линейным, если неизвестная ф-ция $y=y(x)$ и её производная $y'(x)$ входят в ур-ние в первой степени, не перемножаясь м/у собой.

$$\boxed{y' + p(x)\,y = f(x)}, \quad (1)$$

где $p(x)$, $f(x)$ – непрерывные ф-ции.

Опр 2: Если $f(x) \equiv 0$, то ур-ние (1) наз-ся линейным однородным диф. ур-нием и имеет вид

$$\boxed{y' + p(x)\,y = 0}, \quad (2)$$

Опр 3. Если $f(x) \neq 0$, то ур-ние (1) наз-ся линейным неоднородным диф. ур-нием

Опр 4. Диф. ур-ние 1-го порядка наз-ся ур-нием Бернулли, если оно имеет вид: $\boxed{y' + p(x)\,y = f(x)\,y^m}$, (3)

где $m \neq 0$, $m \neq 1$ т. к. если

$m = 0$, то $(3) \to (1)$

$m = 1$, то $(3) \to$ с разд. перем.

Решение ЛНДУ методом Лагранжа (методом вариации произвольной постоянной)

Рассмотрим ЛНДУ $y' + p(x)\,y = f(x)$, (1).

1 Выделим из ЛНДУ (1) ЛОДУ, то есть в правой части равенства (1) ставим нуль

$y' + p(x)\, y = f(x)$ ЛНДУ

$y' + p(x)\, y = 0$ ЛОДУ

Решаем ЛОДУ, т.е разделяем перемен-ные: $y' = -p(x)\cdot y$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)\cdot y$$

Разделим последнее уравнение на y и умно-жим на dx, получим

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + c \quad , +c$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-\int p(x)dx + c}$$

$$|y| = e^{-\int p(x)dx} \cdot e^{c}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \tilde{c}, \text{ где } \tilde{c} \neq 0$$

$$\tilde{c} = e^{c}$$

Это и есть общее решение ЛОДУ 1-го порядка.

Модуль м/о убрать так как экспонента в любой степени положительна.

2) Пусть теперь $\tilde{c} = \tilde{c}(x)$ – это не константа, а ф-ция. Тогда предполагаемое решение ЛНДУ будем искать в виде:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \tilde{c}(x)} \quad (4)$$

Подставим это решение в исходное ЛНДУ (1):

$$\left(e^{-\int p(x)dx} \cdot \tilde{c}(x)\right)' + p(x)\, e^{-\int p(x)dx} \cdot \tilde{c}(x) = f(x)$$

Вычисляем производную и приводим подобные члены:

$$\cancel{-e^{-\int p(x)dx}\, p(x)\, \tilde{c}(x)} + e^{-\int p(x)dx}\, \tilde{c}'(x) +$$

$$\cancel{+ p(x)\, e^{-\int p(x)dx}\, \tilde{c}(x)} = f(x)$$

$$\tilde{c}' = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{d\tilde{c}}{dx} = f(x)\, e^{\int p(x)dx} \quad \Big| \cdot dx$$

$$d\tilde{c} = f(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx$$

Интегрируем

$$\int d\tilde{c} = \int f(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx$$

В итоге получаем, что

$$\tilde{C}(x) = \int f(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + C, \quad \forall C$$

③ Подставляем последнее выражение в (4):

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int f(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$$ - общее решение ЛНДУ.

21в

Метод Бернулли (метод подстановки $y = u \cdot v$)

Рассмотрим ЛНДУ: $y' + p(x)y = f(x)$ (1)

Сделаем подстановку $\boxed{y = u \cdot v}$ (5)

$u = u(x)$
$v = v(x)$

Подставим (5) в (1), получим

$(u \cdot v)' + p\,u\,v = f$

$\underline{u'v} + uv' + \underline{p\,u\,v} = f$

$$\boxed{v(u' + pu) - (uv' - f) = 0} \quad (1.1)$$

Так как одну ф-цию $y(x)$ заменили произведением 2-х ф-ций $u(x)$ и $v(x)$, то у нас имеется произвол по одной переменной. Выберем одну из переменных u или v так как нам удобно. Нам удобно в ур-нии (1.1) приравнять первую скобку к нулю.

1) $u' + pu = 0$ – это ЛОДУ, которое сводится к ур-нию с разделяющимися переменными

$u' = -pu$

$\frac{du}{dx} = -pu$ – ур-ние с разделяющимися переменными

$\frac{du}{u} = -p\,dx$

$\int \frac{du}{u} = -\int p\,dx$

$\ln|u| = -\int p\,dx + c, \ \forall c$

$e^{\ln|u|} = e^{-\int p\,dx + c}$

$|u| = e^{-\int p\,dx} \cdot e^{c}$

$u = e^{-\int p\,dx} \cdot \tilde{c}, \ \tilde{c} \neq 0.$

Так как у нас имеется произвол по одной из переменных, то мы не только м/м выбрать её как нам удобно но и конкретизировать общее решение (т.е перейти от общего решения к частному). Для этого выберем $c = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \tilde{c} = 1$ в последнем равенстве, тогда получаем, что $\boxed{u = e^{-\int p(x)\,dx}}$ (6) – это частное решение 1-ой скобки.

② Подставим теперь (6) в (1.1), получаем

$$v \cdot 0 + u v' - f(x) = 0 \Rightarrow u v' - f(x) = 0$$

$$e^{-\int p(x) dx} \cdot \frac{dv}{dx} = f(x)$$

$$dv = e^{\int p(x) dx} f(x) dx$$

Интегрируем последнее равенство

$$v = \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + C$$

③ Тогда решением ЛНДУ (1) яв-ся произведение ф-ции $u \cdot v = y$, то есть

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \cdot \left(\int f(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right) -$$

общее решение ЛНДУ (1)