Лекция 9 **Д.У. высшего порядка** 5 апреля

Опр 1: Диф. ур. порядка выше первого наз-ся диф. ур. высших порядков.

22

Опр 2: Диф. ур. 2-го порядка имеет вид

$\boxed{F(x, y, y', y'') = 0}$ (1)

Диф. ур. 2-го порядка, разрешённое относительно старшей производной –

$\boxed{y'' = f(x, y, y')}$ (2)

Опр 3: Решением диф. ур-ния (2) наз-нот ф-цию $y = \varphi(x)$, которая при подстановке её в уравнение, обращает его в тождество.

Опр 4: Общим решением диф. ур-ния (2) наз-нот ф-цию $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, которая яв-ся решением диф. ур-ния при любых C_1 и C_2, и из которого можно выделить частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

Опр. 5. Всякое решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ диф. ур-ния (2), полученное из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при конкретных значениях $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$

наз-ся частным решением.

Задача Коши (для ДУ 2-го порядка)

Задача Коши для ДУ 2-го порядка заключается в отыскании решения диф. ур-ния

$$\boxed{y'' = f(x, y, y')} \qquad (2),$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\boxed{\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}} \qquad (3)$$

Теорема $\exists!$ решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка.

Если в диф. ур-нии (2) ф-ция $f(x, y, y')$ и её производные f'_x и f'_y непрерывны в некоторой области D, то для всякой точки $(x_0, y_0, y_0') \in D$ существует и при том единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию (3)

Аналогично:

Опр 6. Диф. ур-ние n-го порядка имеет вид

$$\boxed{F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0} \qquad (1)$$

Диф. ур-ние n-го порядка, разрешённое относительно старшей производной —

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})} \quad (2)$$

Задача Коши для диф. ур-ния n-го порядка

Найти решение диф. ур-ния n-го порядка (2), удовлетворяющего нач. условию

$$\boxed{\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ y''(x_0) = y''_0, \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}} \quad (3)$$

Теорема $\exists!$ решения задачи Коши для ДУ n-го порядка

Если в диф. ур-нии (2) ф-ция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ и её частные производные $f'_x, f'_y, \dots, f'_{y^{(n-1)}}$ непрерывны в некоторой области D, то для любой точки $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ существует решение $y = \varphi(x)$ диф. ур-ния (2), удовлетворяющее начальному условию (3).

Опр 7. Общим решением Д.У. n-го порядка наз-ся ф-ция $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, которая яв-ся решением Д.У (2) при $\forall$ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и из которого можно выделить частное решение, удовлетворяющее нач. условиям.

22

Интегрирование Д.У n-го порядка, допускающих понижение порядка

Рассмотрим 4 типа таких уравнений.

I тип : Д.У n-го порядка зависит только от x т.е $y^{(n)} = f(x)$.

Решение такого Д.У. получается путём n-кратного интегрирования. При этом получаем и n констант : $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)\,dx + C_1\right) dx + C_2 =$$

$$= \int dx \int f(x)\,dx + C_1 x + C_2$$

$$y^{(n-3)} = \int dx \int dx \int f(x)\,dx + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \ldots \int dx}_{n-1 \text{ раз}} \int f(x)\,dx + C_1 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ C_2 \cdot \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n$$

пример: $y'' = \sin x$

$y' = -\cos x + C_1, \ \forall C_1$

$y = -\sin x + C_1 x + C_2, \ \forall C_1, C_2$

II тип. Д.У 2-го порядка вида

$F(x, y', y'') = 0$

т.е. отсутствует y

пример: $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

$xp' = p \ln \frac{p}{x}$

$\boxed{p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}}$

однород

Замена: $\begin{cases} y' = p(x), \\ y'' = p'(x) \end{cases} \Rightarrow F(x, p, p') = 0$

$\Rightarrow$ Д.У. 2-го порядка с помощью замены сводится к Д.У. 1-го порядка. Произошло понижение порядка.

Решение проходит в несколько этапов.

1 этап: Решаем диф. ур-ние 1-го порядка $p' = f(x, p)$.

Интегрируем, находим ф-цию $p = \Psi(x, C_1)$ – общее решение диф. ур-ния 1-го порядка.

2 этап: Возвращаемся к замене:

$p(x) = y'$

3 шаг: Снова решаем диф. ур-ние 1-го порядка

$y' = \Psi(x, C_1)$.

Интегрируем его. Получаем решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ – общее решение диф. ур-ния 2-го порядка.

III тип: Диф. ур-ние 2-го порядка вида $F(y, y', y'') = 0$.

т.е отсутствует x

Замена: $\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p \cdot p' \end{cases} \Rightarrow F(y, p, p \cdot p') = 0$

$yy' + (y')^2 = x$

$(yy')' = x$

! $y'' = e^{2y}$ $\boxed{pp' = e^{2y}}$

Так как $y' = \frac{dy}{dx} = p(y)$, то

$$y'' = (y')' = (p(y))' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} =$$

$$= p \cdot p'$$

Решение проходит в два этапа.

1 этап. Решаем диф. ур-ние 1-го порядка

$p' = f(y, p)$.

Интегрируем. Получаем ф-цию

$p = \Psi(y, C_1)$ - общее решение Д.У 1-го порядка.

2 этап: Возвращаемся к замене.

$y' = p(y)$. Решаем ещё одно диф. ур-ние 1-го порядка

$y' = \Psi(y, C_1)$. Интегрируем

Находим $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ - общее решение Д.У 2-го порядка.

IV тип: Д.У n-го порядка вида

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

допускает понижение порядка на единицу в том случае, когда левая часть этого ур-ния представима в виде производной некоторого диф. выражения $n-1$ порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \left(F_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\right)' = 0$$

Интегрируя по x м/о получить Д-У на единицу меньшего порядка.

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Опр 1. Лин. диф. ур-нием n-го порядка (ЛНДУ) наз-ся ур-ние вида

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)}, \quad (1)$$

где $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ – заданные ф-ции, $y(x)$ искомая ф-ция, $y', \dots, y^{(n)}$ – производные ф-ции $y(x)$ до n-го порядка включительно, $f(x)$-свободный член, $f(x) \neq 0$ – поэтому ур-ние наз-ся неоднородным. Ур-ние (1) наз-ся линей ным так как искомая ф-ция $y(x)$ и её производные до n-го порядка включительно входят в ур-ние (1) в первой степени не перемножаясь м/у собой. 15

Опр 2: Лин однородным диф. ур-нием наз-ся диф. ур-ние (1) с правой частью $f(x)=0$ т.е ур-ние вида:

$$\boxed{y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+ +p_n(x)y=0} \quad (2)$$

Опр 3: Задача Коши для диф. ур-ния n-го порядка заключается в отыскании решения диф. ур-ния (1) или (2), удовлетворяющего начальному условию (3):

$$\boxed{\begin{cases} y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y'_0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}} \quad (3)$$

23

Дифференциальный оператор $L[y]$ и его свойства.

Опр 4: Диф. оператором $L[y]$ наз-ся выражение вида

$$\boxed{L[y]:=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y}$$

Тогда $L[y] = f(x)$, ЛНДУ (1)

$L[y] = 0$, ЛОДУ (2)

Теорема (*): Диф. оператор $L[y]$ наз-ся линейным если $\forall$ двух ф-ций y_1 и y_2 выполнены условия:

1. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$
2. $L[cy_1] = cL[y_1]$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Док-во непосредственно следует из свойств производных.

Свойства частных решений ЛОДУ n-го порядка

Теорема 1 (о линейности пространства частных решений)

Множество частных решений ЛОДУ n-го порядка (2) с непрерывными коэффициентами $p_1(x), \dots, p_n(x)$ на $[a, b]$ образует линейное пространство

Док-во: Пусть y_1 и y_2 – два частных решения ЛОДУ n-го порядка (2) т.е

$L[y_1] = 0$,

$L[y_2] = 0$.

Рассмотрим $L[y_1 + y_2] \overset{T_1^*}{=\!=} L[y_1] + L[y_2] = 0 + 0 = 0$.

Пусть теперь y - частное решение (2) т.е
$L[y]=0$.
Рассмотрим $L[cy] \overset{T_2^*}{=\!=} c\,L[y] = c\cdot 0 = 0$
$\Rightarrow$ $c\cdot y$ - также яв-ся решением ЛОДУ

По определению линейного пространство частные решения y_1, y_2, y и др. образуют линейное пространство.

<u>Замечание</u>: Линейное пространство - это множество элементов определённой / произвольной природы, для которых определены операции „+" элементов, и „·" элементов на $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ и выполнены условия:

1) $u+v=v+u$
2) $u+(v+w)=(u+v)+w$
3) $\exists\, 0 : v+0=0+v=v$
4) $\exists\, -v : v+(-v)\ (-v)+v=0$
5) $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$
6) $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$
7) $\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u$
8) $1\cdot u=u$

$\forall\, u, v \in$ лин. пр-ву, $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Теорема 2: Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ – частные решения ЛОДУ (2), то их линейная комбинация $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ также яв-ся решением ЛОДУ (2). Здесь $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Док-во:

Так как $y_1, \dots, y_n$ – частные решения ЛОДУ (2), то $L[y_1] = 0, \dots, L[y_n] = 0$.

Рассмотрим

$$L[y] = L[c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n] \overset{T_1^*}{=\!=} L[c_1 y_1] + L[c_2 y_2] + \dots + L[c_n y_n] \overset{T_2^*}{=\!=} c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] + \dots + c_n L[y_n] = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ – также яв-ся решением ЛОДУ (2)

ч.т.д.

Опр 1: Система ф-ций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ наз-ся л.з. на $[a, b]$, если их лин. ком. равна нулю т.е

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$$

и при этом $\exists$ хотя бы один $c_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, $c_i \in \mathbb{R}$.

24

Опр 2: Система ф-ций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ л.н.з на $[a, b]$, если их лин. комб. равна нулю т.е

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0,$$

где все $c_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, $c_i \in \mathbb{R}$.