Лекция 10

12 апреля

Определитель Вронского

Опр 1: Определителем Вронского (вронскианом) систем ф-ций $y_1, \dots, y_n$ наз-ся определитель вида

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

24в

Теорема о вронскиане л.з. функций

Если ф-ции $y_1, \dots, y_n$ л.з. на $[a, b]$, то $W = 0$ на $[a, b]$

Док-во

По условию $y_1, \dots, y_n$ л.з $\Rightarrow$ из определения л.з

$\exists\ C_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$: $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$.

Продифференцируем последнее равенство $(n-1)$ раз:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0, \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n' = 0, \\ C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \dots + C_n y_n'' = 0, \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

– С.Л.А.У относитель $C_1, C_2, \dots, C_n$

Данная система имеет ненулевое решение т.к $\exists\ C_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$. А это возможно только в том случае, когда определитель этой системы равен нулю. В противном случае, т.е. если бы определитель был отличен от нуля, то по теореме о базисном миноре ф-ции $y_1, \dots, y_n$ были бы л.н.з., а это противоречит условию. Определитель данной СЛАУ представляет собой определитель Вронского:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

$\forall x \in [a, b] \Rightarrow W = 0.$

ч.т.д.

<u>Утверждение 1</u>: Если хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$ определитель Вронского не равен нулю, то система функций $y_1, \dots, y_n$ лнз.

<u>Теорема о вронскиане лнз частных решений ЛОДУ n-го порядка</u> 25в

Если ф-ции $y_1, y_2, \dots, y_n$ лнз на $[a, b]$ и яв-ся частными решениями ЛОДУ

(2) $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$

с непрерывными функциями $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$, то $W \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

<u>Док-во</u>:

МОП. Пусть для какой-то точки $\forall x_0 \in [a, b]$ $W[x_0] = 0$. Выберем константы $c_1, c_2, \dots, c_n$ так, чтобы СЛАУ в точке x_0 имела ненулевое решение

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ C_1 y_1''(x_0) + C_2 y_2''(x_0) + \dots + C_n y_n''(x_0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

– СЛАУ относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$

Так как по предположению $W[x_0] = 0$, тогда $\exists$ $C_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$.

Обозначим ч/з y лин. комб. $y_1, \dots, y_n$ т.е $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$. По условию $y_1, y_2, \dots, y_n$ – частные решения ЛОДУ (2) $\Rightarrow$ их лин. комб. т.е y также яв-ая решением ЛОДУ (2), удовлетворяющего нач. условию

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 = 0, \\ y'(x_0) = y_0' = 0, \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Но так как нулевое решение также удовлетворяет этим условиям, то по теореме $\exists!$ решения задачи Коши для диф. ур-ния n-го порядка $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$.

В то же время $C_1, \dots, C_n$ одновременно отличны от нуля $\Rightarrow$ по определению ф-ции $y_1, y_2, \dots, y_n$ л. з. – а это противоречит условию $\Rightarrow$ $W(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$

ч.т.д.

пример: $y_1 = e^{2x}$
$y_2 = e^{3x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x} \neq 0$$

$\Rightarrow$ $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$ лнз.

Фундаментальная система решений ЛОДУ

Пусть дано ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0 \quad (2)$$

$$L[y] = 0 \quad (2')$$

Опр: Фунд. сист. решений ЛОДУ n-го порядка (2) наз-ся лнз частные решения ЛОДУ (2).

Утверждение 2: Если имеем ФСР на отрезке, где определены решения, то $W(x) = 0$ на этом отрезке.

27в

Теорема о структуре общего решения ЛОДУ n-го порядка

Общим решением ЛОДУ n-го порядка (2') с непрерывными коэффициентами $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ на $[a, b]$ яв-ся лин. комб. частных решений, образующих ФСР:

$$y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (4)$$

где $C_1, \dots C_n$ – некоторые постоянные, а $y_1, \dots y_n$ –

частные ЛНЗ решения ЛОДУ, образующие ФСР

Док-во

1) Покажем, что (4) – это решение (но не общее).
Для этого подставим (4) в (2'), получим

$$L[y] = L[c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n] \overset{T^1_*}{=\!=} L[c_1 y_1] + \ldots +$$

$$+ L[c_n y_n] \overset{T^2_*}{=\!=} c_1 L[y_1] + \ldots + c_n L[y_n] \overset{y_1, \ldots, y_n \text{ ч.р}}{=\!=}$$

$$= c_1 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ – частное решение ЛОДУ (2).

2) Покажем теперь, что (4) – общее решение ЛОДУ (2), т.е из него м/о выделить единственное частное решение, удовлетворяющее нач. условию

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \\ \ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \quad (3) \quad \text{где } x_0 \in [a, b]$$

Подставим (3) в (4), получим:

$$\begin{cases} c_1^0 y_1(x_0) + c_2^0 y_2(x_0) + \ldots + c_n^0 y_n(x_0) = y_0, \\ c_1^0 y_1'(x_0) + c_2^0 y_2'(x_0) + \ldots + c_n^0 y_n'(x_0) = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_1^0 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2^0 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n^0 y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

СЛАУ относительно $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$

Определитель этой системы – это определитель Вронского в точке x_0.

$$W[x_0] = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

Так как $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют ФСР, то по теореме о вронскиане лнз частных решений ЛОДУ n-го порядка $\Rightarrow W[x_0] \neq 0$. Поэтому система имеет единственное решение $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$ (т.к число уравнений совпадает с числом неизвестных)

В силу теоремы $\exists!$ решения задачи Коши для диф. ур-ния n-го порядка $\Rightarrow$ ф-ция $y = c_1^0 y_1 + c_2^0 y_2 + \ldots + c_n^0 y_n$ - единственное решение задачи Коши (2), (3) или частное решение (2), удовлетворяющее нач. условию (3). То есть, мы смогли выделить частное решение, удовлетворяющее нач. условию (3), а это (по определению) означает, что (4) яв-ся общим решением ЛОДУ n-го порядка (2)

ч.т.д.

<u>Теорема о размерности пространства решений ЛОДУ n-го порядка</u>

Максимальное число лнз частных решений ЛОДУ n-го порядка (2) с непрерывными коэффициентами $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ равно „n"

Теорема о существование ФСР ЛОДУ n-го порядка

Всякое ЛОДУ n-го порядка с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_1(x), \dots, p_n(x)$ имеет ФСР.

Док-во:

26 в

Дано ЛОДУ n-го порядка:

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0 \quad (2)$$

$$L[y] = 0 \quad (2')$$

Зададим n^2 начальных условий

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} & y_2(x_0) = y_{20} & \dots & y_n(x_0) = y_{n0} \\ y_1'(x_0) = y_{10}' & y_2'(x_0) = y_{20}' & \dots & y_n'(x_0) = y_{n0}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{10}^{(n-1)} & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{20}^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(n-1)} \end{cases} \quad (3$$

так чтобы

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \dots & y_{n0} \\ y_{10}' & y_{20}' & \dots & y_{n0}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \dots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall x \in [a, b]$$

Пусть $y_1, \dots, y_n$ – частные решения ЛОДУ (2), удовлетворяющие нач условиям (3). Докажем, что эти решения образуют ФСР т.е ЛНЗ $\Rightarrow$ $W[x] \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Для этого вычислим значение вронскиана в точке $x = x_0$, получим:

$$W[x_0] = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \dots & y_{n0} \\ y_{10}' & y_{20}' & \dots & y_{n0}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \dots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

по предположению. $\Rightarrow W[x_0] \neq 0, \ \forall x_0 \in [a, b]$

В силу Утв. 1 $\Rightarrow y_1, y_2, \dots, y_n$ ЛНЗ $\Rightarrow$ по определению они образуют ФСР

ч.т.д.

Формула Остроградского – Лиувилля для ЛОДУ 2-го порядка

28в

Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0 \qquad (2.1)$$

Пусть y_1, y_2 – два частных решения ЛОДУ (2.1)

Это означает, что верные равенства:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x) y_1' + p_2(x) y_1 = 0, & \Big| \cdot (-y_2) \\ y_2'' + p_1(x) y_2' + p_2(x) y_2 = 0 & \Big| \cdot y_1 \end{cases} \quad \text{"}+\text{"}$$

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p_1(x) \cdot (y_1 y_2' - y_2 y_1') + p_2(x) \cdot \underbrace{(y_1 y_2 - y_1 y_2)}_{=0} = 0 \qquad (2.2)$$

Введём обозначения:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$W'(x) = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - \cancel{y_2' y_1'} -$$

$$- y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

Тогда (2.2) примет вид

$$W'(x) + p_1(x) \cdot W(x) = 0$$

$$\frac{dW}{dx} + p_1(x) \cdot W = 0$$

$$\frac{dW}{dx} = -p_1(x) \cdot W \quad \Big| : W \qquad W \neq 0$$

$$\frac{dW}{W} = -p_1(x) dx$$

Интегрируем: $\ln|W| = -\int p_1(x) dx + C, \ \forall C$

$$|W| = e^{-\int p_1(x) dx} \cdot e^{C}$$

$$(2.3) \qquad \boxed{W = e^{-\int p_1(x) dx} \cdot C_1, \ \forall C_1 \neq 0}$$

формула Остроградского-Лиувилля в общем виде без начальных условий

Найдём решение, удовлетворяющее начальному условию $W(x) = W(x_0)$ при $x = x_0$. Для этого возьмём интеграл с переменным верхним пределом $\int\limits_{x_0}^{x}$, где $[x_0, x] \subset [a, b]$

Тогда формула (2.3) примет вид

$$W(x) = C \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}$$

Определим константу C, подставив начальное условие $\begin{cases} x = x_0, \\ W[x] = W[x_0] \end{cases}$, получим

$$W[x_0] = C \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x_0} p_1(x)\,dx} = C \cdot e^{0} = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C = W[x_0]$$

Возвращаемся обратно к формуле (2.3)

$$\boxed{W[x] = W[x_0] \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}} \qquad (2.4)$$

формула Остроградского – Лиувилля с начальным условием

Замечание: Для диф. ур-ния n-го порядка формулы (2.3) и (2.4) имеют тот же вид, где $p_1(x)$ – коэффициент, стоящий перед $(n-1)$-ой производной при условии, что коэффициент при (n)-ой производной равен единице

Нахождение общего решения ЛОДУ 2-го порядка при известном частном решении

29в

Пусть дано ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = 0 \qquad (2.1)$$

y_1 – частное решение, которое известно по условию

Найдём y_2 – второе частное решение ЛОДУ (2.1) ЛНЗ y_1.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Рассмотрим $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} =$

$$= \frac{W(x)}{y_1^2} \underset{\text{нет н усл}}{\overset{(2.3)}{=}} C e^{-\int p_1(x)\,dx} \cdot \frac{1}{y_1^2},$$

$\forall C \neq 0$.

Интегрируем

$$\frac{y_2}{y_1} = C \int e^{-\int p_1(x)\,dx} \cdot \frac{1}{y_1^2}\, dx + C_0, \quad \forall C \neq 0, \ \forall C_0$$

Так как ищем частное решение, то можно конкретизировать константы C и C_0.

Выберем $C_0 = 0$, $C = 1$. Тогда

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx \qquad (5)$$

Главное, чтобы $c \neq 0$ так как в противном случае y_1 и y_2 будут л. з.

Если c и C_0 взять любыми, то дальнейшие вычисления будут громоздкими.

Докажем теперь, что y_1 и y_2 ЛНЗ, т. е $W[x] \neq 0$.

$$W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx \\ y_1' & \left(y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx \right)' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx \\ y_1' & y_1' \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx + y_1 \cdot \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{y_1 \cdot y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx} + e^{-\int p_1(x)dx} \cancel{- y_1 y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx} =$$

$$= e^{-\int p_1(x)dx} \neq 0, \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad y_1 \text{ и } y_2 \text{ ЛНЗ.}$$

$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – по теореме о структуре общего решения ЛОДУ

$$\boxed{y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}\,dx}$$

общее решение ЛОДУ 2-го порядка при известном частном решении $y_1(x)$

<u>пример:</u> $x y'' + y' - \frac{1}{x} y = 0, \qquad y_1 = \frac{1}{x}$

$p_1(x) = \frac{1}{x}$ т.к. $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}\,dx =$$

$$= C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{\frac{1}{x^2}}\,dx =$$

$$= C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot \frac{1}{x} \int x^2 e^{-\ln|x|}\,dx =$$

$$= C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot \frac{1}{x} \int x^2 \cdot \frac{1}{|x|}\,dx =$$

$$= C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \int |x|^{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{|x|}}\,dx =$$

$$= C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \int (\pm x)\,dx = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(\pm \frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot \left(\pm \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot x^{\cancel{2}} = C_1 \frac{1}{x} + C_3 \cdot x$$

Ответ: $y_{oo} = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot x$ Ответ