Лекция 11

19 апреля

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Ранее рассматривались ЛОДУ n-го порядка вида $y^{(n)}+p_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$, где $p_1(x),\ldots,p_n(x)$ были ф-ции от x. Частным случаем рассмотренных выше ЛОДУ n-го порядка яв-ся ЛОДУ с постоянными коэф-ми:

$$\boxed{y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0} \qquad (1)$$

где a_i – постоянные числа, $i=\overline{1,n}$.

Решение Д.У (1) ищем в виде $y=e^{kx}$, где $k=\mathrm{const}$, тогда
$$\begin{cases} y'=ke^{kx},\\ y''=k^2e^{kx},\\ \ldots\ldots\ldots\\ y^{(n)}=k^ne^{kx}.\end{cases}$$
Подставляем $y,y',\ldots,y^{(n-1)},y^{(n)}$ в исходное ур-ние (1) и получаем:

$$k^ne^{kx}+a_1k^{n-1}e^{kx}+\ldots+a_{n-1}ke^{kx}+a_ne^{kx}=0$$

$$\underset{\neq 0}{e^{kx}}\left(k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n\right)=0$$

$$\boxed{k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0} \qquad (2)$$

Решение (1) ищем именно в таком виде (в виде $y=e^{kx}$) так как только эта ф-ция сохраняет свой вид при дифференцировании ($(e^x)'=e^x$) и только эта функция отлична от нуля ($e^x\neq 0$) при $\forall x\in[a,b]$

При подстановке этого решения в (1), получаем (2). При такой подстановке не происходит потери корней. (было ДУ n-ой степени (1), а получили обычное степенное ур-ние тоже n-ой степени (2))

Уравнение (2) наз-ся характеристическим уравнением для ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами (1). Здесь многочлен n-ой степени $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$ получен из ДУ путём замены n-ой производной на n-ую степень. Уравнение (2) имеет n корней $k_1, \ldots, k_n$. Решая его, находим все k_i, $i = \overline{1, n}$.

По этим k_i, $i = \overline{1, n}$ строим ФСР ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} y_1 = e^{k_1 x} \\ y_2 = e^{k_2 x}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_n = e^{k_n x} \end{cases} \quad \text{— ФСР ЛОДУ (1)}$$

Общее решение ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэф-ми (1) имеет вид:

$$y_{оо} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n = C_1 e^{k_1 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

Методы построения общего решения ЛОДУ 2-го порядка по корням характеристического уравнения

Пусть дано ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэф-ми:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (1)$$

a_1, a_2 – константы

Решение будем искать в виде $y = e^{kx}$. Тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Подставим y, y', y'' в исходное уравнение (1): $k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0$

$$e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) = 0$$

$$\underset{0}{\neq} \quad k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$ – характеристическое уравнение

Найдём корни характеристического уравнения:

$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$$k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$k_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

Здесь возможны следующие три случая:

<u>случай 1</u>: Простые действительные различные корни характеристического уравнения.

k_1 и k_2 – действительные различные корни

$$k_1 \neq k_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$$D = a_1^2 - 4a_2 > 0$$

Тогда частные решения Д.У (1) – это $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Докажем, что эти решения л.н.з и образуют ФСР т.е их определитель Вронского отличен от нуля

$$W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= k_2 e^{(k_1+k_2)x} - k_1 e^{(k_1+k_2)x} = (k_2 - k_1) e^{(k_1+k_2)x}$$

$$\left.\begin{aligned} k_2 \neq k_1 \Rightarrow \ k_2 - k_1 \neq 0 \\ e^{(k_1+k_2)x} \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow W[x] \neq 0$$

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y_{оо} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

<u>пример</u>: $y'' - 3y' + 2y = 0$ ЛОДУ

$k^2 - 3k + 2$ хар. ур.

$D = 9 - 8 = 1$

$k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{aligned} k_1 = 2 \\ k_2 = 1 \end{aligned}$ ФСР $= \{e^{2x}, e^x\}$

$$y_{о.о} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

<u>случай 2</u>: Корни характеристического уравнения действительные и кратные

31

$D = 0 \Rightarrow \exists\, k_1 = k_2 = k, \ k \in \mathbb{R}$

действительные равные т.е кратные корни характеристического уравнения

$$k = -\frac{a_1}{2} \Rightarrow a_1 = -2k$$

Итак, мы имеем ЛОДУ 2-го порядка и знаем одно его частное решение

$$y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

Найдём второе частное решение ЛОДУ 2-го порядка:

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx = \left| \begin{array}{l} p_1(x) = a_1 = -2k \\ y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x} \end{array} \right| =$$

$$= e^{-\frac{a_1}{2}x} \int \frac{e^{-\int a_1 dx}dx}{e^{-a_1 x}} = e^{-\frac{a_1}{2}x} \cdot \int \frac{\cancel{e^{-a_1 x}}}{\cancel{e^{-a_1 x}}}dx =$$

$$= e^{-\frac{a_1}{2}x} \int dx = x e^{-\frac{a_1}{2}x} \Rightarrow$$

$$y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

$$y_2 = x \cdot e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

Проверим образуют ли y_1 и y_2 ФСР:

$$W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{a_1}{2}x} & x e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ -\frac{a_1}{2} e^{-\frac{a_1}{2}x} & e^{-\frac{a_1}{2}x} - \frac{a_1}{2} x e^{-\frac{a_1}{2}x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-a_1 x}\left(1 - \frac{a_1}{2}x\right) + \frac{a_1}{2} x e^{-a_1 x} = e^{-a_1 x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{ФСР} = \left\{ e^{-\frac{a_1}{2}x}, x e^{-\frac{a_1}{2}x} \right\}$$

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a_1}{2}x} =$$

$$= e^{-\frac{a_1}{2}x}\left(C_1 + C_2 x\right)$$

пример: $y'' + 6y' + 9y = 0$

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

$$(k+3)^2 = 0$$

$$k = k_1 = k_2 = -3$$

$$y_1 = e^{-3x}$$

$$y_2 = x \cdot e^{-3x}$$

$$y_{o.o} = c_1 e^{-3x} + x e^{-3x}$$

32

случай 3: Комплексные корни характеристического уравнения

$D < 0$, $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$.

$i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица

Формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

Итак, в случае 3 частными решениями диф. ур-ния яв-ся функции

$$\begin{cases} y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \end{cases}$$

Найдём два действительных частных решения диф. ур-ния (1). Для этого составим две линейные комбинации:

$$\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x=\tilde{y}_1$$

$$\frac{y_1-y_2}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x=\tilde{y}_2$$

ф-ции $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ также яв-ся решениями диф. ур-ния (1) по теореме о св-вах частных решений ЛОДУ (как лин. комб. частных решений). Эти решения образуют ФСР. Действительно:

$$W[x]=\begin{vmatrix}\tilde{y}_1(x) & \tilde{y}_2(x)\\ \tilde{y}_1'(x) & \tilde{y}_2(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x\\ (e^{\alpha x}\cos\beta x)' & (e^{\alpha x}\sin\beta x)'\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x\\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x\end{vmatrix}=$$

$$=e^{2\alpha x}\cos\beta x\cdot(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x)-e^{2\alpha x}\sin\beta x\cdot(\alpha\cos\beta x-$$
$$-\beta\sin\beta x)=\cancel{e^{2\alpha x}\alpha\cos\beta x\sin\beta x}+e^{2\alpha x}\beta\cos^2\beta x-$$
$$-\cancel{\alpha e^{2\alpha x}\cos\beta x\sin\beta x}+e^{2\alpha x}\beta\sin^2\beta x=$$
$$=e^{2\alpha x}\cdot\beta\neq 0 \quad \text{т.к. } \beta\neq 0 \text{ и } e^{2\alpha x}\neq 0$$

$$\text{ФСР}=\{e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x\}$$

$$y_{oo}=C_1\tilde{y}_1+C_2\tilde{y}_2=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$$

<u>пример</u>: $y'' + 4y' + 13y = 0$

$$k^2 + 4k + 13 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$

$\alpha = -2$
$\beta = 3$

$$y_1 = e^{-2x} \cos 3x$$

$$y_2 = e^{-2x} \sin 3x$$

$$y_{oo} = c_1 e^{-2x} \cos 3x + c_2 e^{-2x} \sin 3x$$

Построение общего решения ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэф-ми по корням характеристического уравнения

Пусть есть ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Соответствующее ему хар-ур-ние имеет вид:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

Различают следующие случаи:

(I) Хар. ур-ние имеет n различных действительных корней $k_1, k_2, \ldots, k_n$

$$\text{ФСР ЛОДУ} = \{ e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x} \}$$

Общее решение ЛОДУ n-го порядка имеет вид:

$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$,

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ – const

<u>пример</u>: $y^{(IV)} - 13y'' + 36y = 0$ ЛОДУ

$k^4 - 13k^2 + 36 = 0$ хар ур-ние

$k^2 = \lambda$

$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$

$D = 13^2 - 4 \cdot 36 = 169 - 144 = 25 = 5^2$

$\lambda_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2}$

$\lambda_1 = 9 \Rightarrow k_1 = 3, \; k_2 = -3$

$\lambda_2 = 4 \Rightarrow k_3 = 2, \; k_4 = -2$

ФСР ЛОДУ: $= \{e^{3x}, e^{-3x}, e^{2x}, e^{-2x}\}$

$y_{oo} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$, где

C_1, C_2, C_3, C_4 – const.

II) Хар. ур-ние имеет один действительный корень кратности n, то есть

$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k$

В этом случае ФСР ЛОДУ: $= \{y_1 = e^{kx}, y_2 = x e^{kx}, y_3 = x^2 e^{kx}, \ldots, y_n = x^{n-1} e^{kx}\}$

Общее решение ЛОДУ имеет вид:

$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = C_1 e^{kx} \; x e^{kx} + \ldots +$

$+C_n x^{n-1} e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x + \dots + C_n x^{n-1})$

пример: $y^{(IV)} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$ ЛНДУ

$k^4 - k^3 - 3k^2 + 5k - 2 = 0$ хар. ур.

$(k+2)(k-1)^3 = 0$

$k_1 = k_2 = k_3 = 1$

$k_4 = -2$

$$\begin{array}{l|l} k^4 - k^3 - 3k^2 + 5k - 2 & k-1 \\ \cline{2-2} -\,k^4 - k^3 & k^3 - 3k + 2 \\ \cline{1-1} \quad -3k^2 + 5k & \\ \quad -\,-3k^2 + 3k & \\ \quad\quad 2k - 2 & \\ \quad\quad -\,2k - 2 & \end{array}$$

$k_3 = 1$

$$\begin{array}{l|l} k^3 - 3k + 2 & k-1 \\ \cline{2-2} -\,k^3 - k^2 & k^2 + k - 2 \\ \cline{1-1} \quad k^2 - 3k & \\ \quad -\,k^2 - k & \\ \quad\quad -2k + 2 & \\ \quad\quad -\,-2k + 2 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$k_4 = 1$

$k^2 + k - 2 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9 = 3^2$

$k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$

$k_1 = 1$, $k_2 = -2$

$ФСР = \{e^x, xe^x, x^2 e^x, e^{-2x}\}$

$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_4 e^{-2x}$

III) Хар. ур. имеет комплексные корни кратности m.

В этом случае ФСР ЛОДУ состоит из $2m$ лнз решений или „m" пар решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \dots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \dots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

пример: $y^{(V)}+y^{(IV)}+2y'''+2y''+y'+y=0$ ЛОДУ

$k^5+k^4+2k^3+2k^2+k+1=0$ хар. ур.

$(k+1)(k^4+2k^2+1)=0$

$(k+1)(k^2+1)^2=0$

$k_1=1$, $k_2=k_3=i=0+1\cdot i$ $\Rightarrow \alpha=0,\ \beta=1$

$k_4=k_5=-i=0-1\cdot i$

кратность $m=2$.

$$\begin{array}{l|l}
k^5+k^4+2k^3+2k^2+k+1 & k+1 \\ \cline{2-2}
-\underline{k^5+k^4} & k^4+2k^2+1 \\
\quad -2k^3+2k^2 & \\
\quad \underline{\ \ 2k^3+2k^2} & \\
\qquad\quad -k+1 & \\
\qquad\quad \underline{\ \ k+1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

ФСР $=\{e^x,\ e^{0\cdot x}\cos x,\ e^{0\cdot x}\cdot x\cdot\cos x,\ e^{0\cdot x}\sin x,$

$e^{0\cdot x}\cdot x\cdot\sin x\}$

ФСР = $\{ e^x, \cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x \}$

Общее решение ЛОДУ имеет вид

$$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x\cos x +$$
$$+ C_5 x \sin x,$$ где

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – константы

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка.

Рассмотрим сначала общий случай ЛНДУ n-го порядка:

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x), \quad (1)$$

или

$$L[y] = f(x), \quad (1')$$

Здесь $p_1(x), \dots, p_n(x) \in C([a,b])$

Соответствующее ЛОДУ n-го порядка имеет вид:

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \quad (2)$$

или

$$L[y] = 0, \quad (2')$$

Здесь также $p_1(x), \dots, p_n(x) \in C([a,b])$.

Начальные условия: $\begin{cases} y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y_0', \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$ (3)

Теорема о структуре общего решения ЛНДУ n-го порядка. (30в)

Общее решение ЛНДУ n-го порядка (1) с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэф-ми $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$ равно сумме общего решения ЛОДУ n-го порядка (2) и какого-либо частного решения ЛНДУ (1) т.е $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$ (4)

Док-во:

Докажем, что (4) – решение ЛНДУ (1). Подставим (4) в (1'), получим:

$$L[y_{он}] = L[y_{оо}+y_{чн}] \overset{T_1^*}{=} L[y_{оо}] + L[y_{чн}] =$$

$$= 0 + f(x) = f(x).$$

Так как $L[y_{оо}] = 0$,

$L[y_{чн}] = f(x)$, $\Rightarrow y_{он}$ – решение ЛНДУ (1).

Докажем теперь, что (4) – общее решение.

Для этого представим (4) в виде:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n + y_{чн}, \quad (4,1)$$

где $y_1, \dots, y_n$ – ФСР ЛОДУ (2)

Так как ф-ции $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то по теореме $\exists!$ решения задачи Коши для диф. ур-ния n-го порядка $\exists!$ решение задачи Коши (2), (3) или частное решение (2) удовлетворяющее нач. условию (3).

Таким образом остаётся показать, что если (4.1) и его производные удовлетворяют начальным условиям (3), то из начального условия м/о единственным образом определить константы $\overset{\circ}{C}_1, \dots, \overset{\circ}{C}_n$, т.е можно выделить частное решение, удовлетворяющее нач. условию. А решение, из которого м/о выделить частное наз-ся общим. Докажем это. Продифференцируем $(n-1)$ раз (4.1) и воспользуемся нач. условием (3):

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) + y_{чн}(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) + y_{чн}'(x_0) = y_0', \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) + y_{чн}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = y_0 - y_{чн}(x_0), \\ c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = y_0' - y_{чн}'(x_0), \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_{чн}^{(n-1)}(x_0), \end{cases} \quad (5)$$

$\forall x_0 \in [a, b]$. Определитель Вронского этой системы имеет вид:

$$W[x] = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

т.к. $y_1, \dots, y_n$ ФСР ЛОДУ (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!$ решение СЛАУ (5) $C_1^0, \dots, C_n^0$, проходящее ч/з точку x_0, тогда функция

$y = C_1^0 y_1 + \dots + C_n^0 y_n + y_{чн}$ – частное решение ЛНДУ (1) $\Rightarrow$ $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n + y_{чн}$ (4.1) – общее решение ЛНДУ (1)

ч.т.д.

Теорема о наложении (суперпозиции) частных решений ЛНДУ

Если $y = y_i$ – решения ур-ния $L[y] = f_i(x)$, то линейная комбинация $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ – есть решение уравнения $L[y] = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$

Док-во

Так как y_i – решения ур-ния $L[y] = f_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, то верны равенства:

$$\begin{cases} L[y_1] = f_1, \\ L[y_2] = f_2, \\ \dots \\ L[y_n] = f_n. \end{cases}$$

Проверим, что $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ есть решение уравнения $L[y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$:

$$L[y] = L\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right] \overset{T_1^*}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} L[\alpha_i y_i] \overset{T_2^*}{=\!=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L[y_i] \overset{\text{по условию}}{=\!=\!=\!=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$$

ч.т.д.