Лекция 12 26 апреля

Метод Лагранжа. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения решения ЛНДУ 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных (34В)

Рассмотрим ЛНДУ 2-го порядка

$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$, (1). Соответствующее ему ЛОДУ 2-го порядка имеет вид

$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$. (2)

Пусть y_1, y_2 – два частных лн-з решения ЛОДУ (2). По теореме о структуре общего решения ЛОДУ $\Rightarrow$ $y_{оо} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1, C_2 – const, $\{y_1, y_2\}$ ФСР ЛОДУ (2)

Пусть теперь $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, тогда предполагаемое решение ЛНДУ имеет вид $y_{он} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$. (3)

Подставим (3) в (1), но для этого запишем (3) в более удобном виде

$y_{о.н} = \sum\limits_{i=1}^{2} C_i(x)y_i(x)$. Вычислим производные:

$$y'_{о.н} = \sum_{i=1}^{2} C_i'(x)y_i(x) + \sum_{i=1}^{2} C_i(x)y_i'(x)$$

Первое дополнительное условие Лагранжа

$$\boxed{\sum_{i=1}^{2} C_i'(x)y_i(x) = 0}$$ (4) Учитывая это условие

$y'_{о.н} = \sum\limits^{2} C_i(x)y_i'(x)$, а $y''_{о.н} = \sum\limits^{2} C_i'(x)y_i'(x) +$

$$+\sum_{i=1}^{2} c_i(x)\,y_i''(x)$$

Подставляем теперь все эти производные в (1), получаем:

$$\sum_{i=1}^{2} c_i' y_i' + \underline{\sum_{i=1}^{2} c_i y_i'' + p_1 \sum_{i=1}^{2} c_i y_i' +}$$

$$\underline{+p_2 \sum_{i=1}^{2} c_i y_i} = f$$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i' y_i' + \sum_{i=1}^{2} c_i \underbrace{\left(y_i'' + p_1 y_i' + p_2 y_i\right)}_{=0} = f$$

т.к y_1, y_2 - частные лнз решения ЛОДУ (2)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{2} c_i' y_i' = f} \quad (5) \text{ – Второе условие Лагранжа}$$

Предполагаемое решение (4) ЛНДУ (1) будет являться решением (1), если ф-ции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют условиям (4), (5)

Итак, д/б выполнены условия

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} c_i' y_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{2} c_i' y_i' = f \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f, \end{cases} \text{ где}$$

$$W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{т.к } y_1, y_2 \text{ лнз}$$

$\Rightarrow \exists!$ решение системы (4), (5).

Решаем эту систему, находим

$$\begin{cases} c_1'(x) = \varphi(x), \\ c_2'(x) = \psi(x). \end{cases}$$ Интегрируем:

$$\begin{cases} c_1(x) = \int \varphi(x)\,dx + c_1, \\ c_2(x) = \int \psi(x)\,dx + c_2, \end{cases} \quad \forall c_1, c_2 - const$$

Подставляем последнее соотношение в предполагаемое решение (3), получаем

$$y_{он} = \left(\int \varphi(x)\,dx + c_1\right) y_1 + \left(\int \psi(x)\,dx + c_2\right) y_2 =$$

$$= \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2}_{y_{оо}} + \underbrace{\int \varphi(x)\,dx \cdot y_1 + \int \psi(x)\,dx \cdot y_2}_{y_{чн}}$$

Пример: $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ ЛНДУ

$y'' + y = 0$ ЛОДУ

$k^2 + 1 = 0$ хар. ур-ние

$k^2 = -1$

$k = \pm i \quad \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \pm 1$

$ФСР = \{e^{ix}, e^{-ix}\} = \{\cos x, \sin x\}$

$y_{oo} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ – общее решение ЛОДУ

$y_{oн} = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$ – предполагаемое решение ЛНДУ

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0, \\ -c_1 \sin x + c_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Решаем последнюю систему:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} c_1' = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\operatorname{tg} x, \\ c_2' = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\int \operatorname{tg} x\, dx, \\ c_2 = \int dx \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = -\int \dfrac{\sin x\, dx}{\cos x} = \int \dfrac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + \tilde{c}_1 \\ c_2 = x + \tilde{c}_2 \quad , \forall \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \end{cases}$$

$$y_{o.н} = \left(\ln|\cos x| + \tilde{c}_1\right) \cos x + \left(x + \tilde{c}_2\right) \sin x =$$

$$= \underbrace{\cos x \cdot \ln|\cos x| + x \cdot \sin x}_{y_{ч.н}} + \underbrace{\tilde{c}_1 \cos x + \tilde{c}_2 \sin x}_{y_{o.o}}$$

Ответ: $y_{o.н} = \left(\ln|\cos x| + \tilde{c}_1\right) \cos x + \left(x + \tilde{c}_2\right) \sin x =$

$$= \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x + \tilde{c}_1 \cos x + \tilde{c}_2 \sin x$$

Замечание: Если y_1, y_2, y_3 — три частных л.н.з решения, тогда

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0 \\ c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' = f \end{cases}$$

$$W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

Метод построения частных решений ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (квазиполиномом)

33

Рассмотрим ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$, (1) ЛНДУ

Соответствующее ему ЛОДУ n-го порядка имеет вид:

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$, (2) ЛОДУ

Выписываем характеристическое уравнение:

$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0$ (3)

Находим корни этого характеристического уравнения: $k_1, k_2, \dots, k_n$, а затем и ФСР ЛОДУ n-го порядка (2) — это ф-ции $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$.

Тогда $y_{oo} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n =$

$= C_1 e^{k_1 x} + \dots + C_n e^{k_n x}$

Если правая часть ЛНДУ n-го порядка (1) – ф-ция f(x) представлена спец. видом, то есть в виде квазиполинома, то методом подбора или методом неопределённых коэффициентов можно определить $y_{чн}$.

Суть метода неопределённых коэффициентов заключается в следующем: по виду ф-ции f(x) записывается ожидаемая форма предполагаемого частного решения ЛНДУ (1) с неопределёнными коэффициентами. Затем это предполагаемое решение подставляется в исходное уравнение (1) и из полученного тождества определяются значения неопределённых коэффициентов.

Случай I: $\boxed{f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, P_n – многочлен степени n.

В этом случае частное решение ЛНДУ (1) ищем в виде: $\boxed{y_{чн} = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x) x^r}$, где

Q_n – многочлен той же степени n, но с неопределёнными коэффициентами, r – кратност (т.е сколько раз α является действительным корнем характеристического уравнения),

например, $\begin{cases} \alpha = k_1 \\ \alpha = k_1 = k_2 \\ \alpha \neq k_i, \ i = \overline{1,n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = 2 \\ r = 0 \end{cases}$

пример: $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ ЛНДУ

1) $y'' + 2y' + y = 0$ ЛОДУ

$k^2 + 2k + 1 = 0$ хар. ур-ние

$(k+1)^2 = 0$

$k = -1 = k_1 = k_2$

$ФСР = \{e^{-x}, xe^{-x}\}$ ЛОДУ

$y_{oo} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

2) $f(x) = e^{2x} \cdot 1 \Rightarrow \alpha = 2$

1 – константа – многочлен нулевой степени т.е $n = 0$

$\alpha = 2 \neq k_1 = k_2 = -1 \Rightarrow r = 0$

$P_n(x) = P_0(x) = 1 \Rightarrow Q_n(x) = Q_0(x) = A$

$y_{чн} = A \cdot e^{2x} \cdot x^0 = \underline{\underline{A}} e^{2x}$ – предполагаемый вид частного решения ЛНДУ (1

A – неопределённый коэф-нт

Подставим $y_{чн}$ в ЛНДУ (1):

$$\left.\begin{aligned} y'_{чн} &= 2Ae^{2x} \\ y''_{чн} &= 4Ae^{2x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4Ae^{2x} + 2 \cdot 2Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x}$$

$9Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 9A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{9}$ – определим неопределённый коэффициент $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн} = \frac{1}{9} e^{2x}$ – частное решение ЛНДУ (1).

3) Тогда по теореме о структуре общего решения ЛНДУ имеем:

$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x}$

Ответ: $y_{он} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x}$

Случай II: $\boxed{f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x}$

где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

В этом случае частное решение ЛНДУ (1) ищем в виде:

$\boxed{y_{чн} = e^{\alpha x} \cdot (M_s(x) \cos \beta x + N_s(x) \sin \beta x) \cdot x^r}$,

где $M_s(x), N_s(x)$ – многочлены степени s

$s = \max\{n, m\}$ с неопределёнными коэффициентами, r – кратность т.е. сколько раз $\alpha \pm \beta i$ повторяется среди комплексных корней характеристического, например,

$$\begin{cases} \alpha \pm \beta i \neq k_1 = k_2 \Rightarrow r = 0 \\ \alpha \pm \beta i = k_1 = k_2 \Rightarrow r = 1 \\ \alpha \pm \beta i = k_{1,2} = k_{3,4} \Rightarrow r = 2 \end{cases}$$

пример: Указать вид общего решения ЛНДУ без вычисления коэффициентов:

$y^{(V)} - 5y^{(IV)} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + x^2 e^{x} - xe^{-2x} \cos 3x$

1) ЛОДУ: $y^{(V)} - 5y^{(IV)} + 4y''' = 0$

$k^5 - 5k^4 + 4k^3 = 0$ хар. ур-ние

$k^3(k^2 - 5k + 4) = 0$

$k_1 = k_2 = k_3 = 0$ $\quad k^2 - 5k + 4 = 0$

$D = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$k_{4,5} = \frac{5 \pm 3}{2}$

$k_4 = 4$

$k_5 = 1$

$ФСР = \{e^{0\cdot x}, x\cdot e^{0\cdot x}, x^2\cdot e^{0\cdot x}, e^{4x}, e^x\} =$

$= \{1, x, x^2, e^{4x}, e^x\}$ ЛОДУ

$y_{oo} = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 x + \tilde{c}_3 x^2 + \tilde{c}_4 e^{4x} + \tilde{c}_5 e^x, \ \forall \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4$

2) $f = 2 + xe^{-2x} + x^2 e^x - xe^{-2x}\cos 3x =$

$= f_1 + f_2 + f_3 + f_4$, где

$f_1 = 2 = 2\cdot e^{0\cdot x} \Rightarrow \alpha = 0, n = 0, r = 3$ т.к $\alpha = k_1 = k_2 = k_3 =$

$f_2 = xe^{-2x} \Rightarrow \alpha = -2, n = 1, r = 0$ т.к $\alpha \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4 \neq$

$f_3 = x^2 e^x \Rightarrow \alpha = 1, n = 2, r = 1$ т.к $\alpha = k_5 = 1$

$f_4 = -xe^{-2x}\cos 3x \Rightarrow \alpha = -2, n = 1, r = 0$ т.к

$-2 \pm 3i \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4 \neq k_5$

$y_{1чн} = A_1 \cdot e^{0\cdot x} \cdot x^3 = A_1 x^3$

$$y_{2\text{чн}} = \underbrace{(A_2 x + B_2)}_{Q_2} e^{-2x} \cdot x^0 = (A_2 x + B_2) e^{-2x}$$

$$y_{3\text{чн}} = \underbrace{(A_3 x^2 + B_3 x + C_3)}_{Q_3} e^{x} \cdot x^1 =$$

$$= (A_3 x^2 + B_3 x + C_3) e^{x} \cdot x$$

$$y_{4\text{чн}} = e^{-2x} \Big((A_4 x + B_4) \cos 3x + (A_5 x + B_5) \sin 3x \Big) \cdot x^0 =$$

$$= e^{-2x} \Big((A_4 x + B_4) \cos 3x + (A_5 x + B_5) \sin 3x \Big)$$

$$y_{\text{чн}} = y_{1\text{чн}} + y_{2\text{чн}} + y_{3\text{чн}} + y_{4\text{чн}} = A_1 x^3 + (A_2 x + B_2) e^{2x} + (A_3 x^2 + B_3 x + C_3) e^{x} \cdot x + e^{-2x} \Big((A_4 x + B_4) \cos 3x + (A_5 x + B_5) \sin 3x \Big)$$

3) $$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3 x^2 + \tilde{C}_4 e^{x} + \tilde{C}_5 e^{4x} + A_1 x^3 + (A_2 x + B_2) e^{2x} + (A_3 x^2 + B_3 x + C_3) e^{x} \cdot x + e^{-2x} \Big((A_4 x + B_4) \cos 3x + (A_5 x + B_5) \sin 3x \Big)$$

Ombem: $y_{one} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3 x^2 + \tilde{C}_4 e^{x} + \tilde{C}_5 e^{4x} + A_1 x^3 +$

$+ (A_2 x + B_2) e^{2x} + (A_3 x^2 + B_3 x + C_3) x e^{x} +$

$+ e^{-2x} \left((A_4 x + B_4) \cos 3x + (A_5 x + B_5) \sin 3x \right)$

LE