Лекция 13

3 мая

36 Системы диф. ур-ний

37 Нормальные системы диф. ур-ний

Опр 1: Системой диф. ур-ний 1-го порядка наз-ся совокупность диф. ур-ний, каждое из которых содержит независимую переменную „x", искомые ф-ции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ и их первые производные.

Общий вид системы диф. ур-ний 1-го порядка имеет вид:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) = 0, \\ F_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) = 0. \end{cases}$$

Опр 2: Нормальной системой диф. ур-ний наз-ся система диф. ур-ний 1-го порядка, разрешённых относительно старшей производной, т. е

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \\ y_2' = f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)). \end{cases} \quad (1)$$

Опр 3: Решением нормальной системы (1) наз-ся „n" ф-ций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, после подстановки которых в систему (1) имеем верное тождество.

Задача Коши для нормальной системы диф. ур. и теорема ∃! решения задачи Коши для нормальной системы диф. ур-ний.

Задача Коши для нормальной системы диф. ур. заключается в отыскании "n" ф-ций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, являющихся решением системы диф. ур-ний (1) и удовлетворяющих начальным условиям (2).

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}, \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x_0) = y_{n0}. \end{cases} \quad (2) \text{ - начальные условия}$$

Теорема ∃! решения задачи Коши для нормальной системы диф. ур-ний:

Если в системе (1) все ф-ции $f_1, \dots, f_n$ и их частные производные $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial y_n}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_n}$ существуют и непрерывны в некоторой области D $(n+1)$-го пространства и эта область D содержит точку $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$, то в некоторой окрестности точки x_0 ∃! решение $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ нормальной системы диф. ур-ний (1), удовлетворяющих нач. условиям (2).

Симметричная форма нормальной системы диф. ур-ний. Интегрируемые комбинации. Первые интегралы нормальной системы диф. ур-ний и их применение для решения нормальной системы диф. ур-ний. 2

37

Рассмотрим нормальную систему диф. ур-ний

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_2' = \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n' = \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

Умножим все уравнения системы на dt и поделим на f_i, $i = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{f_1} = dt, \\ \dfrac{dx_2}{f_2} = dt, \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{f_n} = dt \end{cases}$$

Правые части последнего ур-ний равны, следовательно и левые части также равны

$$\boxed{\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n}} \quad (2)$$

Равенство (2) наз-ся симметричной формой записи нормальной системы диф. ур-ний (1)

Системы (1) и (2) м/о решить методом интегрируемых комбинаций. Метод заключается в следующем: с помощью подходящих арифметических операций (сложение, вычитание и т.д) из уравнений системы получают так называемые интегральные комбинации

Опр 4: Интегр. комбинацией наз. диф. ур-ние являющееся следствием системы (1) или (2), но уже легко интегрируемое.

Каждая интегрируемая комбинация даёт один первый интеграл.

Опр 5: Первым интегралом системы (1) или (2) наз-ся ур-ние вида $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n) = C$, которое при фиксированном значении C после подстановки в него решения $x_1, \ldots, x_n$ системы (1) или (2) обращается в верное тождество.

Опр 6: Совокупность независимых „n" первых интегралов системы даёт общий интеграл этой системы (т.е ответ — решение системы) примеры:

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases}$ нормальная система диф. ур.

Цель: найти $x_1(t), x_2(t)$ - ?

Решение:

1 шаг: Сложим уравнения системы, получим

$$\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_1 \quad \text{или}$$

$$\boxed{\frac{d(x_1+x_2)}{dt} = x_2 + x_1}$$ - первая интегральная комбинация

2 шаг: Вычтем уравнения системы, получим

$$\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} = x_2 - x_1 \quad \text{или}$$

$$\boxed{\frac{d(x_1-x_2)}{dt} = x_2 - x_1}$$ - вторая интегральная комбинация

3 шаг: Интегрируем

$$\int \frac{d(x_1+x_2)}{x_1+x_2} = \int dt$$

$$\ln|x_1+x_2| = t + C_1 \quad \forall C_1$$

$$\int \frac{d(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = -\int dt$$

$\ln|x_1 - x_2| = -t + C_2 \quad \forall C_2$

Итак, первый интеграл системы:

$$\boxed{x_1 + x_2 = e^t \cdot \tilde{C}_1}$$

второй интеграл системы:

$$\boxed{x_1 - x_2 = e^{-t} \cdot \tilde{C}_2}$$

4 шаг: Общий интеграл

Сложим первый и второй интегралы:

$$2x_1 = e^t \cdot \tilde{C}_1 + e^{-t} \cdot \tilde{C}_2$$

$$\boxed{x_1 = e^t \cdot \hat{C}_1 + e^{-t} \cdot \hat{C}_2}$$

Вычтем первый и второй интегралы:

$$2x_2 = e^t \cdot \tilde{C}_1 - e^{-t} \cdot \tilde{C}_2$$

$$\boxed{x_2 = e^t \cdot \hat{C}_1 - e^{-t} \cdot \hat{C}_2}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = e^t \cdot \hat{C}_1 + e^{-t} \cdot \hat{C}_2 \\ x_2 = e^t \hat{C}_1 - e^{-t} \cdot \hat{C}_2 \end{cases}$

2) Пусть нормальная система диф. ур-ний задана симметричной формой

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$$

Цель: $y(x)$, $z(x)$ - ?

Решение:

1 шаг: Сложим все числители и все знаменатели

$$\frac{d(x+y+z)}{0}=k$$

$\boxed{d(x+y+z)=0}$ первая интегральная комб.

Интегрируем: $\boxed{x+y+z=C_1}$ первый интеграл

2 шаг: Сложим все числители и знаменатели предварительно умножив на x, y, z соответственно:

$$\frac{x\,dx}{x(y-z)}=\frac{y\,dy}{y(z-x)}=\frac{z\,dz}{z(x-y)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}dx^2+\frac{1}{2}dy^2+\frac{1}{2}dz^2}{0}=k$$

$\boxed{d(x^2+y^2+z^2)=0}$ вторая интегральная комб.

$\boxed{x^2+y^2+z^2=C_2}$ второй интеграл.

3 шаг: Общий интеграл

$$\begin{cases} x+y+z=C_1 & \text{- плоскость} \\ x^2+y^2+z^2=C_2 & \text{- сфера} \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Интегральная кривая — это окружность.

36 Сведение нормальной системы дифференциальных уравнений к одному диф. уравнению высшего порядка

Пусть задана нормальная система диф. ур-ний

$$\begin{cases} y_1'=f_1(x,y_1,\dots,y_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n'=f_n(x,y_1,\dots,y_n) \end{cases} \quad (1)$$

Дифф-уем по „x" любое ур-ние из (1), например первое:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \underbrace{\frac{dy_1}{dx}}_{y_1' = f_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \underbrace{\frac{dy_2}{dx}}_{y_2' = f_2} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \underbrace{\frac{dy_n}{dx}}_{y_n' = f_n}$$

Заметим, что
$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{dy_1}{dx} = f_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y' = \dfrac{dy}{dx} = f_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n$$

Обозначим $\boxed{y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}$ (*)

$$F_2(x, y_1, \ldots, y_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n$$

Дифференцируя теперь (*) и пользуясь (1), т.е проводя аналогичные рассуждения, получаем систему:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_1'' = F_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_1''' = F_3(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \quad (2)$$

Из первых „(n-1)" уравнений системы (2) выразим $y_2, y_3, \ldots, y_n$ ч/з $x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$

Получаем:

$$\begin{cases} y_2 = \Psi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \Psi_3(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \Psi_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}). \end{cases} \quad (3)$$

Теперь подставим (3) в последнее уравнение системы (2): $y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots, \Psi_n)$ или

$$y_1^{(n)} = \Phi(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}).$$

Решая последнее уравнение, находим ф-цию $y_1 = \varphi_1(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$. Подставляем её в систему (3) и находим $y_2, \dots, y_n$ т.е

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, c_1, \dots, c_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, c_1, \dots, c_n) \end{cases}$$

Вывод: Нормальная система диф. ур-ний м/б заменена одним диф. ур-нием, порядок которого равен числу уравнений системы.

пример: Решить систему диф. ур-ний

$$\begin{cases} y' = 4y - 3z, & (1) \\ z' = 2y - 3z. & (2) \end{cases}$$

Решение: Диф. 1-ое уравнение системы, получаем: $y'' = 4y' - 3z' \overset{(2)}{=\!=} 4y' - 3(2y - 3z) =$

$$= 4y' - 6y + 9z = \left| \begin{array}{l} \text{Из } (1) \Rightarrow 3z = 4y - y' \\ z = \frac{1}{3}(4y - y') \end{array} \right| =$$

$y'' = y_1'' = y_2' = y_3$

. . . .

$y^{(n-1)} = y_1^{(n-1)} = y'_{n-1} = y_n$

$$y^{(n)} = y_n' = f(x) - p_1(x)\underbrace{y^{(n-1)}}_{=y_n} - p_2(x)\underbrace{y^{(n-2)}}_{y_{n-1}} - \ldots - p_{n-1}(x)\underbrace{y'}_{y_2} - p_n(x)\underbrace{y}_{y_1}$$

Тогда получаем нормальную систему из „n" диф. ур-ний:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ \ldots\ldots\ldots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x) - p_1(x)y_n - \ldots - p_{n-1}(x)\,y_2 - p_n(x)y_1 \end{cases}$$

Вывод: одно диф. ур-ние n-го порядка свели к нормальной системе из „n" диф. ур.

пример: $y^{IV} + 2xy''' - x^3y' = x^5 + xe^x$

Пусть $y = y_1$, тогда

$y' = y_1' = y_2$

$y'' = y_2' = y_3$

$y''' = y_3' = y_4$

$$y^{IV} = y_4' = x^5 + xe^x - 2x\underbrace{y''}_{y_3} + x^3\underbrace{y'}_{y_2} = x^5 + xe^x - 2x\,y_4 + x^3y_2$$

$y'' = y_1'' = y_2' = y_3$

. . . .

$y^{(n-1)} = y_1^{(n-1)} = y'_{n-1} = y_n$

$$y^{(n)} = y_n' = f(x) - p_1(x)\underbrace{y^{(n-1)}}_{=y_n} - p_2(x)\underbrace{y^{(n-2)}}_{y_{n-1}} - \ldots - p_{n-1}(x)\underbrace{y'}_{y_2} - p_n(x)\underbrace{y}_{y_1}$$

Тогда получаем нормальную систему из „n" диф. ур-ний:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ \ldots\ldots\ldots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x) - p_1(x)y_n - \ldots - p_{n-1}(x)y_2 - p_n(x)y_1 \end{cases}$$

Вывод: одно диф. ур-ние n-го порядка свели к нормальной системе из „n" диф. ур.

пример: $y^{IV} + 2xy''' - x^3y' = x^5 + xe^x$

Пусть $y = y_1$, тогда

$y' = y_1' = y_2$

$y'' = y_2' = y_3$

$y''' = y_3' = y_4$

$$y^{IV} = y_4' = x^5 + xe^x - 2x\underbrace{y''}_{y_3} + x^3\underbrace{y'}_{y_2} = x^5 + xe^x - 2xy_4 + x^3y_2$$