Вариант 5

Гавриков Леонид
ИУ1-21

Теория

№1 Система ф-ий $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ наз-ся линейно зависимой на $[a;b]$, если их линейная комбинация равна 0: $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$ и при этом $\exists$ хотя бы один коэф-т $C_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$

Система ф-ий $y_1(x) \dots y_n(x)$ наз-ся линейно независимой на $[a;b]$, если $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$ и при этом $\forall C_i = 0$, $i = \overline{1,n}$

№2
Тh: Если $y = y_i$ $(i = \overline{1,n})$ есть частные решения ЛНДУ: $L[y] = f_i(x)$, то их линейная комбинация $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ — есть решение ЛНДУ:
$L[y] = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x)$

Док-во:

По условию:
$$\begin{cases} L[y_1] = f_1(x) \\ L[y_2] = f_2(x) \\ \dots \\ L[y_n] = f_n(x) \end{cases}$$

Проверим, является ли их линейная комбинация решением ЛНДУ.

$$L[y] = L[C_1 y_1 + \dots + C_n y_n] = C_1 L[y_1] + \dots + C_n L[y_n] = C_1 f_1(x) + \dots + C_n f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x)$$

ч.т.д.

Задачи

№1

$y_1 = e^x \quad y_2 = x$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x(1-x) \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ линейно независимы, значит могут задавать ФСР

Ур-е:

$$\begin{vmatrix} y & e^x & x \\ y' & e^x & 1 \\ y'' & e^x & 0 \end{vmatrix} = -y \cdot e^x - y'(-e^x \cdot x) + y'' \cdot (e^x - e^x \cdot x) =$$

$= y''(1-x) + y' \cdot x - y = 0$

$y'' + \frac{x}{1-x} y' - \frac{1}{1-x} y = 0$ – для этого ур-я выполнены условия т. Коши при $\forall x \neq 1$

Ответ: $y'' + \frac{x}{1-x} y' - \frac{1}{1-x} y = 0$, при $\forall x \neq 1$

№2

$y'' = (x+1)(y')^2 \qquad y=3 \quad y' = -2 \quad x=0$

Замена: $\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p'(x) \end{cases}$

$p'(x) = (x+1)(p(x))^2$

$p' = (x+1)\,p^2$

$\int \frac{dp}{p^2} = \int (x+1)\,dx \Rightarrow -\frac{1}{p} = \frac{x^2}{2} + x + C_1$

$\frac{1}{2} = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{p} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$

$p = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}}$

$p = -\frac{2}{x^2+2x+1} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(x+1)^2}$

$\int dy = \int -\frac{2}{(x+1)^2}\,d(x+1)$

$y = \frac{2}{x+1} + C_2 \Rightarrow 3 = 2 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$

$y = \frac{2}{x+1} + 1$

Ответ: $y = \frac{2}{x+1} + 1$

№3

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

1) $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 = i^2$

$\lambda_{1,2} = \pm i \rightarrow y_1 = \cos x$

$\searrow y_2 = \sin x$

$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2) Пусть $y_{оч} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases} \qquad f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \cdot \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

По правилу крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tg\, x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -tg\,x \\ C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x| + C_1 \\ C_2(x) = \int dx = x + C_2 \end{cases}$$

$$y_{он} = (\ln|\cos x| + C_1)\cos x + (x + C_2)\sin x$$

Ответ: $(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \cos x \ln|\cos x| + x \cdot \sin x$

№4

$$y^{V} + 64y''' = x^5 - 12x\cos 8x - 3\sin x + x^2 e^{-4x}$$

1) $\lambda^5 + 64\lambda^3 = 0$

$\lambda^3(\lambda^2 + 64) = 0$

$\lambda^2 = -64 = +64i^2 \Rightarrow \lambda_{4,5} = \pm 8i$

$\lambda_{1,2,3} = 0$

$y_1 = e^{0x} = 1$

$y_2 = xe^{0x} = x$

$y_3 = x^2 e^{0x} = x^2$

$y_4 = \cos 8x$

$y_5 = \sin 8x$

$$y_{oo} = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot \cos 8x + C_5 \cdot \sin 8x$$

2) $$f(x) = \underbrace{x^5}_{f_1(x)} - \underbrace{12x\cos 8x}_{f_2(x)} - \underbrace{3\sin x}_{f_3(x)} - \underbrace{x^2 e^{-4x}}_{f_4(x)}$$

$$f_1(x) = x^5 \quad \begin{cases} n = 5 \\ \alpha = 0 \\ r = 3 \end{cases} \rightarrow y_{rn_1} = x^3(A_1 x^5 + B_1 x^4 + C_1 x^3 + D_1 x^2 + E_1 x + F_1)$$

$$f_2(x) = -2x\cos 8x$$

$$\begin{cases} n = 1 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 8 \\ r = 1 \end{cases} \rightarrow y_{rn_2} = x^1((A_2 x + B_2)\cos 8x + (C_2 x + D_2)\sin 8x)$$

$$f_3(x) = -3\sin x$$

$$\begin{cases} n = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ r = 0 \end{cases} \rightarrow y_{rn_3} = x^0(A_3 \sin x + B_3 \cos x)$$

$$f_4(x) = x^2 e^{-4x}$$

$$\begin{cases} n = 2 \\ \alpha = -4 \\ r = 0 \end{cases} \rightarrow y_{rn_4} = e^{-4x}(A_4 x^2 + B_4 x + C_4)$$

Ответ: $y_{oн} = y_{oo} + y_{rn_1} + y_{rn_2} + y_{rn_3} + y_{rn_3}$