Кудинов Леонид
РК №2

Вариант 8

1) Ур-е $k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$ называется характеристическим ур-ем дифференциального ур-я n-го порядка, которое получается заменой всех производных на показатель степени при k.

2) Формула Остроградского-Лиувилля

Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ - решение ЛОДУ второго порядка

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0,$$ где

ф-ции $a_1(x)$ и $a_2(x)$ определены и непрерывны на промежутке I

Определитель Вронского решений $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' \cdot y_2$$

$$\omega'(x) = y_1' \cdot y_2' + y_1 \cdot y_2'' - (y_1'' y_2 + y_1' y_2') = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \quad (1)$$

~~Т.к~~ Поскольку $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — решения ДУ, что они удовлетворяют этому ур-ю, т.е

$$y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1 = 0$$

$$y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2 = 0$$

Откуда

$$y_1'' = -a_1(x) y_1' - a_2(x) y_1$$

$$y_2'' = -a_1(x) y_2' - a_2(x) y_2$$

Подставим эти выражения в (1)

$$\omega'(x) = y_1(-a(x) y_2' - a_2(x) y_2) - y_2(-a_1(x) y_1' - a_2(x) y_1)$$

$$= -a_1(x) y_1 y_2' - a_2(x) y_1 y_2) + a_1(x) y_2 y_1' + a_2(x) y_2 y_1 =$$

$$= -a_1(x) y_1 y_2' + a_1(x) y_2 y_1' = -a_1(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') =$$

$$= -a_1(x) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -a_1(x)\,\omega(x)$$

Таким образом $\omega'(x) = -a(x)\,\omega(x)$ или

$\omega'(x) + a_1(x)\omega(x) = 0$ => ~~можно~~ можно составить ур-е относительно $\omega(x)$

$y = \omega(x)$ => $y' + a_1(x)y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -a_1(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -a_1(x)dx \Rightarrow \int$$

$$\ln|y| = -\int a_1(x)dx + \ln C,\ C = const$$

$$y(x) = Ce^{-\int a_1(x)dx}$$

При условии, что $y(x_0) = \omega(x_0)$, где $x_0 \in I$ имеем $y(x) = \omega(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$

Практика

№1

$y_1 = \sin x$; $y_2 = \cos x$

Две ф-ции образуют ФСР, если они лин. независимы $\frac{\sin x}{\cos x} = tg x \neq const$ => линейно независимые => образуют ФСР

Общ. вид ур-я второго порядка:

$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$

$-\sin x + p_1(x)\cos x + p_2(x)\sin x = 0$

$-\cos x - p_1(x)\sin x + p_2(x)\cos x = 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1(x)\cos x + p_2(x)\sin x = \sin x \\ -p_1(x)\sin x + p_2(x)\cos x = \cos x \end{cases}$$

По ф-ле Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sin x & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p_1(x) = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow p_2(x) = 1$$

$y'' + y = 0$

Ответ: $y'' + y = 0$

№2

$$x y'' + 2y' = \frac{1}{x^2}, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=0$$

$$\begin{cases} y' = p \\ y'' = p' \end{cases} \Rightarrow \cancel{x} p' + 2p = \frac{1}{x^{3}}$$ / $x=0$ – не явл корнем. т.к $\frac{1}{x^2} \neq 0$

$$p' + \frac{2}{x} p = \frac{1}{x^3} \text{ – ЛНДУ}$$

$$p' + \frac{2}{x} p = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2p}{x}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2dx}{x}$$ / $p=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow y''=0; \ y=C$

$\frac{1}{x^2} \neq 0 \Rightarrow y'=0$ – не явл. решением

$$\ln|p| = -2\ln|x| + C \Rightarrow p = \frac{C_1}{x^2}$$

$$C_1 = C_1(x) \Rightarrow p' = \frac{C_1' x^2 - 2C_1 x}{x^4}$$

$$\frac{C_1' x^2 - 2C_1 x}{x^4} + \frac{2}{x} \cdot \frac{C}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{C_1' x^2}{x^4} = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow \frac{C_1'}{x^2} = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow C_1' = \frac{1}{x}$$

$$C_1 = \ln|x| + C_2$$

$$p = \frac{C_1}{x^2} = y' \Rightarrow y' = \frac{\ln|x| + C_2}{x^2}$$

Найдём C_2

$$0 = \frac{0 + C_2}{1} \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y' = \frac{\ln|x|}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln|x|}{x^2}$$

$$\int dy = \int \frac{\ln|x|\, dx}{x^2}$$

$$y = -\frac{\ln|x| + 1}{x} + C_3$$

Подставим $y(\cancel{2}1) = 1$; $y'(1) = 0$

$1 = -1 + C \Rightarrow C_2 = 2$, тогда

$$y = 2 - \frac{\ln|x| + 1}{x}$$

Ответ: $y = 2 - \dfrac{\ln|x| + 1}{x}$

№3

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$$

Хар-ое ур-е:

$k^2 - 4k + 4 = 0$

$D = 16 - 16 = 0$

$k = 2 \Rightarrow$ ФСР $\{e^{2x}; xe^{2x}\}$

$y_{оо} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

$y_{он} = C_1(x) e^{2x} + C_2(x) x e^{2x}$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{2x} + C_2'(x) x e^{2x} = 0 \\ C_1'(x) \cdot e^{2x} + C_2'(x)(e^{2x} + 2x e^{2x}) = \dfrac{e^{2x}}{x} \end{cases}$$

По формуле Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} + 2xe^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ \dfrac{e^{2x}}{x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = 0 - e^{4x} = -e^{4x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{e^{2x}}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{4x}}{x}$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{e^4}{e^{4x}} = -1 \Rightarrow C_1 = -1\int dx = -x + \tilde{C}_1$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{e^{4x}}{x e^{4x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow C_2 = \ln|x| + \tilde{C}_2$$

Подставим в $y_{он}$

$$y_{он} = (-x + \tilde{C}_1)e^{2x} + (\ln|x| + \tilde{C}_2^*)xe^{2x}$$

Ответ: $y_{он} = \tilde{C}_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + xe^{2x}(\ln|x| - 1)$

N 4

$$y^{VI} - y'' = x - 1 + xe^{-x} + x\sin x - xe^x\cos x$$

$$k^6 - k^2 = 0$$

$$k^2(k^4 - 1) = 0$$

$$k_{1,2} = 0;\ k_{3,4} = \pm 1;\ k_{5,6} = \pm i$$

$$y_1 = 1;\ y_2 = x;\ y_3 = e^x;\ y_4 = e^{-x};\ y_5 = \sin x;\ y_6 = \cos x$$

$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-4} + C_5 \sin x + C_6 \cos x$

$f_1 = x e^{-x}$; $\alpha = -1 \Rightarrow r = 1$

$n = 1$

$y_{1чн} = (Ax + B) e^{-x} \cdot x$

$f_2 = (x - 1) e^{0x}$; $\alpha = 0 \Rightarrow r = 2$

$n = 1$

$y_{2чн} = (Cx + D) e^{0x} x^2 = (Cx + D) x^2$

$f_3 = e^{0x} \sin x$; $\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow r = 1$

$n = 1$

$y_{3чн} = x((Ex + F)\cos x + (Hx + G)\sin x)$

$f_4 = -x e^x \cos x$; $\alpha = 1$; $\beta = 1 \Rightarrow r = 0$

$n = 1$

$y_{4чн} = e^x((Kx + L)\cos x + (Mx + N)\sin x)$

Ответ:

$$y_{он} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x} + C_5 \sin x + C_6 \cos x$$

$$+ (Ax+B)e^{-x}x + (Cx+D)x^2 + ((Ex+F)\cos x +$$

$$(Hx+G)\sin x)x + ((Kx+L)\cos x + (Mx+N)\sin x)e^{x}$$