# Занятие №8

## Кривые и поверхности второго порядка

## Приведение кривых второго порядка к каноническому виду

Опр 1: Поверхностью второго порядка в $\mathbb{R}^n$ наз-ся мн-во точек $x \in \mathbb{R}^n$, координаты которых $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ в данной прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению

$$\boxed{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j}_{\text{I часть}} + \underbrace{2 \sum_{k=1}^{n} b_k x_k}_{\text{II часть}} + \underbrace{c}_{\text{III часть}} = 0.}$$

$a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ хотя бы один отличен от нуля

$c \in \mathbb{R}$

Если $n = 3$, то поверхность второго порядка представляет собой обычную поверхность в пространстве

Если $n = 2$, то кривую на плоскости.

I часть: кв. форма поверхности (кривой)

II часть: лин. слагаемое

III часть: const.

Уравнение поверхности 2-го порядка приводится к каноническому виду

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + 2\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + C = 0.}$$

| Ауд. | Д/З |
|---|---|
| 4.226 | 4.227 |
| 4.228 | 4.229 |
| 4.231 | 4.230 |

4.226 Написать каноническое ур-ние кривой второго порядка, определить её тип и найти каноническую систему координат

$$\underbrace{9x^2 - 4xy + 6y^2}_{\text{I часть}} + \underbrace{16x - 8y}_{\text{II часть}} \underbrace{- 2}_{\text{III часть}} = 0.$$

1 шаг Приводим к каноническому виду

I часть - кв. форма

$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ - матрица кв. формы

$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0$

$54 - 9\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

$54 - 15\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$

$D = 225 - 200 = 25 = 5^2$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{15 \pm 5}{2}$

$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 10$

$\lambda = 5$

$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg\, A = 1$   $x$ баз. пер
$y$ своб. пер.

$2x - y = 0$

$x = \frac{1}{2} y$

$\begin{cases} y = c \\ x = \frac{1}{2} c \end{cases} \Rightarrow X^{\lambda=5} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$c = 2 \Rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ нормируем

$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 10$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Rg\, A = 1 \Rightarrow$ $x$ баз. пер
$y$ св. пер.

$x + 2y = 0$

$x = -2y$

$y = c$

$x = -2c$

$X^{\lambda=10} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c = 1 \Rightarrow$ $E_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ нормируем

$\overline{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ортогональная матрица

$X = V X'$

$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') \end{cases}$ преобразование

I часть $= 9x^2 - 4xy + 6y^2 = 5(x')^2 + 10(y')^2$

$\underline{\text{II} + \text{III}}$ часть $= 16x - 8y - 2 =$

$= 16 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - \frac{8}{\sqrt{5}}(2x' + y') - 2 =$

$= \cancel{\frac{16}{\sqrt{5}}x'} - \frac{32}{\sqrt{5}}y' - \cancel{\frac{16}{\sqrt{5}}x'} - \frac{8}{\sqrt{5}}y' - 2 =$

$= -\frac{40}{\sqrt{5}}y' - 2$

$\underline{\text{I} + \text{II} + \text{III}} = 5(x')^2 + 10(y')^2 - \frac{40}{\sqrt{5}}y' - 2 =$

$= 5(x')^2 + 10\left((y')^2 - 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{4}{5} - \frac{4}{5}\right) -$

$- 2 = 5(x')^2 + 10\left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{40}{5} - 2 =$

$= 5(x')^2 + 10\left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 10 = 0$

2 шаг: Определяем вид поверхности / кривой

$$\boxed{\frac{(x')^2}{2} + \frac{\left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{1} = 1}$$ Эллипс.

3 шаг: Находим каноническую систему координат

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{(x'')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y'')^2}{1^2} = 1}$$

Выразим $x, y$ ч/з $x'', y''$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} (x' - 2y') = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(x'' - 2y'' - \frac{4}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (x'' - 2y'') - \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} (2x' + y') = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2x'' + \frac{2}{\sqrt{5}} + y''\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (2x'' + y'') + \frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} (x'' - 2y'') - \frac{4}{5}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} (2x'' + y'') + \frac{2}{5} \end{cases}$$ мин. преобр. координат

4 шаг:

Построение

1 шаг: Откладываем $\vec{e}_1 \to Ox'$
$\vec{e}_2 \to Oy'$

2 шаг: $$\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{\left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{1} = 1$$

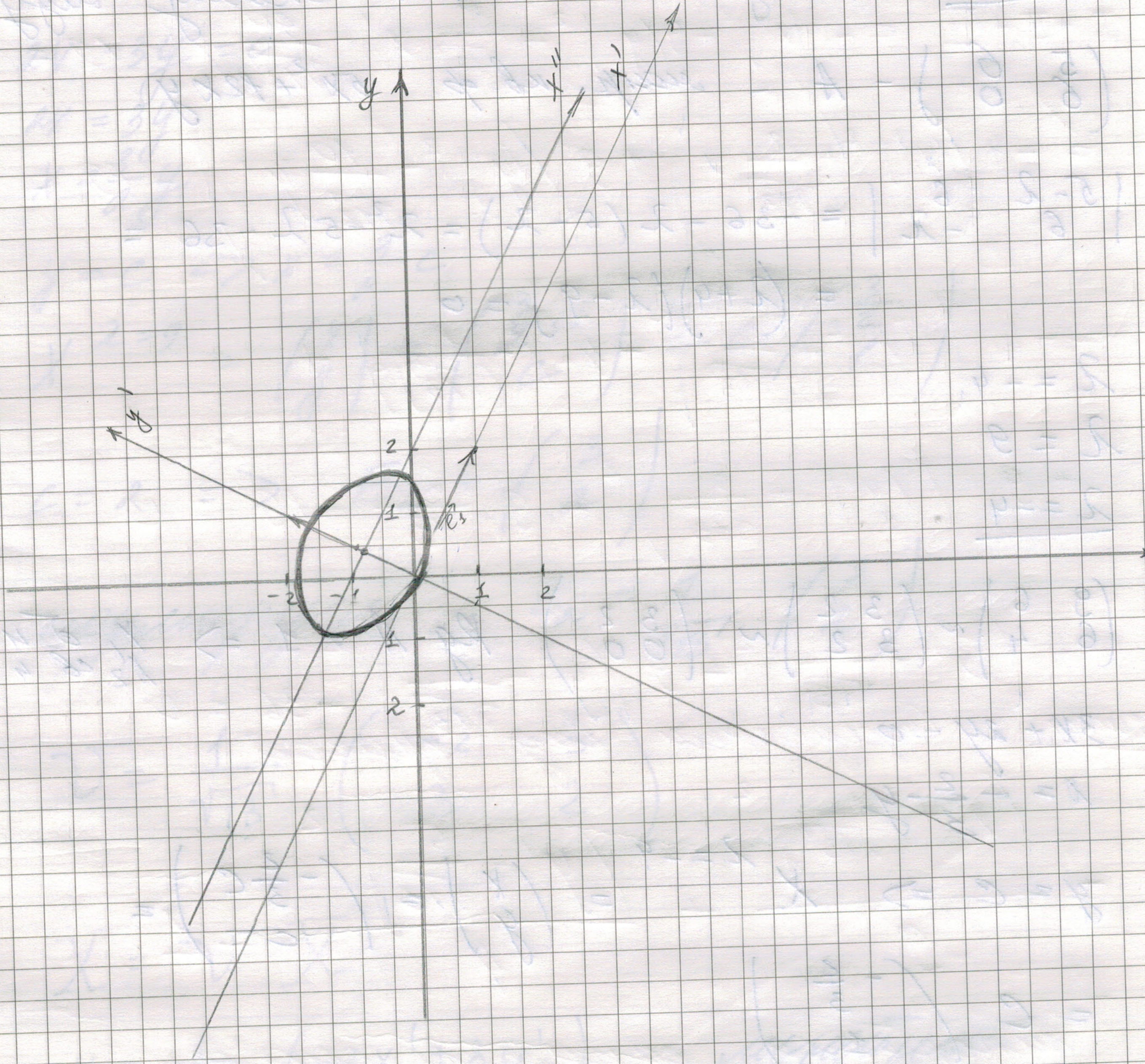
а) по оси $Ox'$ остаёмся на месте;

б) по оси $Oy'$ сдвигаемся на $\frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,9$ вправо и проводим ось $Ox'' \parallel Ox'$

3 шаг: Строим эллипс

$$\frac{(x'')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y'')^2}{1^2} = 1$$

с полуосями $a = \sqrt{2}$
$b = 1$



4.228

$$\underbrace{5x^2+12xy}_{I}\underbrace{-22x-12y}_{II}\underbrace{-19}_{III}=0$$

<u>1 шаг</u> Приводим к каноническому виду

$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ — $A$ — матр. кв. ф. $5x^2+12xy$.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = -36-\lambda(5-\lambda)=\lambda^2-5\lambda-36=$$
$$=(\lambda+4)(\lambda-9)=0$$

$\lambda=-4$

$\lambda=9$

<u>$\lambda=-4$</u>

$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Rg\,A=1 \Rightarrow$ $x_1$ б. ч. $x_2$ св. ч.

$3x+2y=0$

$x=-\frac{2}{3}y$

$y=c \Rightarrow X^{\lambda=-4}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}c \\ c \end{pmatrix}=$

$=c\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$c=3 \Rightarrow E_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

нормируем $e_1=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda = 9$

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Rg\ A = 1$$

$\Rightarrow x_1$ б. пер

$x_2$ св. пер.

$2x - 3y = 0$

$2x = 3y$

$x = \frac{3}{2} y$

$y = c \Rightarrow x = \frac{3}{2} c$

$$X^{\lambda = 9} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = 2 \Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

нормируем $\quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$V = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = V X'$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}} (-2x' + 3y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}} (3x' + 2y') \end{cases}$$

линейное преобразование

$$I = \text{кв.ф} = 5x^2 + 12xy = -4(x')^2 + 9(y')^2$$

$$II + III = -22x - 12y - 19 = \frac{1}{\sqrt{13}}(-44x' - 66y' +$$

$$+ 36x' - 24y') - 19 = \frac{1}{\sqrt{13}}(-8x' - 90y')$$

$$I + II + III = -4(x')^2 + 9(y')^2 - \frac{8}{\sqrt{13}}x' - \frac{90}{\sqrt{13}}y' - 19 =$$

$$= -4\left((x')^2 + \frac{2}{\sqrt{13}}x\right) + 9\left((y')^2 - \frac{10}{\sqrt{13}}y'\right) - 19 =$$

$$= -4\left((x') + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{(\sqrt{13})^2}\right) +$$

$$+ 9\left((y') - \frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2 - 9\cdot\frac{25}{13} - 19 = 0$$

$$-4\cdot\left(x' + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2 - 36 = 0$$

2шаг: Определяем вид кривой

$$\boxed{-\frac{\left(x' + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2}{9} + \frac{\left(y' - \frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2}{4} = 1}$$

гипербола сопряжённая

3шаг: Находим каноническую систему координат

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{13}} \\ y'' = y' - \frac{5}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

$$\boxed{-\frac{(x'')^2}{3^2}+\frac{(y'')^2}{2^2}=1}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{13}}(2x'+3y')=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(2x''-\frac{2}{\sqrt{13}}+3y''+\right.$$

$$\left.+\frac{15}{\sqrt{13}}\right)=\frac{1}{\sqrt{13}}(2x''+3y'')+1$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{13}}(-3x'+2y')=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(-3x''+\frac{3}{\sqrt{13}}+\right.$$

$$\left.+2y''+\frac{10}{\sqrt{13}}\right)=\frac{1}{\sqrt{13}}(-3x''+2y'')+1$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{13}}(2x''+3y'')+1 \\ y=\frac{1}{\sqrt{13}}(-3x''+2y'')+1 \end{cases}$$ мен. преоб. координат

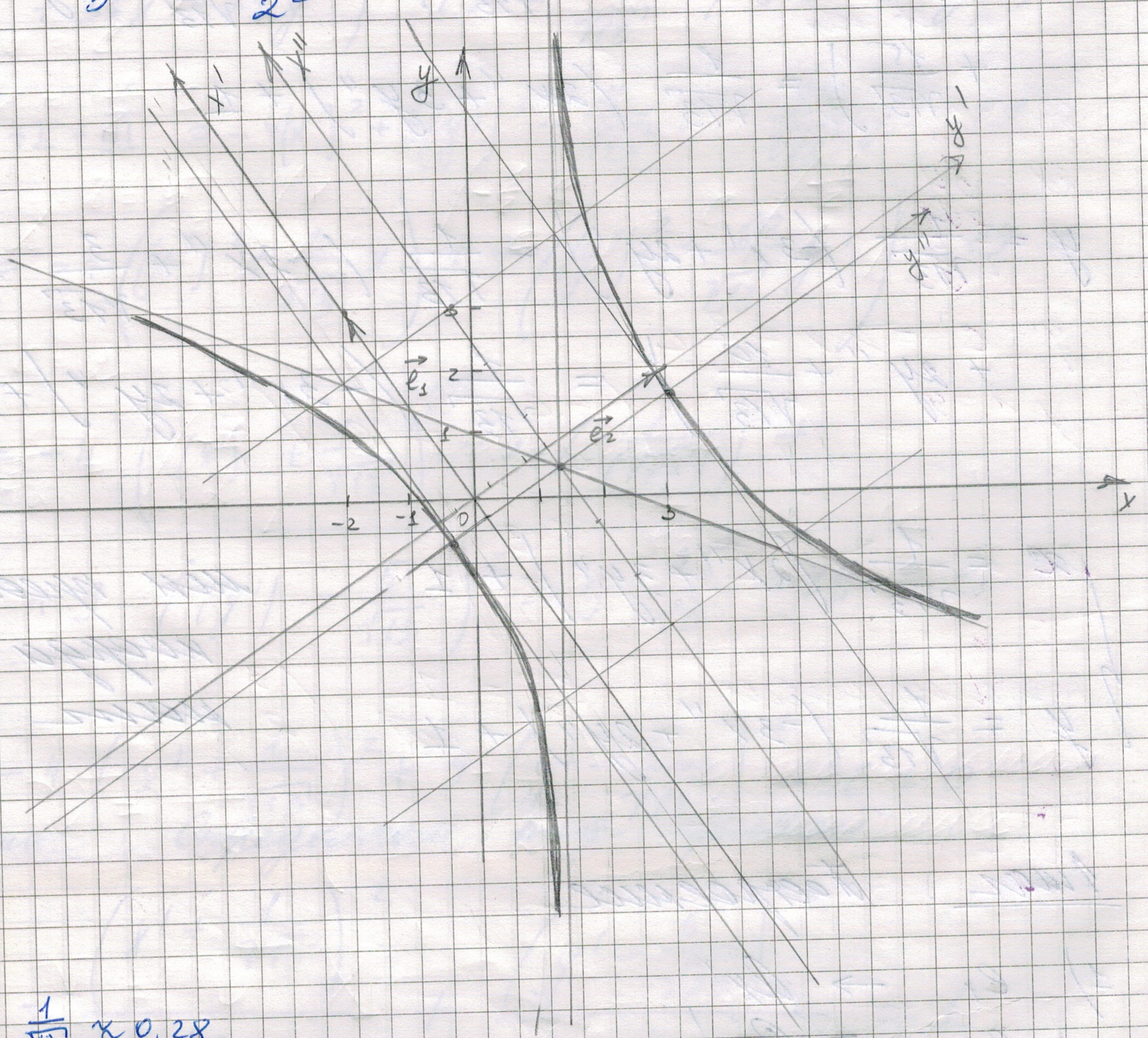
<u>4 шаг</u>: Построение.

1) $e_1 \to Ox'$,
$e_2 \to Oy'$

2) $$\begin{cases} x''=x'+\frac{1}{\sqrt{13}} \\ y''=y'-\frac{5}{\sqrt{13}} \end{cases}$$ – сдвигаем центр сист. коор $Ox'y'$

3. В системе $Ox''y''$ строим гиперболу сопряжённую

$$-\frac{(x'')^2}{3^2}+\frac{(y'')^2}{2^2}=1.$$




$\frac{1}{\sqrt{13}} \approx 0,28$

$\frac{5}{\sqrt{13}} \approx 1,4$

4.231 $x^2-4xy+4y^2-4x+3y-7=0$.

↑ ошибка в условии

1 шаг:

$x^2-4xy+4y^2$ — кв. ф

$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ — матрица кв. ф

$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(1-\lambda)(4-\lambda)-4=0$

$\cancel{4}-\lambda-4\lambda+\lambda^2-\cancel{4}=0$

$\lambda^2-5\lambda=0$

$\lambda(\lambda-5)=0$

$\lambda=0,\ \lambda=5.$

$\lambda=0$

$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $Rg\,A=1$

$x=2y$ $x$ б. н.

$y$ св. н. $y=c$

$x=2c$

$X^{\lambda=0}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c\\ c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

$c=1 \Rightarrow E_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow$ нормируем

$\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda=5$

$\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $Rg\,A=1$

$2x + y = 0$

$x = -\frac{1}{2}y$

$x$ б. пер.

$y$ св. пер.

$y = c$

$x = -\frac{1}{2}c$

$$X^{\lambda=5} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$c = 2$

$$E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{нормируем}$$

$$\overline{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ ортогональная матрица

$$X = U X'$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \end{cases}$$ лин. преобр.

кв. форма $= I = x^2 - 4xy + 4y^2 = 0 \cdot (x')^2 + 5 \cdot (y')^2$

$$x^2-4xy+4y^2-4x+3y-7=5y'^2-4(2x'-y')\frac{1}{\sqrt5}+$$

$$+3\cdot\frac{1}{\sqrt5}(x'+2y')-7=(\sqrt5 y')^2-\frac{8}{\sqrt5}x'+\frac{4}{\sqrt5}y'+$$

$$+\frac{3}{\sqrt5}x'+\frac{6}{\sqrt5}y'-7=(\sqrt5 y')^2-\frac{10}{\sqrt5}y'-\frac{5}{\sqrt5}x'-7=$$

$$=5\left(y'^2-\frac{2}{\sqrt5}y'\right)-\frac{5}{\sqrt5}x'-7=$$

$$=5\left(y'-2\cdot\frac{1}{\sqrt5}y'+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}\cdot 8-7$$

$$=5\left(y'-\frac{1}{\sqrt5}\right)^2-\sqrt5 x'-8=0$$

$$5\left(y'-\frac{1}{\sqrt5}\right)^2=8+\sqrt5 x'$$

$$\left(y'-\frac{1}{\sqrt5}\right)^2=\frac{\sqrt5}{5}\left(x'+\frac{8}{\sqrt5}\right)=\frac{1}{\sqrt5}\left(x'+\frac{8}{\sqrt5}\right)$$

$$\begin{cases} y'-\frac{1}{\sqrt5}=y'' \\ x'+\frac{8}{\sqrt5}=x'' \end{cases}$$

$$\boxed{y''^2=2\cdot\frac{1}{2\sqrt5}x'} \qquad p=\frac{1}{2\sqrt5}$$

Парабола

$$x=\frac{1}{\sqrt5}(2x'-y')=\frac{1}{\sqrt5}\left(2x''-\frac{16}{\sqrt5}-y''-\frac{1}{\sqrt5}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}(2x''-y'')-\frac{17}{5}$$

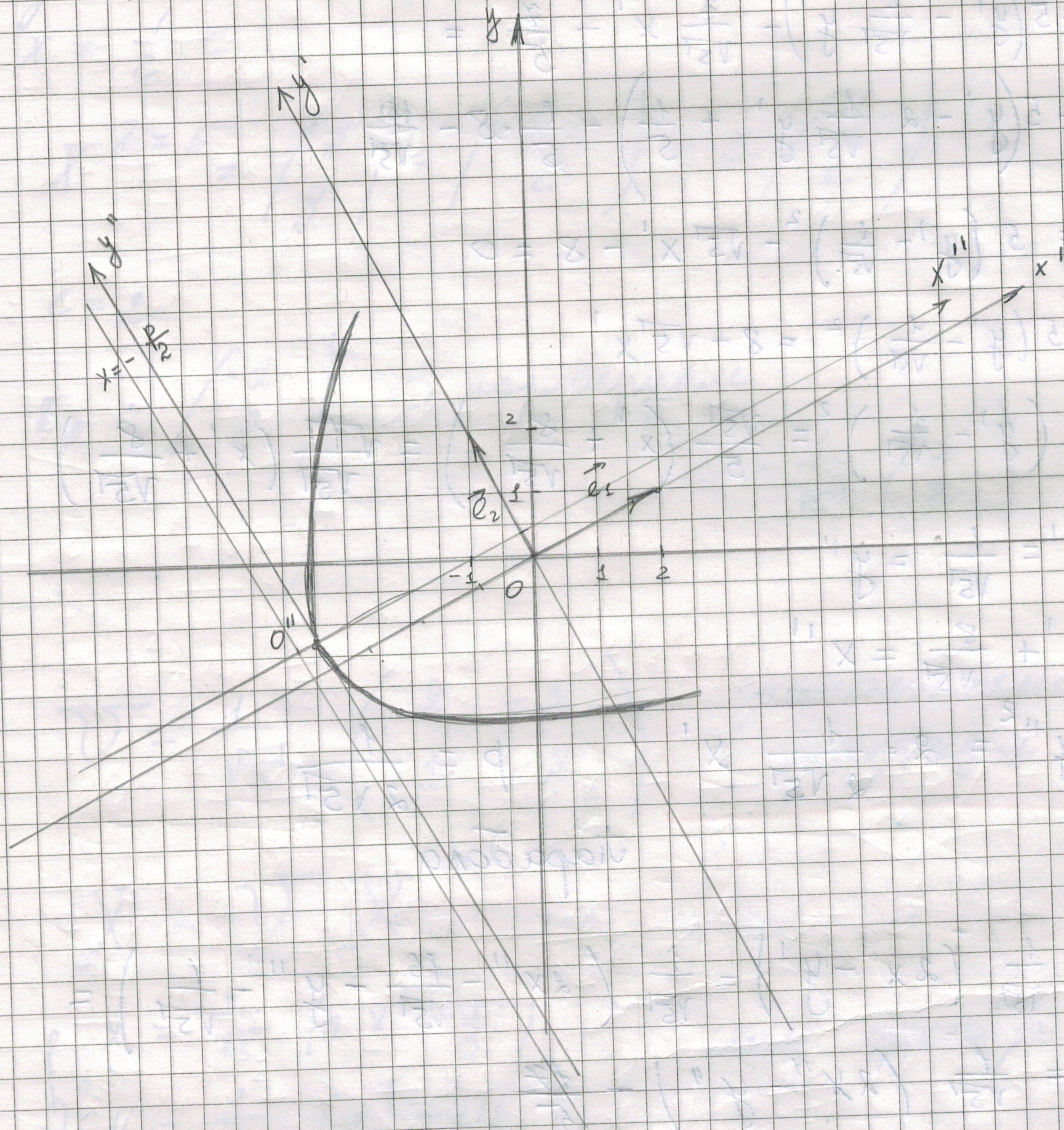
$$y=\frac{1}{\sqrt5}(x'+2y')=\frac{1}{\sqrt5}\left(x''-\frac{8}{\sqrt5}+2y''+\frac{2}{\sqrt5}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}(x''+2y'')-\frac{6}{5}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2x'' - y'') - \frac{17}{5} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x'' + 2y'') - \frac{6}{5} \end{cases}$$

каноническая система координат.

Построение




$\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0{,}4$

$\frac{8}{\sqrt{5}} \approx 3{,}6$

Д/З. 4.227 +

$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(1-\lambda)^2-1=0$

$\cancel{1}-2\lambda+\lambda^2-\cancel{1}=0$

$\lambda(\lambda-2)=0$

$\lambda=0$

$\lambda=2$

$\lambda=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow Rg\,A=2$ $x$ - б.н. $y$ - св.н

$y=c \Rightarrow x=c$

$X^{\lambda=0}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow c=1$

$E_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ нормируем $\vec{e_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda=2 \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow Rg\,A=2$ $x$ б.н. $y$ св.н.

$x=-y$

$y=c \Rightarrow x=-c$

$X^{\lambda=2}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c\\ c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow c=1$

$E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ нормируем $\overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{X} = V X'$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' + y') \end{cases}$$

$$\underbrace{x^2 - 2xy + y^2} - 10x - 6y + 25 = 0$$

$$0 \cdot (x')^2 + 2(y')^2$$

$$2(y')^2 - 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (x' - y') - 6 \frac{1}{\sqrt{2}} (x' + y') + 25 = 0.$$

$$2(y')^2 - \frac{10}{\sqrt{2}} x' + \frac{10}{\sqrt{2}} y' - \frac{6}{\sqrt{2}} x' - \frac{6}{\sqrt{2}} y' + 25 =$$

$$2(y')^2 + \frac{4}{\sqrt{2}} y' - \frac{16}{\sqrt{2}} x' + 25 = 0.$$

$$2\left((y')^2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{16}{\sqrt{2}} x' + 25 = 0$$

$$2 \cdot \left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 + \frac{16}{\sqrt{2}} x' + 25 = 0.$$

$$2\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{16}{\sqrt{2}}x' - 24$$

$$\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{-8}{\sqrt{2}}x' - 12$$

$$\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{8}{\sqrt{2}}\left(x' + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} = y'' \\ x' + \frac{3}{\sqrt{2}} = x'' \end{cases}$$

$$y''^2 = -2\cdot\frac{4}{\sqrt{2}}x'' \qquad p = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{y''^2 = -2px''} \qquad \text{Парабола}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(x'' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) - \left(y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' - y'' - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' - y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(x'' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) + \left(y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' + y'' - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - y'') - \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'') - 2 \end{cases}$$

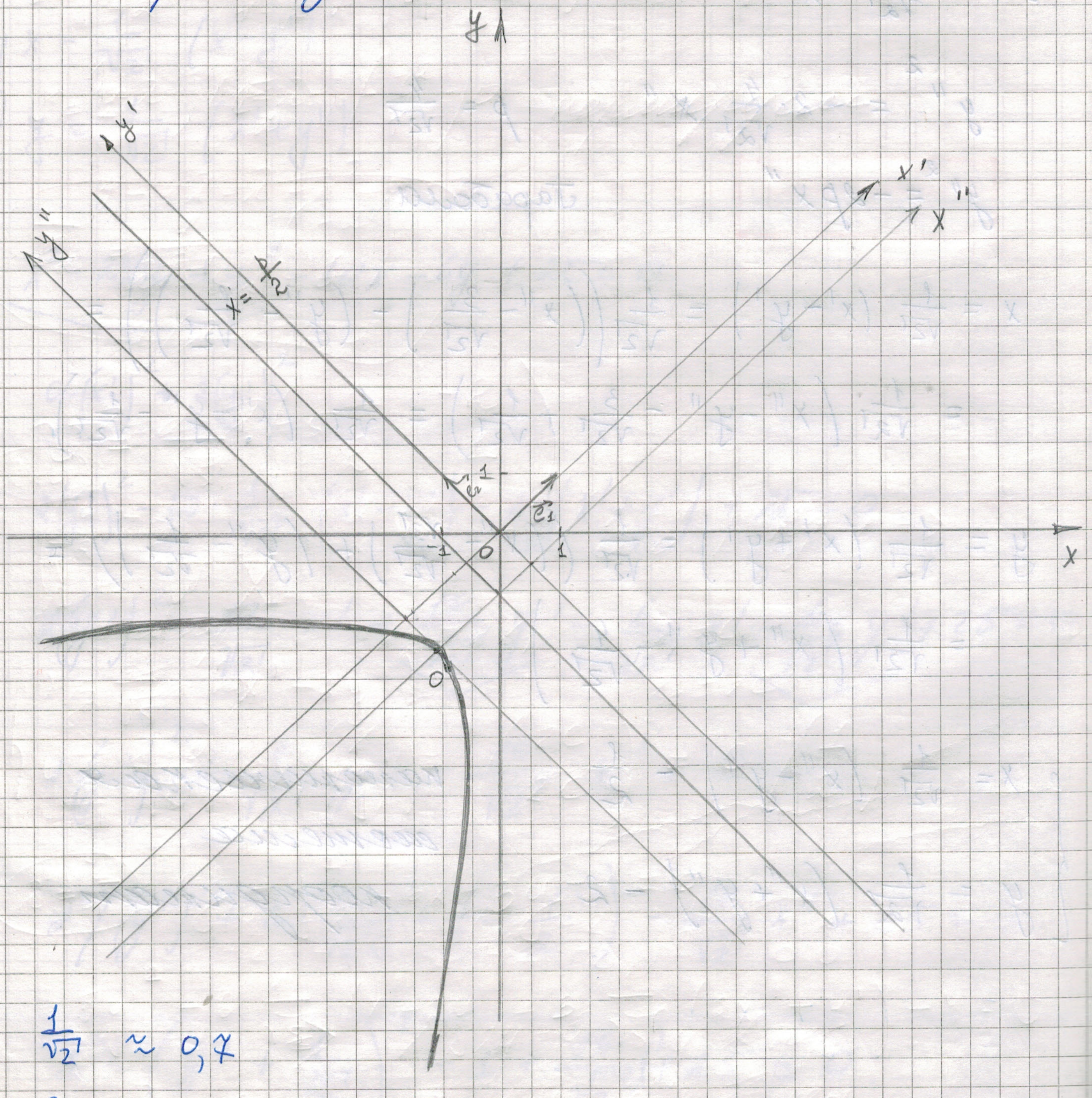
каноническая система координат

Построение

1) $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ – это $Ox'$ и $Oy'$

2) $Ox''$ $Oy''$

3) параболу.




$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$

$\frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,1$

4.229 $\quad 4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0.$

кв. форма $\quad 4x^2-4xy+y^2$

$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ матр. кв. формы

$\begin{vmatrix}4-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(4-\lambda)(1-\lambda)-4=0.$

$\cancel{4}-4\lambda-\lambda+\lambda^2-\cancel{4}=0$

$\lambda^2-5\lambda=0$

$\lambda(\lambda-5)=0.$

$\lambda=0, \quad \lambda=5$

$\lambda=0$

$\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad Rg\,A=1 \Rightarrow$

$x$ баз. пер. $\qquad 2x-y=0 \qquad y=c$

$y$ своб. пер. $\qquad x=\frac{1}{2}y \qquad x=\frac{1}{2}c$

$X^{\lambda=0}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}c\\ c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$

$c=2 \qquad E_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ нормируем

$\vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

$\lambda = 5$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Rg\,A = 1$

x б. пер.

y св. пер $\quad x + 2y = 0 \quad x = -2y \quad y = c$

$x = -2c$

$X^{\lambda=5} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c = 1 \quad E_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ нормируем

$\overline{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$X = V X'$

$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{cases}$

$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$

$5y'^2 - 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') - 4 = 0$

$5y'^2 - \cancel{\frac{6}{\sqrt{5}}x'} + \frac{12}{\sqrt{5}}y' + \cancel{\frac{6}{\sqrt{5}}x'} + \frac{3}{\sqrt{5}}y' - 4 = 0$

$$5\left(y'^2+\frac{3}{\sqrt{5}}y'\right)-4=0$$

$$5\left(y'+2\cdot\frac{3}{2\sqrt{5}}y'+\frac{9}{4\cdot 5}-\frac{9}{4\cdot 5}\right)-4=0$$

$$5\left(y'+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2-\frac{9}{4}-4=0.$$

$$5\left(y'+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2-\frac{25}{4}=0$$

$$\left(y'+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} y'+\frac{3}{2\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}}{2}=0, \\ y'+\frac{3}{2\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{2}=0. \end{array}\right.$$

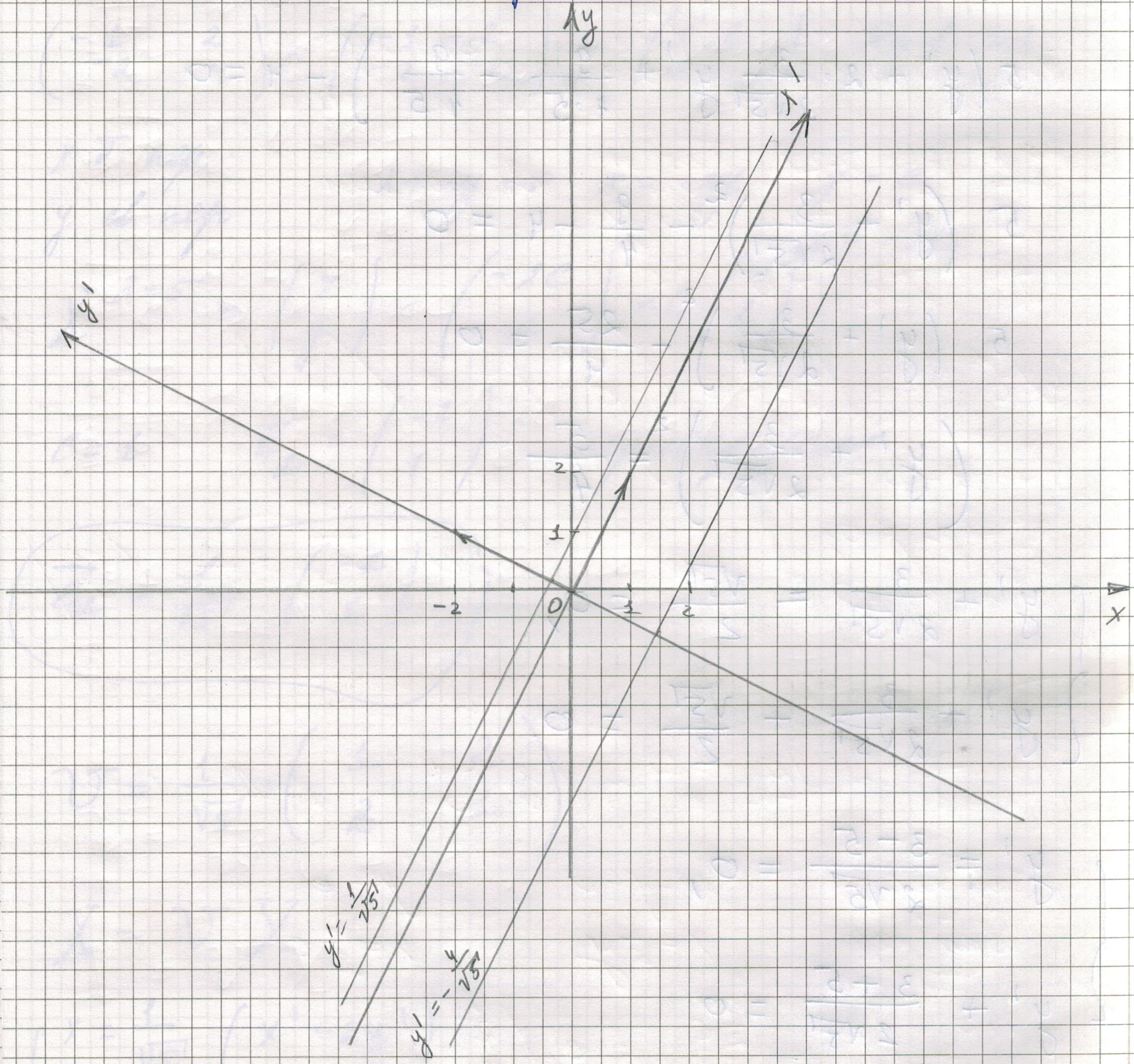
$$\left[\begin{array}{l} y'+\frac{3-5}{2\sqrt{5}}=0, \\ y'+\frac{3+5}{2\sqrt{5}}=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y'-\frac{1}{\sqrt{5}}=0, \\ y'+\frac{4}{\sqrt{5}}=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y'=+\frac{1}{\sqrt{5}}, \\ y'=-\frac{4}{\sqrt{5}}. \end{array}\right.$$

Пара параллельных прямых

## Построение




$\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,4$

$\frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1,6.$

4.230 $\quad 2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$

$A=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}$ матрица кв. ф

$\begin{vmatrix}2-\lambda & 2\\ 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(2-\lambda)(5-\lambda)-4=0$

$10-2\lambda-5\lambda+\lambda^2-4=0$

$\lambda^2-7\lambda+6=0$

$D=49-24=25=5^2$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{7\pm5}{2}$

$\lambda_1=6$

$\lambda_2=1$

$\lambda=6$

$\begin{pmatrix}-4&2\\2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&1\\2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad rg\,A=2$

$-2x+y=0 \quad y=2x$, $x$ св. пер. $\quad x=c$

$y$ - баз. пер $\quad y=2c$

$X^{\lambda=6}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\2c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$c=1 \Rightarrow E_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ нормируем

$\bar{e}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x + 2y = 0$$

$$x = -2y$$

$Rg\,A = 2$ $\qquad x$ б. н

$y$ св. н.

$y = c \Rightarrow x = -2c$

$$X^{\lambda=1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$c = 1$

$E_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ нормируем $\bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = V X'$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{cases}$$

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$$

$$6(x')^2 + (y')^2 - 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') - 1 = 0$$

$$6x'^2 - \underbrace{\frac{6}{\sqrt{5}}x'} + y'^2 + \underbrace{\frac{12}{\sqrt{5}}y'} - \underbrace{\frac{16}{\sqrt{5}}x'} - \underbrace{\frac{8}{\sqrt{5}}y'} - 1 = 0$$

$$y'^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}y' + 6x'^2 - \frac{22}{\sqrt{5}}x' - 1 = 0$$

$$y'^2 + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} + 6\left(x'^2 - \frac{22}{6\sqrt{5}}x'\right) - 1 = 0$$

$$\left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(x'^2 - \frac{11}{3\sqrt{5}}x' + \left(\frac{11}{6\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{11}{6\sqrt{5}}\right)^2\right) -$$

$$-1$$

$$\left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(x' + \frac{11}{6\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5} - 1 - \left(\frac{11}{6\sqrt{5}}\right)^2 = 0.$$

$$\left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(x' + \frac{11}{6\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{89}{36}$$

$$\frac{\left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{89}}{6}\right)^2} + \frac{6\cdot\left(x' + \frac{11}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{89}}{6}\right)^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{\left(y' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{89}}{6}\right)^2} + \frac{\left(x' + \frac{11}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{89}}{6\sqrt{6}}\right)^2} = 1}$$

Эллипс

$\frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}89$

$\frac{11}{\sqrt{5}} \approx 4{,}92$

$\frac{\sqrt{89}}{6} \approx 3{,}85$

$\frac{\sqrt{89}}{6\sqrt{6}} \approx 0{,}64$

## Построение