С.з. № 2. Тема: Предел и непрерывность ФНП

~~**Опр 1.** Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ область определения ф-ции f. $\mathcal{B}$ – база в мн-ве A. Точку $\vec{d} \in \mathbb{R}^n$ наз-ют пределом ф-ции $f: A \to \mathbb{R}^n$ по базе $\mathcal{B}$, если $\forall \varepsilon > 0,\ \exists b = b(\varepsilon) \in \mathcal{B},\ \forall x \in b$: $|f(x) - d| < \varepsilon$.~~

~~**Обозначение:** $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(\vec{x}) = \vec{d}$~~

Опр. 2. Если $f: A \to \mathbb{R}$, то $a \in \mathbb{R}$ наз-ют пределом ф-ции $f(P)$ при стремлении точки $P(x_1, \dots, x_n)$ к точке $P_0(a_1, \dots, a_n)$, если $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x$ из

$$0 < \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_1, \dots, x_n) - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \dots, x_n) = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) = a.$

Опр. 3. ф-ция $f(P)$ непрерывна в т. P_0, если

1) ф-ция $f(P)$ определена в точке P_0

(изолир., пред. точка)

2) $\exists \lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$

Виды пределов

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)}$$

„общий"

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) \\ \hline \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) \end{array}}$$

„повторные"

Основное свойство: Если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = a$,

то $\forall\, y = g(x)$ такого что $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x, g(x)) = a$.

Задачи: [Д] 7.32
7.34
7.35

№1, 2, 3
№6, 7

[ВОС] 27
33 а, б, в
стр. 403–406 34 г, е

[ЕД] 3.184 а, б, в

Д/З. №4, 5.

[Д] 7.33

7.33 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\sin xy}{xy}$ – ?

[ВОС] 33 г, д, е
стр. 403–406 34 а, б, в
28, 25

[ЕД] 3.192
3.184 г, д

7.32 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{xy\cdot(3+\sqrt{xy+9})}{(3-\sqrt{xy+9})(3+\sqrt{xy+9})} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\cancel{xy}\cdot(3+\sqrt{xy+9})}{\cancel{9}-\cancel{xy}-\cancel{9}} = -\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} (3+\sqrt{xy+9}) =$$

$$= -(3+3) = -6$$ Ответ.

7.34 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_{1 \text{ по 1 зам. пред.}} \cdot \frac{x\cancel{y}}{\cancel{y}} = 0$$ Ответ

7.35 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} (1+\underbrace{x^2+y^2}_{t\to0})^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{t\to0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \overset{\text{по 2 зам. пред}}{=} e$$ Ответ

Найти пределы или показать, что пределов не существует:

Это новый метод отличный от методов вычисления пред функции одной переменной

1) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-y}{x+y} = \{y = kx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x-kx}{x+kx} =$$

по основному св-ву

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-k)\cdot x}{(1+k)\cdot x} = \frac{1-k}{1+k}$$

т.к lim зависит от k, то lim $\nexists$

Замечание: Если lim $\exists$, то он не зависит от того по какой траектории $x \to 0$, поэтому можно выбрать $\forall$. Легче всего взять $y = kx$. Если lim будет зависеть от k, то это означает, что lim зависит от траектории стремления. Если же предел не зависит от k, то lim $\exists$.

Замечание: Задачи 7.32, 7.34, 7.35 показывают, что все методы вычисления lim ф-ции одной переменной справедливы и для ФНП. (домножение на сопряжённое, 1 зам. пред, 2 зам. пред.)

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = \{y = kx\} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot k^2\cdot x^2}{x^2+k^2x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k^2 x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(1+k^2)} = \dfrac{k^2}{1+k^2} \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \Rightarrow \lim \exists$

Ответ.

"Общий" $\lim \exists$.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \underbrace{\dfrac{\operatorname{tg} xy}{xy}}_{=1} \cdot \dfrac{xy}{x^2+y^2} =$

$= \{y = kx\} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k\cancel{x^2}}{(1+k^2)\cancel{x^2}} =$

$= \dfrac{k}{1+k^2} \Rightarrow \not\exists$

Однако $\exists$ "повторные пределы"

$\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} x \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{x^2+y^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \dfrac{0}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot 0 = 0$

Ответ

$\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} y \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+y^2} =$

$= \lim\limits_{y\to 0} y \cdot \dfrac{0}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0} y\cdot 0 = 0$

Ответ

4 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+7y}{x^2+3x}$

5 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+x^2y)}{x^7+x^2}$

Д/З

6 $$\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0}} \frac{\arccos(x+y\sqrt{x})}{e^{x^2y^2}} = \frac{\pi/2}{1} = \frac{\pi}{2}$$

Ответ

7 $$\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0}} \frac{(e^{y^2}-1)\cdot\sqrt{\sin x}}{\operatorname{tg} y^2 + x} = \left\{\begin{array}{l} e^{y^2}-1 \sim y^2 \text{ при } y\to 0\\ \sin x \sim x \quad \text{при } x\to 0 \end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0}} \frac{y^2\cdot\sqrt{x}}{x\left(1+\frac{\operatorname{tg} y^2}{x}\right)} = \lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0}} \frac{y^2\cdot\sqrt{x}}{x\left(1+\frac{y^2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0}} \frac{y^2}{\sqrt{x}\cdot\left(1+\frac{y^2}{x}\right)} = \lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0}} y^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{y^2}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0}} y^2\cdot\frac{\sqrt{x}}{x+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0}} \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{б.м.}}\cdot\underbrace{\frac{y^2}{x+y^2}}_{\text{огр.}} = 0$$

Ответ

$$0 \le \frac{y^2}{x+y^2} \le \frac{x+y^2}{x+y^2} = 1 \text{ — огр. величина.}$$

[ВОС] 27 $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

Док-ть, что $\exists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$, но $\nexists$ ни одного из повторных пределов: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$

Док-во.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{б.м}}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{огр.}}\underbrace{\sin\frac{1}{y}}_{\text{огр.}} = 0$$ как б.м на огр.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}\cdot(x^2+y^2)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y} + y^2\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y} + \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\lim_{y\to 0} y^2\sin\frac{1}{y} = \nexists$$

$\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{0} = \sin\infty = \nexists$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{0} = \sin\infty = \nexists$

Аналогично $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}\cdot(x^2+y^2)\right)$.

(33) Док-ть, что следующие ф-ции непрерывны в начале координат.

а) $$f(x,y) = \begin{cases} \sin\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Решение: $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin\frac{1}{\sqrt{\underset{\downarrow\ \infty}{\frac{1}{y^2}} + \underset{\downarrow\ \infty}{\frac{1}{x^2}}}} = \sin 0 = 0$$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0, \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x,y) \text{ непрерывна в т. } (0,0).$$

б) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

Решение:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin(x^2+y^2) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin(0+0) = \sin 0 = 0.$$

$$\begin{cases} f(0,0) = \sin 0 = 0, \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin(x^2+y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x,y) \text{ непрерывна в т. } (0,0)$$

в) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2+y^2), & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

Решение: Ещё один новый метод (отличный от методов вычисления пределов функции одной переменной) — это переход к полярной системе координат.

$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad x \to 0, y \to 0 \Rightarrow r \to 0$

$$f(x,y) = r^2\cos^2\varphi \ln(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) =$$

$$= r^2\cos^2\varphi \ln(r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)) =$$

$$= r^2\cos^2\varphi \cdot \ln r^2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r,\varphi) = \lim_{r\to 0} r^2\cos^2\varphi \ln r^2 =$$

$$= \cos^2\varphi \lim_{r\to 0} r^2 \ln r^2 = 2\cos^2\varphi \lim_{r\to 0} r^2 \ln r$$

$$\lim_{r\to 0} r^2 \ln r = (0\cdot\infty) = \lim_{r\to 0} \frac{\ln r}{\frac{1}{r^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \underline{\text{Пр. Л-}}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{r}}{-2\cdot\frac{1}{r^3}} = \lim_{r\to 0} \frac{1\cdot r^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{r}\cdot(-2)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{r\to 0} r^2 = -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$$

$$\begin{cases} f(0,0)=0, \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow f(x,y) \text{ непрерывна в } (0,0).$$

(34) Док-ть, что след. ф-ции не яв-ся непр. в начале координат.

д) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

Решение:

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y}{x^2+y^2} = \{y=kx\} =$$

$$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+kx}{\sqrt{x^2+k^2x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(k+x)}{|x|\sqrt{1+k^2}} =$$

$$= \pm \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \nexists \lim$$

$\Rightarrow f(x,y)$ не яв-ся непрерывной в т. $(0,0)$.

е) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

Решение:

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 2\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \{y=kx\} =$$

$$= 2\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = 2\cdot\frac{k}{1+k^2} \Rightarrow \nexists \lim$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \ \nexists, \\ f(0,0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x,y) \text{ не яв-ся непрерывной}$$

3.184 Найти пределы $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$

$\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$

а) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a=\infty$, $b=\infty$

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty} \frac{\cancel{y^2}\left(1+\overbrace{\frac{x^2}{y^2}}^{\to 0}\right)}{y^{\cancel{4}\,2}\left(1+\underbrace{\frac{x^2}{y^4}}_{\to 0}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y^2(1+0)} = 0$$

$$\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\overbrace{\frac{y^2}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\underbrace{\frac{y^4}{x^2}}_{\to 0}\right)} =$$

$$= \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

д) $f(x,y) = \dfrac{x^y}{1+x^y}$, $a=0$, $b=0+$

<u>Решение:</u>

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0+}\frac{x^y}{1+x^y} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0+}\frac{x^y+1-1}{x^y+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0+}\left(1-\frac{1}{x^y+1}\right) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0+}\lim_{x\to 0}\frac{x^y}{1+x^y} = \lim_{y\to 0+}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^y}}{\cancel{x^y}\left(1+\underbrace{\frac{1}{x^y}}_{\infty}\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 0+}\frac{1}{\infty} = 0$$

б) $f(x,y) = \sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$

<u>Решение:</u>

$$\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y} = \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi\cancel{x}}{\cancel{x}\left(2+\underbrace{\frac{y}{x}}_{0}\right)} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y} = \lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{y\left(1+\underbrace{\frac{2x}{y}}_{0}\right)} =$$

$$= \sin 0 = 0.$$