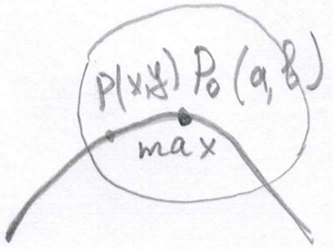
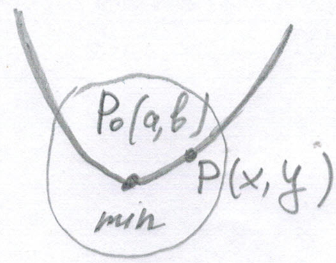
С.з. № 6. Тема: Экстремумы ФНП.

(I) Безусловный экстремум.

Опр. Функция $z = f(x,y)$ имеет max/min в точке $P_0(a,b)$, если существует такая окрестность точки $P_0(a,b)$, что для всех точек $P(x,y)$ из этой окрестности отличных от точки $P_0(a,b)$ выполнено неравенство $f(a,b) > f(x,y)$ $\left(f(a,b) < f(x,y)\right)$.





точка $P_0(a,b)$, в которой ф-ция имеет max/min наз-ся точкой максимума/минимума (точка экстремума)

значение ф-ции $z = f(x,y)$ в точке $P_0(a,b)$ — максимумом (минимумом) функции или экстремумом функции.

Необходимое условие экстремума ФНП:

Если $z = f(x,y)$ имеет экстремум в точке $P_0(a,b)$, тогда $f'_x = 0$ и $f'_y = 0 \Rightarrow df = 0$

Опр: Точки, в которых все частные производные функции равны нулю наз-ся стационарными точками.

Достаточное условие экстремума ФНП:

Пусть $P_0(a,b)$ - стац. точка ф-ции $z = f(x,y)$, ф-ция $z = f(x,y)$ - дважды диф-ма в некот. окрестности точки $P_0(a,b)$ и все её вторые частные производные непрерывны в точке $P_0(a,b)$. Обозначим:

$$\left.\begin{aligned} A &= f''_{xx}(a,b), \\ B &= f''_{xy}(a,b), \\ C &= f''_{yy}(a,b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Составим выражение $D = AC - B^2$.

Тогда: 1) если $D > 0$, то в точке $P_0(a,b)$ существует экстремум, причём

а) $A > 0$ — то $P_0(a,b)$ - т. миним.

б) $A < 0$ — то $P_0(a,b)$ - т. максим.

2) если $D < 0$, то экстремума не существует;

3) если $D = 0$, то нужны дополнительные исследования. Экстремумы могут быть, а могут и не быть.

Задачи: 7.187 Д/З 7.188
7.189 7.190
[Е.Д] 7.191 7.192
7.193

7.187 Найти экстремум ф-ции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6$

Решение: 1 шаг Находим стац. точки:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + y - 3 = 0, \\ z'_y = x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3, \\ x + 2y = 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x, \\ x + 2(3 - 2x) = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x, \\ x + \cancel{6} - 4x = \cancel{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x, \\ -3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P_0(0,3)$ – стац. точка.

2 шаг Проверяем яв-ся ли эта стац. точка точкой экстремума.

$$\left.\begin{aligned} A &= f''_{xx} = (2x + y - 3)'_x = 2, \\ B &= f''_{xy} = (2x + y - 3)'_y = 1, \\ C &= f''_{yy} = (x + 2y - 6)'_y = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = AC - B^2 =$$

$= 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow$ экстремум в т. $P_0(0,3)$ существует.

$A = 2 > 0 \Rightarrow P_0(0;3)$ – точка минимума

$z_{min} = 0^2 + 0 \cdot 3 + 3^2 - 3 \cdot 0 - 6 \cdot 3 = 9 - 18 = -9$ – минимум.

Ответ: $P_0(0,3)$ – т. минимума.
$-9 = z$ – минимум

7.189 Найти экстремум ф-ции $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$

Решение: 1 шаг Находим стац. точки:

$$\begin{cases} z'_x = 6x - 3x^2 = 0, \\ z'_y = 6y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x(-x+2) = 0, \\ 2(3y+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow P_0\left(0; -\frac{2}{3}\right)$$

стац. точки

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow P_1\left(2; -\frac{2}{3}\right)$$

2 шаг Проверяем яв-ся ли эти точки точками экстремума:

$z''_{xx} = (6x - 3x^2)'_x = 6 - 6x = A$

$z''_{xy} = (6x - 3x^2)'_y = 0 = B$

$z''_{yy} = (6y + 4)'_y = 6 = C$

$6 = A$	$-6 = A$
$0 = B$	$0 = B$
$6 = C$	$6 = C$
$P_0\left(0; -\frac{2}{3}\right)$	$P_1\left(2; -\frac{2}{3}\right)$

$P_0\left(0; -\frac{2}{3}\right)$: $D = AC - B^2 = 6\cdot 6 - 0 = 36 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ в т. $P_0\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ экстремум

т.к $A = 6 > 0$, то т. $P_0\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ — точка минимума

$$z_{min} = 3\cdot 0^2 - 0^3 + 3\cdot\frac{4}{9} + 4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$$ — минимум

$P_1\left(2; -\frac{2}{3}\right)$: $D = AC - B^2 = 6\cdot(-6) = -36 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists$ в т. $P_1\left(2; -\frac{2}{3}\right)$ экстремум

Ответ: $P_0\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ — т. минимума

$z_{min} = -\frac{4}{3}$ — минимум

7.191 Найти экстремумы функции

$$z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y, \quad x > 0,\ y > 0.$$

Решение:

1 шаг Стац. точки

$$\begin{cases} z'_x = 2x - \frac{2}{x} = 0, \\ z'_y = 2y - \frac{18}{y} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0, \\ 2\left(y - \frac{9}{y}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ y^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1,\ x = -1, \\ y = 3,\ y = -3. \end{cases}$$

т. к. $x > 0,\ y > 0 \Rightarrow x = 1,\ y = 3 \Rightarrow P_0(1,3)$ – стац. точка

2 шаг Находим среди стац. точек точки экстремума

$$\begin{cases} A = z''_{xx} = 2 + \frac{2}{x^2}, \\ B = z''_{xy} = 0, \\ C = z''_{yy} = 2 + \frac{18}{y^2}. \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D} = AC - B^2 =$$

$$= \left(2 + \frac{2}{x^2}\right)\left(2 + \frac{18}{y^2}\right)\Bigg|_{P_0(1,3)} =$$

$$= \left(2 + \frac{2}{1}\right)\left(2 + \frac{18}{9}\right) = 4 \cdot 4 = 16 > 0 \Rightarrow \text{в т. } P_0(1,3)$$

$$A = \left(2 + \frac{2}{x^2}\right)\Bigg|_{P_0(1,3)} = 2 + \frac{2}{1^2} = 4 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т. $P_0(1,3)$ – точка минимума

$$z_{min} = 1^2 + 3^2 - 2\ln 1 - 18\ln 3 = 10 - 18\ln 3$$

Ответ: $P_0(1,3)$ - т. минимума

$z_{min} = 10 - 18\ln 3$ - минимум

(7.193) Найти экстремум ф-ции $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Решение:

(1 шаг) Стац. точки

$$\begin{cases} z'_x = 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ z'_y = -2xy + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ 2y(1-x) = 0 \end{cases}$$

$y = 0$: $6x^2 + 10x = 0$
$2x(3x+5) = 0$
$x = 0$, $x = -\frac{5}{3}$

$x = 1$: $6 - y^2 + 10 = 0$
$y^2 = 16$
$y = 4$, $y = -4$

$P_0(0;0)$, $P_1\left(-\frac{5}{3};0\right)$, $P_2(1,4)$, $P_3(1,-4)$

(2 шаг) Среди стац. точек находим точки экстремума:

$A = z''_{xx} = 12x + 10$	10	−10	22	22
$B = z''_{xy} = -2y$	0	0	−8	8
$C = z''_{yy} = -2x + 2$	2	$\frac{16}{3}$	0	0
	$P_0(0;0)$	$P_1\left(-\frac{5}{3};0\right)$	$P(1,4)$	$P(1,-4)$

$P_0(0;0)$: $D = AC - B^2 = 20 > 0 \Rightarrow$ в т. $P_0(0;0)$ $\exists$ экстрем

т.к $A = 10 > 0 \Rightarrow$ то $P_0(0;0)$ – точка

минимума

$z_{min} = 0$. – минимум.

$P_1\left(-\frac{5}{3};0\right)$: $D = AC - B^2 = -\frac{160}{3} < 0 \Rightarrow$ в т $P_1\left(-\frac{5}{3};0\right)$

$\nexists$ экстремума.

$P_2(1;4)$: $D = AC - B^2 = 0 - 64 = -64 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в т $P_2(1;4)$ $\nexists$ экстремума

$P_3(1;-4)$: $D = AC - B^2 = 0 - 64 = -64 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в т $P_3(1;-4)$ $\nexists$ экстремума.

Ответ: $P(0,0)$ – точка минимума

$z_{min} = 0$ – минимум

II Условный экстремум ФНП

Функция $z = f(x,y)$ имеет условный максимум (условный минимум) в т. $P_0(a;b)$, если существует такая окрестность точки $P_0(a;b)$, что для всех точек $P(x,y)$ отличных от $P_0(a;b)$ из этой окрестности было выполнено уравнение связи $\varphi(x,y)=0$.

Для нахождения условного экстремума составляют функцию Лагранжа:

$$\boxed{F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)}$$

, где λ - множитель Лагранжа

λ - постоянный множитель, вспомогательная переменная.

Задача отыскания условного экстремума сводится с помощью функции Лагранжа к задаче отыскания обычного (безусловного) экстремума функции $F(x,y,\lambda)$.

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ F'_\lambda = 0 = \varphi(x,y) \end{cases}$$

При выполнении условий связи dx и dy связаны соотношением: $\boxed{d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy}$

Достаточное условие экстремума:

Пусть $P_0(a;b)$ – стац. точка ф-ции $F(x,y,\lambda)$, ф-ция $F(x,y,\lambda)$ – дважды диф-ма в окрестности точки $P_0(a;b)$ и все вторые частные производные непрерывны в т. $P_0(a;b)$

Выпишем второй дифференциал ф-ции $F(x,y,\lambda)$: $\boxed{d^2F = F''_{xx} dx^2 + 2F''_{xy} dx dy + F''_{yy} dy^2}$

Если $\boxed{d^2F > 0}$, то $f(a,b)$ – лок. min

$\boxed{d^2F < 0}$, то $f(a,b)$ – лок. max

<u>Задачи:</u> 7.201   Д/З. 7.202
7.205   7.203
7.204.

7.201 Найти условный экстремум функции

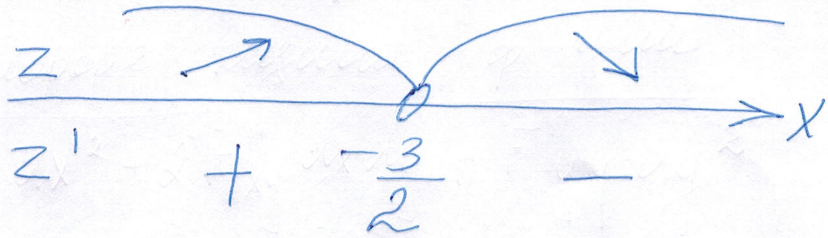
$z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при

условии $x + y + 3 = 0$

<u>Решение:</u> $y = -x - 3$

$z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 = x^2 + (-x-3)^2 - x(-x-3) +$
$+ \cancel{x} - \cancel{x} - 3 - 4 = x^2 + (x+3)^2 + x^2 + 3x - 7 =$
$= x^2 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 3x - 7 = 3x^2 + 9x + 2$

$z'_x = 6x + 9 = 0$
$3(2x+3) = 0$
$x = -\frac{3}{2}$



при $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$.

$P_0\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ – точка максимума

$z_{max} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 4 =$
$= -\frac{19}{4}$ – максимум

Ответ: $P_0\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ – точка максимума

$z_{max} = -\frac{19}{4}$ – максимум

7.205 Найти условный экстремум функции $z = 2x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Решение.

1 шаг Функция Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} F'_x = 2 + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = 1 + 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda x = 0, \\ 1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\lambda}, \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$$

$$\frac{4+1}{4\lambda^2} = 1$$

$$\frac{5}{4\lambda^2} = 1$$

$$4\lambda^2 = 5$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{4}$$

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Если $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$, то $\begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{P_0\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}_{\text{стац. точка}}$

Если $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, то $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{P_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}_{\text{стац. точка.}}$

2 шаг Второй дифференциал

$$\begin{cases} F''_{xx} = (2+2\lambda x)'_x = 2\lambda, \\ F''_{xy} = (2+2\lambda x)'_y = 0, \\ F''_{yy} = (1+2\lambda y)'_y = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 = 2\lambda\underbrace{(dx^2+dy^2)}_{>0} =$$

$$= \begin{cases} 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot(dx^2+dy^2) \\ 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot(dx^2+dy^2) \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{5}(dx^2+dy \ldots > 0 \\ -\sqrt{5}(dx^2+dy \ldots < 0 \end{cases}$$

$d^2F > 0$ при $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2} > 0$ т.е в т. $P_0\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ – точка условного минимум

$d^2F < 0$ при $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2} < 0$ т.е в т. $P_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ – точка условного максимум

$z_{min} = -\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$ – минимум

$z_{max} = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ – максимум

Ответ: $P_0\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ – т. условного минимума

$z_{min} = -\sqrt{5}$ минимум условный

$P_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ – т. условного максимума

$z_{max} = \sqrt{5}$ максимум условный

<u>Другой метод</u>:

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} = \Delta$$

Если $\Delta > 0$, то $d^2F < 0 \Rightarrow$ услов. max

$\Delta < 0$, то $d^2F > 0 \Rightarrow$ услов. min

$$\varphi'_x\, dx + \varphi'_y\, dy = 0$$

$$dy = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\, dx$$

$$d^2F = F''_{xx}\, dx^2 + 2F''_{xy}\, dx\, dy + F''_{yy}\, dy^2$$