Приложения квадратичных форм.

а) $4xy - 4x^2 - y^2 + 10\sqrt{5}x + 10\sqrt{5}y + 25 = 0$

Выпишем квадратичную форму $\varphi(x, y) =$

$= 4xy - 4x^2 - y^2 = (x, y)\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Вычислим $\det A$: A''

$\det A = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

Кривая параболического вида

Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-4-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = 0$$

$$(4+\lambda)(1+\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda(\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda_1 = -5 \; ; \; \lambda_2 = 0$$

Собственные векторы:

$\lambda_1 = -5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1 \; 2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x = -2y \Rightarrow \bar{e}_1 = C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 0$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow \bar{e}_2 = C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2 \; -1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$ им соответствуют ортогональные или независимые векторы. т.е. достаточно подобрать C_1 и C_2 так, чтобы $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2|$

$C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

Матрица перехода к новому базису:

$V_{B \to B'} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ $\det V = -\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = -1 < 0$,

т.е. $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ образуют левый базис.

Чтобы получить правый, возьмём векторы:

$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

Тогда матрица перехода:

$V_{B \to B'} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det V = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$

Преобразование координат при переходе к новому базису:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$

$\varphi(x, y) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = -5x'^2$

Преобразуем лин. часть:

$10\sqrt{5}x + 10\sqrt{5}y = 10\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + 10\sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) =$

$= 20x' + 10y' - 10x' + 20y' = 10x' + 30y'$

Ур-е кривой в новых координатах:

$-5x'^2 + 10x' + 30y' + 25 = 0$

$x'^2 + 2x' + 6y' - 5 = 0$

$(x'-1)^2 = 6(y'+1)$

$y' + 1 = \frac{(x'-1)^2}{6}$

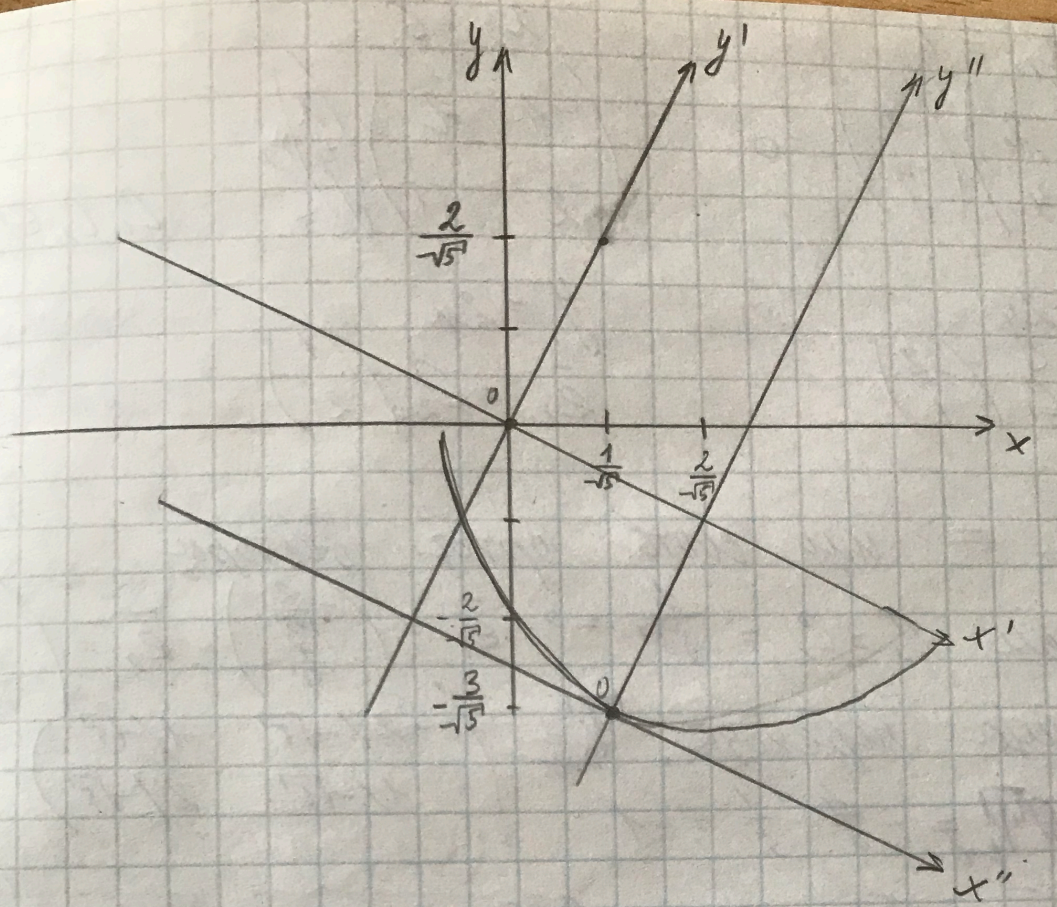
$2p = 2 \cdot (y'+1) = (x'-1)^2$

Замена:

$\begin{cases} y'+1 = y'' \\ x'-1 = x'' \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 3y'' = x''^2$ – каноническое ур-е параболы $(p=3)$

$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}(x''+1) + \frac{1}{\sqrt{5}}(y''+1) \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}}(x''+1) + \frac{2}{\sqrt{5}}(y''-1) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'' + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x'' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' - \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$x'' = y'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} O'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{3}{\sqrt{5}}\right) \\ \bar{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{j} \\ \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{j} \end{cases}$



б) $2x^2+5y^2+4xy+4-\sqrt{5}x+4-\sqrt{5}y-14=0$

$\varphi(x,y)=2x^2+5y^2+4xy=(x,y)\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}2&2\\2&5\end{vmatrix}=10-4=6>0$

Кривая эллиптического вида

$\det|A-\lambda E|=0$ $\quad (2-\lambda)(5-\lambda)-4=0$

$\begin{vmatrix}2-\lambda&2\\2&5-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ $\quad 10-2\lambda-5\lambda+\lambda^2-4=0$

$\lambda^2-7\lambda+6=0$

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$

$\lambda_1 = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$x = -2y$

$\bar{e}_1 = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 6$

$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$y = 2x$

$\bar{e}_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$ или соотв. ортог. векторы

Возьмём $C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

Матрица перехода: $T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$\det T_{B \to B'} = -\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = -1$

$\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ образуют левый базис

Возьмём:

$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Матрица перехода:

$T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ $\det T_{B \to B'} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$

$\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ образуют правый базис

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_{B \to B'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' \end{cases}$

$\varphi(x,y) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = x'^2 + 6y'^2$

$4-\sqrt{5}\,x + 4-\sqrt{5}\,y = 4-\sqrt{5}\left(\frac{2}{-\sqrt{5}}x' + \frac{1}{-\sqrt{5}}y'\right) + 4-\sqrt{5}\left(\frac{1}{-\sqrt{5}}x' + \frac{2}{-\sqrt{5}}y'\right) =$

$= 8x' + 4y' - 4x' + 8y' = 4x' + 12y'$

Запишем ур-е кривой в новых координатах:

$x'^2 + 6y'^2 + 4x' + 12y' - 14 = 0$

$(x'^2 + 4x' + 4) - 4 + 6(y'^2 + 2y' + 1) - 6 - 14 = 0$

$(x'+2)^2 + 6(y'+1)^2 = 24$

$\frac{(x'+2)^2}{(-\sqrt{24})^2} + \frac{(y'+1)^2}{4} = 1$

$\frac{(x'+2)^2}{(2-\sqrt{6})^2} + \frac{(y'+1)^2}{2^2} = 1$

Замена:

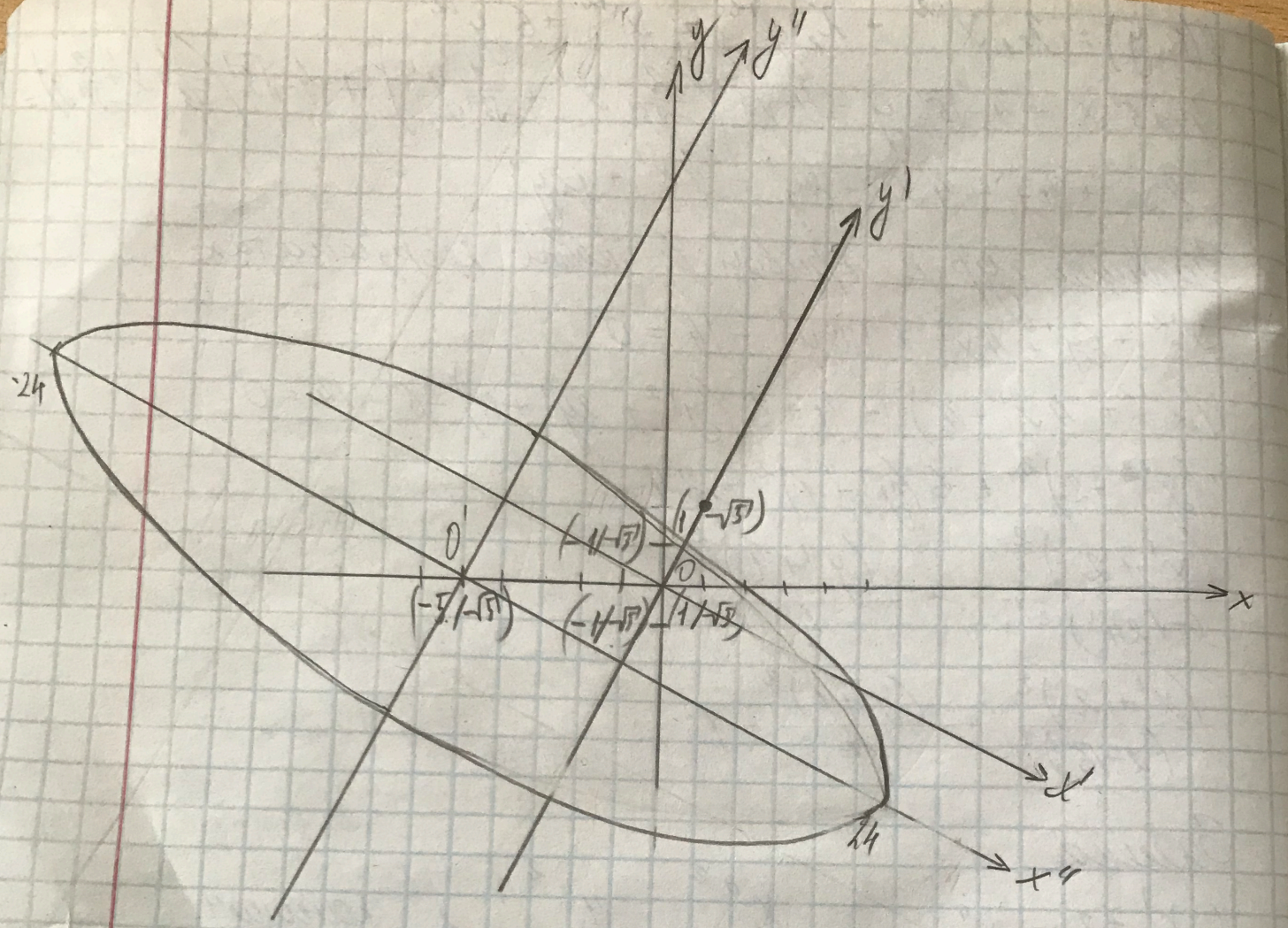
$\begin{cases} x'+2 = x'' \\ y'+1 = y'' \end{cases} \Rightarrow \frac{x''^2}{(2-\sqrt{6})^2} + \frac{y''^2}{2^2} = 1$ — каноническое ур-е эллипса

$\begin{cases} x = \left(\frac{2}{-\sqrt{5}}\right)(x''-2) + \left(1/-\sqrt{5}\right)(y''-1) \\ y = \left(-1/-\sqrt{5}\right)(x''-2) + \left(2/-\sqrt{5}\right)(y''-1) \end{cases}$

$\begin{cases} x = \left(2/-\sqrt{5}\right)\cdot x'' + \left(1/-\sqrt{5}\right)\cdot y'' - \left(5/-\sqrt{5}\right) \\ y = \left(-1/-\sqrt{5}\right)x'' + \left(2/-\sqrt{5}\right)y'' \end{cases}$

$x'' = y'' = 0$

$\begin{cases} O'\left(-5/-\sqrt{5}\,;\,0\right) \\ \bar{e}_1 = (2/-\sqrt{5})\,\bar{i} - (1/-\sqrt{5})\,\bar{j} \\ \bar{e}_2 = (1/-\sqrt{5})\,\bar{i} + (2/-\sqrt{5})\,\bar{j} \end{cases}$



c) $2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12-\sqrt{14}x-4-\sqrt{14}y-8-\sqrt{14}z-56=0$

$\varphi(x,y,z)=2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz=$

$=(x\ y\ z)\begin{pmatrix}2&6&0\\6&10&4\\0&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}2&6&0\\6&10&4\\0&4&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}6&18&0\\6&10&4\\0&4&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-8&4\\6&10&4\end{pmatrix}\sim$

$\sim\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&5&2\end{pmatrix}$ $\operatorname{Rg}A=2$ (В канонич. виде есть квадраты 2-х перемен.)

$$\det|A-\lambda E|=0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 10-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)(10-\lambda)(-2-\lambda)-36(-2-\lambda)-16(2-\lambda)=0$$

$$(4-\lambda^2)(10-\lambda)+52\lambda+40=0$$

$$-\lambda^3+10\lambda^2+56\lambda=0$$

$$-\lambda(\lambda^2-10\lambda-56)=0$$

$$\lambda_1=-4,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=14$$

$\lambda_1=-4$

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 14 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$$

$$\bar{e}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2=0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2y - 4z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 14$

$$\begin{pmatrix} -12 & 6 & 0 \\ 6 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 6 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y - 4z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода:

$$V_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -3/\sqrt{14} & 2/\sqrt{21} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{14} & 4/\sqrt{21} \\ 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = (1/\sqrt{6})x' - (3/\sqrt{14})y' + (2/\sqrt{21})z' \\ y = (-1/\sqrt{6})x' + (1/\sqrt{14})y' + (4/\sqrt{21})z' \\ z = (2/\sqrt{6})x' + (2/\sqrt{14})y' + (1/\sqrt{21})z' \end{cases}$$

$$\varphi(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = -4x'^2 + 14z'^2$$

$$12\sqrt{14}\,x = 12\sqrt{14}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x' - \frac{3}{\sqrt{14}}y' + \frac{2}{\sqrt{21}}z'\right) =$$

$$= \frac{12\sqrt{14}}{\sqrt{6}}x' - 36y' + \frac{24\sqrt{14}}{\sqrt{21}}z'$$

$$-4\sqrt{14}\,y = -4\sqrt{14}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{14}}y' + \frac{4}{\sqrt{21}}z'\right) = \frac{4\sqrt{14}}{\sqrt{6}}x' - 4y' - \frac{16\sqrt{14}}{\sqrt{21}}z'$$

$$-8\sqrt{14}z = -8\sqrt{14}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{2}{\sqrt{14}}y' + \frac{1}{\sqrt{21}}z'\right) =$$

$$= \frac{-16\sqrt{14}}{\sqrt{6}}x' - 16y' - \frac{8\sqrt{4}}{\sqrt{21}}z'$$

$$-4x'^2 + 14z'^2 - 36y' - 4y' - 16y' - 56 = 0$$

$$2x'^2 + 28y' - 7z'^2 + 28 = 0$$

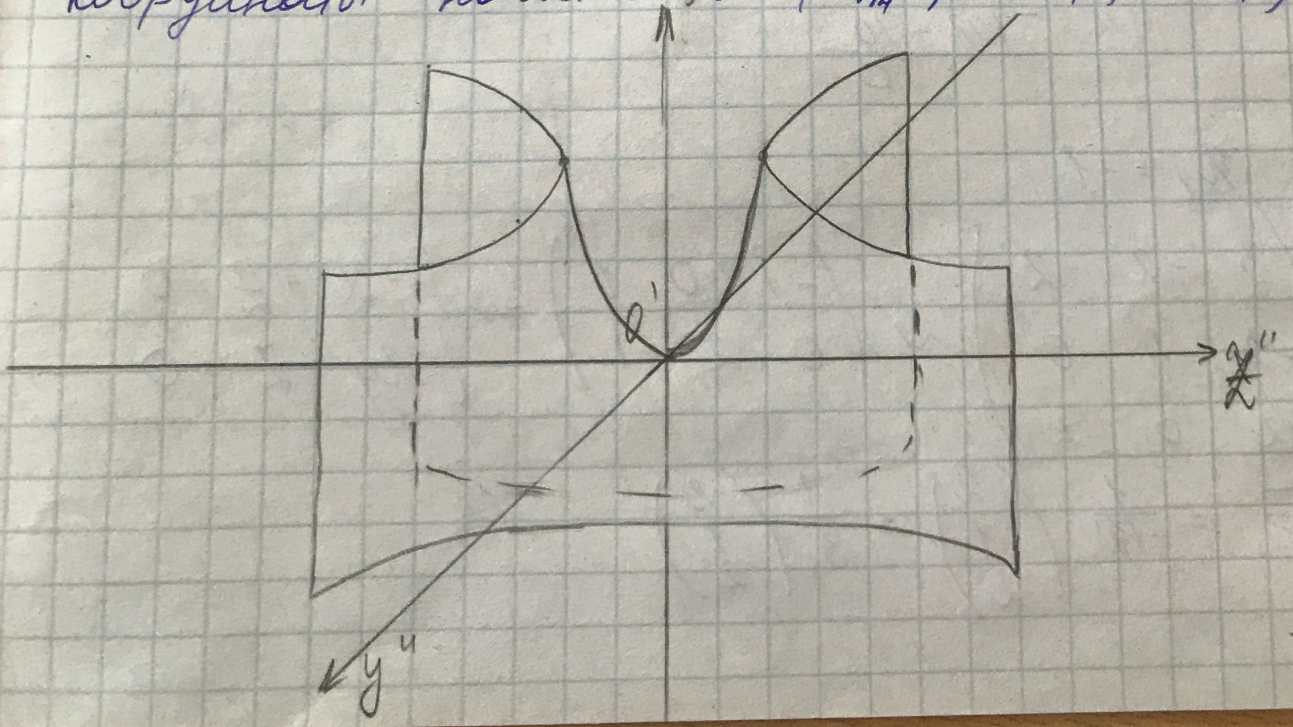
$$\frac{x'^2}{14} - \frac{z'^2}{4} + y' + 1 = 0$$

Замена: $\begin{cases} y'' = \frac{-(y'+1)}{2} \\ x'' = x' \\ z'' = z' \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{x''^2}{(\sqrt{14})^2} - \frac{z''^2}{2^2} = 2y''$

каноническое ур-е гиперболического ("седло") параболоида

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}}x'' - \frac{3}{\sqrt{14}}(-2y''-1) + \frac{2}{\sqrt{21}}z'' = \frac{1}{\sqrt{6}}x'' + \frac{6}{\sqrt{14}}y'' + \frac{2}{\sqrt{21}}z'' + \frac{3}{\sqrt{14}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{6}}x'' + \frac{1}{\sqrt{14}}(-2y''-1) + \frac{4}{\sqrt{21}}z'' = -\frac{1}{\sqrt{6}}x'' - \frac{2}{\sqrt{14}}y'' + \frac{4}{\sqrt{21}}z'' - \frac{1}{\sqrt{14}} \\ z = \frac{2}{\sqrt{6}}x'' + \frac{2}{\sqrt{14}}(-2y''-1) + \frac{1}{\sqrt{21}}z'' = \frac{2}{\sqrt{6}}x'' - \frac{4}{\sqrt{14}}y'' + \frac{1}{\sqrt{21}}z'' - \frac{2}{\sqrt{14}} \end{cases}$$

координаты начала $O'\left(\frac{3}{\sqrt{14}}; -\frac{1}{\sqrt{14}}; -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$



д) $2x^2+3y^2+z^2-4xy-4xz+24x-6y-7=0$

$\varphi(x,y,z) = 2x^2+3y^2+z^2-4yx-4xz =$

$= (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\operatorname{Rg} A = 3$ (В каноническом виде есть квадраты 3-х переменных)

$\det|A-\lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - 4(3-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0$

$(2-3\lambda+\lambda^2)(3-\lambda) - 12 + 4\lambda - 4 + 4\lambda = 0$

$-\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda-10=0$

$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5$

$-\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda-10 \mid \lambda+1$

$-\lambda^3-\lambda^2 \quad\quad -\lambda^2+7\lambda-10$

$-7\lambda^2-3\lambda$

$-7\lambda^2+7\lambda$

$-10\lambda-10$

$-10\lambda-10$

0

$\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{9}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

λ_2

$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\bar{e}_2$

$\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 5$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - 2z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\bar{e}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода:

$$T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z' \\ y = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' \\ z = \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' \end{cases}$$

$$\varphi(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = -x'^2 + 2y'^2 + 5z'^2$$

$$24x - 6y = 24\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z'\right) - 6\left(\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z'\right) =$$

$$= 14x' + 4y' - 20z'$$

$$-x'^2 + 2y'^2 + 5z'^2 + 14x' + 4y' - 20z' - 7 = 0$$

$$-(x' - 7)^2 + 2(y' + 1)^2 + 5(z' - 2)^2 = -20$$

$$\frac{(x' - 7)^2}{20} - \frac{(y' + 1)^2}{10} - \frac{(z' - 2)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(y' + 1)^2}{10} + \frac{(z' - 1)^2}{4} - \frac{(x' - 7)^2}{20} = -1$$

Замена: $\begin{cases} y'' = y' + 1 \\ z'' = z' - 1 \\ x'' = x' - 7 \end{cases} \Rightarrow \frac{y''^2}{(\sqrt{10})^2} + \frac{z''^2}{2^2} - \frac{x''^2}{(\sqrt{20})^2} = -1$

каноническое ур-е двуполостного гиперболоида

$\begin{cases} x = \frac{2}{3}x'' + \frac{1}{3}y'' - \frac{2}{3}z'' + \frac{11}{3} \\ y = \frac{1}{3}x'' + \frac{2}{3}y'' + \frac{2}{3}z'' + \frac{7}{3} \\ z = \frac{2}{3}x'' - \frac{2}{3}y'' + \frac{1}{3}z'' + \frac{17}{3} \end{cases}$ Координаты начала O'

