Корсаков Макар

ЛА РК1 ИУ1-21

Билет 7

№1

Система векторов $a_1 \ldots a_n$ пространства V называется ортогональной, если взаимно ортогональны любые 2 вектора системы

Базис $e_1 \ldots e_n$ евклидова пространства называется ортонормированным, если его векторы попарно ортогональны и их длина равна 1.

№2

Критерий Сильвестра: для того, чтобы квадратичная форма f(x) была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы были положительны.

Чтобы квадратичная форма f(x) была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы значения угловых миноров матрицы кв. формы чередовались в данном порядке: $\Delta_1 < 0$; $\Delta_2 > 0$; $\Delta_3 < 0$; ... $(-1)^n \Delta_n > 0$.

№3

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & -9 \\ -5 & 6 & 9 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -6 & -9 \\ -5 & 6 & 9 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{II} + (-3)\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -12 \\ 1 & -6 & -9 \\ -5 & 6 & 9 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{III} - \text{I}}$$

$$\underset{\frown}{\text{III}-\text{I}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -8 & -12\\ 0 & -8 & -12\\ -5 & 6 & 9\end{pmatrix}\begin{matrix}\text{IV}+5\cdot\text{I}\\ \text{II}+\text{III};\\ \text{II}:(-4)\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

~~Размерн~~ ~~Rg~~ $rg=2 \Rightarrow$ размерность $=2$

Базис $- a_1; a_2$

Ответ: размерность $=2$; базис $- a_1; a_2$.

$e_1; e_2$

№4

$Q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$

$e_1' = -e_1 + e_2$; $e_2' = e_1 - 2e_2$

$Q(y_1; y_2) - ?$

$$Q = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}, \quad T_{B\to B'} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}; \quad T^T_{B\to B'} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$Q' = T^T_{B\to B'}\cdot Q\cdot T_{B\to B'} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3 & -3\\ -5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6 & 9\\ 9 & -13\end{pmatrix}$$, тогда $Q(y_1; y_2) = -6y_1^2 + 18y_1y_2 - 13y_2^2$

Ответ: $Q(y_1; y_2) = -6y_1^2 + 18y_1y_2 - 13y_2^2$

№5

$$B = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}; \quad A = B'\cdot B^{-1}$$

$$B^{-1} = \left(\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}\cdot 2} \left(\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{matrix}\right) \xrightarrow{\text{II}:(-2)} \left(\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{matrix}\right)$$

$$I - II \cdot 3 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right), \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\cancel{A = -2 \ \tfrac{3}{2}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

№6

$7x^2 - y^2 + 6xy \qquad \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ - неопределённая

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad (7-\lambda)(-1-\lambda) - 9 = 0;$$

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0; \quad \lambda_1 = -2; \ \lambda_2 = 8$$

1) $\lambda_1 = -2$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 9x + 3y = 0; \ y = 3; \ x = 1$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2 = 8$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 3y = x; \ x = 3; \ y = 1; \ e = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T_{B \to B'} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_{B \to B'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' + 3y') \end{cases}$$

$-2x'^2 + 8y'^2 = 0$ — канонический вид.

Ответ: $-2x'^2 + 8y' = 0$ — канонический вид.