РК 2 по ФНП

Корсаков Макар
ИУ1-21

вариант 7

№1

Главная часть приращения функции $z=f(x,y)$, линейная относительно $\Delta x, \Delta y$, называется полным дифференциалом этой функции, обозначается dz:

$$dz = \cancel{\Delta} A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$$

$A\cdot\Delta x$, $B\cdot\Delta y$ — частные дифференциалы, где $\Delta x = dx$; $\Delta y = dy$, значит $dz = A\cdot dx + B\cdot dy$.

№2

Если функция $F(x,y,z)$ дифф-ема по переменным x, y, z в некоторой пространственной области D и $F'_z(x,y,z) \neq 0$, то ур-е $F(x,y,z)=0$ определяет однозначную неявную функцию $z(x,y)$, это ур-е также дифф-ема

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

№3

Если функция $z=f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в т. $M(x;y)$, то она дифф-ема в этой точке и её полный дифференциал равен: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

№4

$z = x^4 + 2x^2y \cancel{+} - xy + x \quad M(1, 0, 2)$

$F(x, y, z) = x^4 + 2x^2y - xy + x - z$

$\cancel{F'(x)} \quad F'_x = 4x^3 + 4xy - x + 1; \; F'_y = 2x^2 - x; \; F'_z = -1$

$F'_x\big|_M = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 0 - 1 + 1 = 4; \; F'_y\big|_M = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1; \; F'_z\big|_M = -1.$

Ур-е касательной плоскости:

$F'_x\big|_{(x_0; y_0; z_0)} \cdot (x - x_0) + F'_y\big|_{(x_0; y_0; z_0)} (y - y_0) + F'_z\big|_{(x_0; y_0; z_0)} \cdot$

$\cdot (z - z_0) = 0$

$4(x - 1) + 1(y - 0) - 1 \cdot (z - 2) = 0;$

$\cancel{4x-2} \quad 4x + y - z - 2 = 0$

Ур-е нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x\big|_{(x_0; y_0; z_0)}} = \frac{y - y_0}{F'_y\big|_{(x_0; y_0; z_0)}} = \frac{z - z_0}{F'_z\big|_{(x_0; y_0; z_0)}}$$

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 2}{-1}$$

Ответ: $4x + y - z - 2 = 0, \; \frac{x - 1}{4} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 2}{-1}$

№5

$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}; \; x, y > 0$

$\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}\right)'_x \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \left(xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}\right)'_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$y = \frac{50}{x^2}$, $x, y \neq 0$, $x - \frac{20}{\left(\frac{50}{x^2}\right)^2} = 0 \Rightarrow x - \frac{20x^4}{2500} = 0$

$x\left(1 - \frac{20x^3}{2500}\right) = 0$; $x_1 = 0$ – не удовлетворяет условию $x \neq 0$

$1 - \frac{20x^3}{2500} = 0 \Rightarrow x^3 = 125$, $x_2 = 5$.

$y = \frac{50}{25} = 2$

Следовательно, 1 точка $M(5; 2)$

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3}$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}$

Для т. $M(5; 2)$

$A = \frac{100}{125} = \frac{4}{5}$; $B = 1$; $C = \frac{40}{8} = 5$

$AC - B^2 = \frac{4}{5} \cdot 5 - 1 = 3$; $\Rightarrow A > 0$ является т. минимума.