Часть А

Теория

1) Лин. оператором в лин. пр-ве L называет-ся отображение $A: L \to L$ и обладает св-вами:

1) $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$

2) ~~A(λ)(x~~ $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x}$

Если L - лин. пр-во, $B = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$

$A\vec{x} = \vec{y}$; $\forall \vec{x} \in L$

$A\vec{e_1} = a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + \dots + a_{n1}\vec{e_n}$

$A\vec{e_2} = a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2} + \dots + a_{n2}\vec{e_n}$

$A\vec{e_n} = a_{1n}\vec{e_1} + a_{2n}\vec{e_2} + \dots + a_{nn}\vec{e_n}$

Тогда

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} A\vec{e_1} & \qquad A\vec{e_n} \end{array} \end{array}$$ - матрица лин. опер.

2) Закон инерции кв. форм:

Число положительных и отрицательных коэффициентов в нормальном виде кв. формы не зависит от способа приведения кв. формы к нормальному виду.

Задачи

3) $a_1 = (1, 1, 0, 0)^T$

$a_2 = (3, 1, 1, 0)^T$

$a_3 = (-2, 4, 6, 1)^T$

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта

$g_1 = a_1 = (1, 1, 0, 0)^T$

$$g_2 = a_2 - \frac{(a_2; g_1)}{(g_1; g_1)} g_1 = \left\{ \begin{aligned} (a_2; g_1) &= 3 + 1 + 0 + 0 = 4 \\ (g_1; g_1) &= 1 + 1 + 0 + 0 = 2 \end{aligned} \right\} =$$

$$= a_2 - 2g_1 = (3, 1, \cancel{0}, 0)^T - 2(1, 1, 0, 0)^T = (1, -1, 1, 0)^T$$

$$g_3 = a_3 - \frac{(a_3; g_1)}{(g_1; g_1)} g_1 - \frac{(a_3; g_2)}{(g_2; g_2)} g_2 = \begin{cases} (a_3; g_1) = -2+4+0+0=2 \\ (g_1; g_1) = 1+1+1+1=3 \\ (a_3; g_2) = -2-4+6=0 \end{cases}$$

$$= a_3 - g_1 = (-2, 4, 6, 1)^T - (1, 1, 0, 0)^T = (-3, 3, 6, 1)^T$$

$$\text{Пр.:} \ (g_1; g_2) = (g_1; g_3) = (g_2; g_3) = 0$$

4)

$\vec{a}_1 = (7, 3)^T$, $\vec{a}_2 = (6, 2)^T$

$\vec{b}_1 = (5, 3)^T$, $\vec{b}_2 = (2, 2)^T$

$T_{a \to b}$ — ?

Решение

Стандартный базис $S = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = (1, 0)^T \\ \vec{e}_2 = (0, 1)^T \end{cases}$$

$$T_{S \to a} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_{S \to b} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_{s\to b} = T_{s\to a} \cdot T_{a\to b}$$

$$T_{a\to b} = (T_{s\to a})^{-1} \cdot T_{s\to b}$$

$$(T_{s\to a})^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$T_{a\to b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{9}{2} & 1-3 \\ -\frac{15}{4} + \frac{21}{4} & -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

5)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_1{}' = -3e_1 + 2e_2$$

$$\vec{e}_2{}' = 2e_1 - e_2$$

A' - ?

Решение

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \left(T_{B\to B'}\right)^{-1} A\, T_{B\to B'}$$

$$\det T_{B\to B'} = 1$$

$$\left(T_{B\to B'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2-2 \\ -3 & 4-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9+2 & -6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$$ - отгам

б) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3 - x_2^2$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3 - x_2^2 =$$

$$(x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + 2x_2x_3 - x_2^2 =$$

$$\left(x_1^2 + 2x_1(x_2+2x_3)\right) + 2x_2x_3 - x_2^2 =$$

$$\left(x_1^2 + 2x_1(x_2+2x_3) + (x_2+2x_3)^2\right) - (x_2+2x_3)^2 +$$

$$2x_2x_3 - x_2^2 = (x_1+x_2+2x_3)^2 - (x_2+2x_3)^2 -$$

$$(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - x_3^2 =$$

$$= (x_1+x_2+2x_3)^2 - (x_2+2x_3)^2 - (x_2-x_3)^2 - x_3^2$$

$$z_1 = x_1+x_2+2x_3;\ z_2 = x_2+2x_3;\ z_3 = x_2-x_3$$

$$z_4 = x_3$$

$$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & - \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 6 = 7$$

Т.к при $x=(1,4,0)$ $f(x)<0$

при $x=(1,0,0)$ $f(x)>0$ $\Rightarrow f(x)$ - неопределённая

Часть Б

8) $32x^2+7y^2+60xy+20\sqrt{13}x+22y\sqrt{13}+39=0$

$$\begin{pmatrix} 32 & 30 \\ 30 & 7 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{vmatrix} 32-\lambda & 30 \\ 30 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (32-\lambda)(7-\lambda)-900=0$$

$224-39\lambda+\lambda^2-900=0$

$\lambda^2-39\lambda-676=0$

$D=1521+2704=\cancel{4183}$ 4225

$$\lambda=\frac{39\pm65}{2}=\left[\begin{array}{l}52\\-13\end{array}\right.$$

1) $\lambda=52$

$$\begin{pmatrix} -20 & 30 \\ 30 & -45 \end{pmatrix} \underset{\sim}{(-1)I} \begin{pmatrix} 20 & -30 \\ 30 & -45 \end{pmatrix} \underset{\sim}{II-\frac{3}{2}I} \begin{pmatrix} 20 & -30 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен 1 => x - б.з.
y - своб.

$$\begin{cases} 20x = 30y \\ y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}c \\ y = c \end{cases} \Rightarrow \underline{X}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}c \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \quad \vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda = -13$

$$\begin{pmatrix} 45 & 30 \\ 30 & 20 \end{pmatrix} \overset{II - \frac{2}{3}I}{\sim} \begin{pmatrix} 45 & 30 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x - б.з. \\ y - своб. \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 45x = -30y \\ y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}c \\ y = c \end{cases} \Rightarrow \underline{X}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}c \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{f_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad \vec{e_2} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{X} = U \underline{X}' = \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' + 3y') \end{cases}$$

$$52x'^2 - 13y'^2 + 20\sqrt{13}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}(3x'-2y') + 22\sqrt{13}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}(2x'+3y')$$

$$+39=0$$

$$52x'^2 - 13y'^2 + 60x' - 40y' + 44x' + 66y' + 39 = 0$$

$$52x'^2 - 13y'^2 + 104x' + 26y' + 39 = 0$$

$$52(x'^2 + 2x' + 1) \cancel{+52} - 52 - 13(y'^2 - 2y' + 1) + 13 + 39 = 0$$

$$52(x'^2+1)^2 - 13(y'^2-1)^2 = 0$$

$$\frac{(x'+1)^2}{13} - \frac{(y'-1)^2}{52} = 0$$

$$\frac{(x'+1)^2}{13} = \frac{(y'-1)^2}{52}$$

$$\frac{|x'+1|}{\sqrt{13}} = \frac{|y'-1|}{\sqrt{52}}$$

$\cancel{|x'+1|}$

1) $x' < -1,\ y < 1$

$$\frac{-x'-1}{\sqrt{13}} = \frac{-y'+1}{\sqrt{52}}$$

$-y' + 1 = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}(-x' - 1)$

$-y' = -\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}(x'+1) - 1$

$y' = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}(x'+1) + 1$

2) $x \geq -1$; $y \geq 1$

$\frac{x'+1}{\sqrt{13}} = \frac{y'-1}{\sqrt{52}}$

$y' = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}(x'+1) + 1$

3) $x < -1$; $y \geq 1$

$\frac{-x'-1}{\sqrt{13}} = \frac{y'-1}{\sqrt{52}}$

$y' = -\sqrt{\frac{52}{13}}(x'+1) + 1$

4) $x \geq -1$; $y < 1$

$\frac{x'+1}{\sqrt{13}} = \frac{-y'+1}{\sqrt{52}}$

$-y' = \sqrt{\frac{52}{13}}(x'+1) - 1$

$y' = -\sqrt{\frac{52}{13}}(x'+1) + 1$

Две прямые: $y' = \sqrt{\frac{52}{13}}(x'+1)+1$

$y' = -\sqrt{\frac{52}{13}}(x'+1)+1$

$\sqrt{\frac{52}{13}}(x'+1)\cancel{+1} = -\sqrt{\frac{52}{13}}(x'+1)\cancel{+1}$

$2\sqrt{\frac{52}{13}}(x'+1) = 0$

$y' = 2(x'+1)+1$

$y' = -2(x'+1)+1$

$x_0' = -1 \;;\; y_0' = 1$