Кудинов Леонид ИУ1-21

Вариант 8

№1

Пусть ф-ция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные производные второго порядка. Дифференциал второго порядка определяется по формуле

$d^2z = d(dz)$:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x \cdot dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y \cdot dy = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy \Rightarrow$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Второй дифференциал является квадратичной формой от переменных $dx_1, \dots, dx_n$. Матрица данной квадратичной формы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial z^2}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Данная матрица называется матрицей Гессе

№2.

Для функции двух переменных

$$\left.\frac{\partial z}{\partial a}\right| = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot \cos\beta$$

Для ф-ции 3-х переменных:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial a}\right| = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A \cdot \cos\gamma$$

№3

Теорема о достаточном условии диф-ти функции.

Если ф-ция $z=f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x;y)$, то она диф-ма в этой точке и её полный дифференциал выражается по формуле:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

№4

$-4xz^3+3x^4-4y^3z+4xyz^2+1=0$, $M(x_0;y_0;z_0)=(1;4;1)$

нормаль и касательная?

Решение

$$F(x;y;z)=3x^4-4y^3z+4xyz^2+1-4xz^3$$

$$F'_x=12x^3+4yz^2-4z^3\ ;\ F'_x|_M=12$$

$$F'_y=-12zy^2+4xz^2\ ;\ F'_y|_M=-8$$

$F'_z = -4y^3 + 8xyz - 12xz^2$; $F'_z|_M = -8$

Ур-е касательной плоскости:

$$F'_x|_M (x - x_0) + F'_y|_M (y - y_0) + F'_z|_M (z - z_0) = 0$$

$$12(x-1) - 8(y-1) - 8(z-1) = 0$$

$$12x - 12 - 8y + 8 - 8z + 8 = 0$$

$$12x - 8y - 8z + 4 = 0$$

Ур-е нормали к поверхности:

$$\frac{x - x_0}{F'_x|_M} = \frac{y - y_0}{F'_y|_M} = \frac{z - z_0}{F'_z|_M}$$

$$\frac{x-1}{12} = -\frac{y-1}{8} = -\frac{z-1}{8}$$

№ 5

исследовать на экстремум ф-цию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + y - 3 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x + 2y - 6 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

КОЖУ, СЛИЗИСТЫЕ ОБ...

(1) - 2(2):

$0 - 3y + 9 = 0$

$3y = 9$

$y = 3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow M(0; 3)$

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$; $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

$A \cdot C - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow$

точка $M(0; 3)$ является точкой минимума

№6

$z = x^2 + y^2$, при $2x^2 + y^2 = 4$.

I Ф-ция Лагранжа:

$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(2x^2 + y^2 - 4) =$

$= x^2 + y^2 + \lambda 2x^2 + \lambda y^2 - 4\lambda$

$F'_x = 2x + 4\lambda x = 0$

$F'_y = 2y + 2\lambda y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

$F'_\lambda = 2x^2 + y^2 - 4 = 0$

$$\begin{cases} x + 2\lambda x = 0 \\ y + \lambda y = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \lambda = -\frac{x}{2x} \\ &\Rightarrow \lambda = -\frac{y}{y} \end{aligned} \quad \Rightarrow \frac{x}{2x} = \frac{y}{y}$$

$$xy = 2xy$$

$$x(y - 2y) = 0$$

$$\lambda = -1$$

$$x - 2x = 0$$

$$x(1-2) = 0$$

$$-x = 0$$

$$y^2 - 4 = 0$$

$$y = \pm 2$$

$P_0 = (0; 2)$ - стац. точка

$P_1 = (0; -2)$ - стац. точка

Второй дифференциал

$$F''_{xx} = (2x + 4\lambda x)'_x = 2 + 4\lambda$$

$$F''_{xy} = 0$$

$$F''_{yy} = (2y + 2\lambda y)'_y = 2 + 2\lambda$$

$d^2F = (2+4\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2 = -2dx^2 < 0$

$d^2F < 0 \Rightarrow$ т. P_0 и т. P_1 – ~~точки~~ т. условных макси-
-мумов

$z_{max_1} = 0 + 4 = 4$

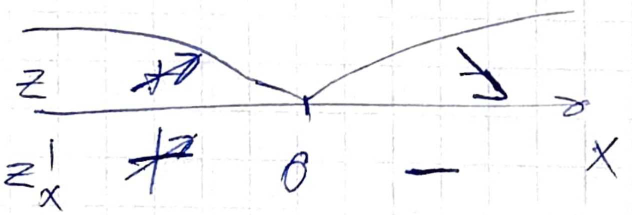
$z_{max_2} = 0 + 4 = 4$

II

$y^2 = 4 - 2x^2$

$z = x^2 + 4 - 2x^2 = -x^2 + 4$

$z'_x = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$



$x = 0$ – т. максимума.

При $x = 0$, $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$\left.\begin{array}{l} P_0(0;2) \\ P_1(0;-2) \end{array}\right\}$ – т. максимума

$z_{max} = 4$

Ответ: ~~P_0, P_1~~

$$\left.\begin{matrix} P_0(0;2) \\ P_1(0;-2) \end{matrix}\right\} \text{- т. условного максимума}$$

$z_{max} = 4$ - условный максимум