РК по Линн. Алг. Кузнецов М. (ИУ1-21)

(Вариант №9)

1. Линейный оператор A, действующий в n-мерном пространстве V, называется ортогональным, если он сохраняет скалярное произведение, т.е. $(Ax, Ay) = (x, y)$ для $\forall x, y \in V$

Матрицу M называют ортогональной, если она удовл. условию: $M^T M = E$, где E - еденичная матрица

2. $\left.\begin{aligned} X_B &= T_{B \to B'} \cdot X_{B'} \\ X_{B'} &= T^{-1}_{B \to B'} \cdot X_B \end{aligned}\right\}$ где X_B - матричная форма записи вектора в базисе B

$X_{B'}$ - —//— B'

$T_{B \to B'}$ - матрица перехода

3. $B: \bar{e}_1 = (1;0)^T$ $\quad \bar{c} = (2;5)^T$

$\bar{e}_2 = (0;1)^T$

$B': \bar{e}_1' = (7;4)^T$

$\bar{e}_2' = (2;1)^T$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \to T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}_{B \to B'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

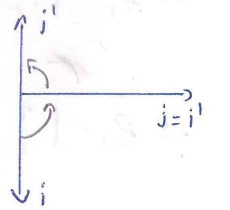
$$c' = T^{-1}_{B \to B'} \cdot c = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+10 \\ 8-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -27 \end{pmatrix}$$

4.

1) $B: \bar{e}_1 = (1;0;0)$

$\bar{e}_2 = (0;1;0)$

$\bar{e}_3 = (0;0;1)$



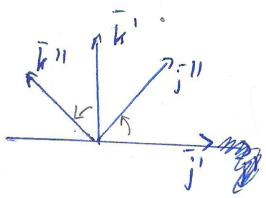
$B': \bar{e}_1 = (0;1;0)$

$\bar{e}_2 = (-1;0;0)$

$\bar{e}_3 = (0;0;1)$

$$\Rightarrow T_{B-B'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)



$i'' = i'$

$j'' = \cos 45 \cdot j' + \sin 45 \cdot k'$

$k'' = -\sin \cdot j' + \cos 45 \cdot k'$

$e_1'' = (1;0;0)$

$e_2'' = (0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$

$e_3'' = (0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\Rightarrow T_{B' \to B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$T_{B \to B''} = T_{B-B'} \cdot T_{B' \to B''} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -3-\lambda & -6 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(5-\lambda) + 12 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \to \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

собств. числа

$\lambda_1 = -1: \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x + 3y = 0;\ x = -3y$

$\lambda_2 = 3 \quad \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x + y = 0;\ x = -y$

$\bar{e}_1 = C_1(-3;1)^T$

$\bar{e}_2 = C_2(1;-1)^T$

собств. вект.

6.

$-2x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 2x_{34} - 2x_4^2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{aligned} &\det(-2) = -2 \text{ - отрицат} \\ &\det\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = 8 - 25 = -17 \text{ - отрицат} \end{aligned}\right\} \to$ форма является непределённой

7. $B=\{\bar e_1 \dots \bar e_n\}$; $B'=\{\bar e_1' \dots \bar e_n'\}$

$\forall \bar x \in B: \bar x = x_1 \cdot \bar e_1 + \dots + x_n \cdot \bar e_n = (\bar e_1 \dots e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = BX$

$\forall x \in B': \bar x = x_1' \cdot \bar e_1' + \dots + x_n' \cdot e_n' = \{\bar e_1' \dots \bar e_n'\} = B'X'$

$\left.\begin{array}{l} \bar e_1' = t_{11}\bar e_1 + \dots t_{n1}\bar e_n \\ \vdots \\ \bar e_n' = t_{1n}\bar e_1 + \dots t_{nn}\bar e_n \end{array}\right\} T_{B\to B'} = \begin{Bmatrix} t_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & t_{nn} \end{Bmatrix}$

$B' = B \cdot T_{B\to B'} \longrightarrow B \cdot T_{B\to B'} \cdot X' = BX$

$X' = (T_{B\to B'})^{-1} X$ или $X = T_{B\to B'} \cdot X'$

8

$5x^2 + 37y^2 + 10z^2 - 24xy - 12xz + 36yz = 0$

$A = \begin{pmatrix} 5 & -12 & -6 \\ -12 & 37 & 18 \\ -6 & 18 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda E| = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 37-\lambda & 18 \\ 18 & 10-\lambda \end{vmatrix} - (-12)\begin{vmatrix} -12 & 18 \\ -6 & 10-\lambda \end{vmatrix} + (-6)\begin{vmatrix} -12 & 37-\lambda \\ -6 & 18 \end{vmatrix} =$

$= -\lambda^3 + 52\lambda^2 - 101\lambda + 50 = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 51\lambda + 50) =$

$= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-50) \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 50 \end{bmatrix}$

$2b^T U X' = (0;0;0) U X' = 0$

Получаем:

$(x')^2 + (y')^2 + 50(z')^2 = 0$

Приведём к каноницч. виду: $\frac{(x')^2}{1^2} + \frac{(y')^2}{1^2} + \frac{(z')^2}{\left(\frac{\sqrt2}{10}\right)^2} = 0$ - ур-е мнимого конуса