РК по ФНП

Кузнецов М. (ИУ1-21)
Вариант 9

А. 1. Производной ФНП по направлению вектора $\vec{n}$ называют число:

$$\frac{df(a)}{dn}=\lim_{s\to+0}\frac{f(a+sn)-f(a)}{s}$$

Пусть ФНП имеет все частные производные первого порядка в т. x, тогда вектор составленный из них будет называться градиентом:

$$\overrightarrow{grad}\, f(x)=(f'_{x_1}(x),\dots f'_{x_n}(x))$$

2.
Ур-е кас: $f'_x(a,b,c)(x-a)+f'_y(a,b,c)(y-b)+f'_z(a,b,c)(z-c)=0$

Ур-е норм: $$\frac{x-a}{f'_x(a,b,c)}=\frac{y-b}{f'_y(a,b,c)}=\frac{z-c}{f'(a,b,c)}$$

3. ~~Пусть $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\ (n>1)$ в окрестности т. a имеет частные производные первого порядка f'_{x_i} и f'_{x_j}, $i\neq j$, а также $f''_{x_ix_j}$ и $f''_{x_jx_i}$. Если эти производные являются непрерывными в т. a, то в этой точке их значения совпадут $f''_{x_ix_j}(a)=f''_{x_jx_i}(a)$~~

Пусть $f(x,x_2,\dots,x_n)(n\geq 1)$ в окрестности т. a имеет частные производные первого порядка f'_{x_i} и f'_{x_j}; $i\neq j$, а также $f''_{x_ix_j}$ и $f''_{x_jx_i}$. Если эти производные являются непрерывными в т. a, то в этой точке их значения совпадут. т.е. $f''_{x_ix_j}(a)=f''_{x_jx_i}(a)$

4.

$f(x,y,z)=x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16$; $M(1,2,3)$

$f'_x=2x+y-2z$ $\quad f'_x(M)=-2$

$f'_y=4y+x+z$ $\quad f'_y(M)=12$

$f'_z=-6z+y-2x$ $\quad f'_z(M)=-18$

Ур-е касат: $-2(x-1)+12(y-2)-18(z-3)=0$

$-2x+12y-18z+32=0$

Ур-е нормали: $$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-3}{-18}$$

5. $z = x^3 + 3y^2 - 2x - 4y$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x = 0 \\ 6y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4/3 \end{array} \right. \end{cases}$$

Расм. две т.: $M_1(0; \frac{1}{3})$ и $M_2(4/3; 1/3)$

$A = z''_{xx} = 6x - 4$; $B = z''_{xy} = 0$; $C = z''_{yy} = 6$

M_1:
$AC - B^2 = -4 \cdot 6 - 0^2 = -24 < 0 \Rightarrow$ экстремума нет

M_2: $AC - B^2 = 4 \cdot 6 - 0^2 = 24 > 0 \Rightarrow$ т. $M_2(4/3; 1/3)$ - т. экстемума

6. $z = x + 2y$, при усл $x^2 + 3y^2 = 21$

$F(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + 3y^2 - 21)$

$$\begin{cases} F'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 1 + 6\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + 3y^2 - 21 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2\lambda}$; $y = -\frac{1}{6\lambda}$

$\rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{3}{6\lambda^2} - 21 = 0 \rightarrow \frac{3}{4\lambda^2} = 21 \rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{28}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{7}} \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ y = -3\sqrt{7} \end{cases}$; $P_1(-\sqrt{7}; -3\sqrt{7})$

$\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{7}} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{7} \\ y = 3\sqrt{7} \end{cases}$; $P_2(\sqrt{7}; 3\sqrt{7})$

$F''_{xx} = 2\lambda$

$F''_{xy} = 0$

$F''_{yy} = 6\lambda$

P_1:
$$\left.\begin{array}{l} d^2F = \frac{1}{\sqrt{7}}dx^2 + \frac{3}{\sqrt{7}}dy^2 = \frac{1}{\sqrt{7}}(dx^2 + 3dy^2) > 0 \\ \lambda > 0 \end{array}\right\}$$ т. min - P_1

$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 6y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 6y & 0 & 6\lambda \end{vmatrix} \rightarrow -(6y)^2 \cdot 2\lambda - (2x)^2 \cdot 6\lambda$

$\lambda > 0 \rightarrow \min$

$\lambda < 0 \rightarrow \max$

P_2:
$$\left.\begin{array}{l} d^2F = -\frac{1}{\sqrt{7}}(dx^2 + 3dy^2) < 0 \\ \lambda < 0 \end{array}\right\}$$ т. max - P_2