Лёшкин Максим. ИУ1-21.

Рубежный контроль №1

по линейной алгебре

Билет 10

Часть А.

Теория

1. Характеристическим уравнением называют уравнение вида $\det(A-\lambda E)=0$, где λ - любое действ. число, A - матрица линейного оператора, E - единичная матрица того же порядка. Ненулевой вектор $\bar{x}$ назыв. собств. вектором оператора A, если оператор A переводит $\bar{x}$ в коллинеарный ему вектор, то есть $A\cdot\bar{x}=\lambda\cdot\bar{x}$. Число λ назыв. собств. значением или собств. числом оператора A, соотв. собств. вектору $\bar{x}$.

2. $\forall\bar{x},\bar{y}\in E: |(\bar{x};\bar{y})|\le|\bar{x}||\bar{y}|$ неравен. Коши-Буняковского

$|x+y|\le|x|+|y|$ нерав. треуг.

Практика.

№3 $c = (1; 2; 3; 4)^T \in \mathbb{R}^4$; $a = (1; -1; 1; -1)^T$

$b = (3; 3; -2; -2)^T$

$c = \lambda_1 a + \cancel{x_2} \, b \cdot \lambda_2$

$(1; 2; 3; 4) = (\lambda_1; -\lambda_1; \lambda_1; -\lambda_1)^T + (3\lambda_2; 3\lambda_2; -2\lambda_2; -2\lambda_2)^T$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 2 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 3 = \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 4 = -\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{array}\right| \Rightarrow$$ нет решения $\Rightarrow$ не принадлежит

№4 $x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$ $\qquad e_1' = e_2$

$Q_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad e_2' = e_1 - e_2$

$Q_{B'} = T^T_{B \to B'} \cdot Q_B \cdot T_{B \to B'}$

$T^T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$Q_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \to Q(y_1; y_2) = -2y_1^2 - 3y_2^2 + 6y_1y_2$

№5 $a_1=(3;2)$ $\qquad b_1=(1;3)$

$a_2=(2;3)$ $\qquad b_2=(-1;2)$

$$B=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\qquad B'=\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}$$

$$A=B'\cdot B^{-1}$$

$$B^{-1}=\left(\begin{matrix}3&2\\2&3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right)\sim\left(\begin{matrix}5&5\\0&0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}3&-2\\-2&3\end{matrix}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0{,}6&-0{,}4\\-0{,}4&0{,}6\end{matrix}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}6&-0{,}4\\-0{,}4&0{,}6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

№6 $4xy-5x^2-8y^2$

$$Q=\begin{pmatrix}-5&2\\2&-8\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix}-5&2\\2&-8\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}-5-\lambda&2\\2&-8-\lambda\end{pmatrix}=(-5-\lambda)(-8-\lambda)-4=$$

$$=40+5\lambda+8\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2+13\lambda+36=0$$

$$\lambda_1=-9\qquad\lambda_2=-4$$

$$\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad 2x+y=0\quad \begin{matrix}x=1\\y=-2\end{matrix}\quad e_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad -x+2y=0\quad \begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}\quad e_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$T_{B \to B'} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_{B \to B'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} (x' + 2y')$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2x' + y')$$

$-9(x')^2 - 4(y')^2$ – канонический вид
(отриц. опред.)