РК 2 по ФНП.   Ложкин М.В
ИУ1-21

Вариант-10.

Теория.

1. Максимум и минимум функции называются экстремумами функции, т.е. говорят, что функция имеет экстремум в данной точке, если эта функция имеет максимум или минимум в данной точке.

Ф-ция $z = f(x, y)$ имеет <u>максимум</u> в точке $M_0(x_0, y_0)$ (т.е. при $x = x_0$ и $y = y_0$), если $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для всех точек (x, y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличные от неё.

Ф-ция $z = f(x, y)$ имеет <u>минимум</u> в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всех точек (x, y), дост. близких к точке (x_0, y_0) и отл. от неё.

2. Св-ва градиента:

1) Градиент направлен по нормали к пов-ти $z = f(x, y)$ в т. M_0

2) Градиент напр-ен в ст-ну наиб. возрастания f-ии и равен по величине мгновенной ск-ти возрастания f-ии.

3) Производная по напр-ию вектора, ⊥-ого к вектору $\overline{\operatorname{grad} z}$

3. Для того, чтобы выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ было полным дифференциалом нек-ой f-ии $u = u(x,y)$, необх-мо и дост-но, чтобы $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ для всех x, y при усл-ии, что $P(x,y)$; $Q(x,y)$; $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в нек-ой огран. области.

II Практика.

4. $F(x,y,z) = (z^2 - x^2)xyz - y^5 - 5$ или

$F(x,y,z) = xyz^3 + x^3yz - y^5 - 5$

$F'_x = yz^3 + 3x^2yz$ $\quad F'_x|_M = 1\cdot 2^3 + 3\cdot 1^2\cdot 1\cdot 2 = 14$

$F'_y = xz^3 + x^3z - 5y^4$ $\quad F'_y|_M = 1\cdot 2^3 + 1^3\cdot 2 - 5\cdot 1^4 = 5$

$F'_z = 3xyz^2 + x^3y$ $\quad F'_z|_M = 3\cdot 1\cdot 1\cdot 2^2 + 1^3\cdot 1 = 25$

Ур-е кас. пл-ти:

$$F'_x|_{(x_0,y_0,z_0)}\cdot(x-x_0) + F'_y|_{(x_0,y_0,z_0)}\cdot(y-y_0) + F'_z|_{(x_0,y_0,z_0)}\cdot(z-z_0) = 0$$

$14(x-1)+5\cdot(y-1)+25\cdot(z-2)=0$

$14x-14+5y-5+25z-50=0$

$14x+5y+25z-69=0$

Ур-е нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

$$\frac{x-1}{14}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-2}{25}$$

5. $z=x^3+8y^3-6xy+1$

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=(x^3+8y^3-6xy+1)'_x=3x^2-6y=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=(x^3+8y^3-6xy+1)'_y=24y^2-6x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x^2-6y=0\\ 24y^2-6x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x^2-6y=0\\ 24y^2-6x=0\end{cases} \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}$$

$24\left(\frac{x^2}{2}\right)^2-6x=0$

$6x^4-6x=0$

$6x(x^3-1)=0$

$x_1=0 \qquad x^3-1=0$

$x_2=1$

$y_1=\frac{0^2}{2}=0 \qquad y_2=\frac{1^2}{2}=0{,}5$

Следовательно, две точки $M_1(0,0)$; $M_2(1;0,5)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x;\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-6;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=48y$$

Для т. $M_1(0,0)$:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6\cdot 0=0\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-6;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=48\cdot 0=0$$

$AC-B^2=0\cdot 0-(-6)^2=-36<0$ не явл. т. экстремума

Для точки $M_2(1;0,5)$:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6\cdot 1=6;\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-6;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=48\cdot 0,5=24$$

$AC-B^2=6\cdot 24-(-6)^2=144-36=108>0$ и $A>0$ $\Rightarrow$

$M_2(1;0,5)$ явл. т. минимума