РК по ЛА и ФНП

Теория:

№1.

Пусть $\exists$ ф-ция: $z = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ и m ур-й связи $(n > m)$: $\varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$

$$\varphi_2(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$$

$$\ldots$$

$$\varphi_m(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$$

Обозначив мн-ли Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ составим ф-цию Лагранжа: $F(x_1, x_2 \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m) =$

$$= f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_m \varphi_m$$

Необходимые условия наличия условного экстремума задаются системой ур-й, из которой находятся координаты стационарных точек и значение множителей Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0\,; & i = \overline{1,n} \\ \varphi_j = 0\,; & j = \overline{1,m} \end{cases}$$

№2. Вычисление производной сложной ф-ции вида $u = f(x(t), y(t), z(t))$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

№3. Теорема (Тейлора для ф-ции 2-х переменных):

Пусть $z = f(x, y)$ – непрерыв. со всеми част. произв до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности т. $M_0(x_0, y_0)$. Тогда для любой т. $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ этой окрестности имеет место равенство:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = f(x_0; y_0) + df(x_0; y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0; y_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0; y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x; y_0 + \theta \Delta y), \quad 0 < \theta < 1$$

Практика:

№4. Составить ур-я касательной пл-ти и нормали к поверхности $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ в т. $M(2,2,1)$

Решение:

$$F(x,y,z) = 2^{x/z} + 2^{y/z} - 8$$

$$F'_x = \frac{2^{x/z}\ln 2}{z}; \quad F'_y = \frac{2^{y/z}\ln 2}{z};$$

$$F'_z = 2^{x/z}\ln 2 \cdot \left(-\frac{x}{z^2}\right) + 2^{y/z}\ln 2\left(-\frac{y}{z^2}\right)$$

$$F'_x\big|_M = 4\ln 2; \quad F'_y\big|_M = 4\ln 2; \quad F'_z\big|_M = -16\ln 2$$

Ур-е касательной пл-ти:

$$F'_x\big|_M (x-x_0) + F'_y\big|_M (y-y_0) + F'_z\big|_M (z-z_0) = 0$$

$$4\ln 2(x-2) + 4\ln 2(y-2) - 16\ln 2(z-1) = 0$$

$$x-2+y-2-4z+4=0 \qquad \boxed{x+y-4z=0}$$

Ур-е нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_M} = \frac{y-y_0}{F'_y\big|_M} = \frac{z-z_0}{F'_z\big|_M}$$

$$\frac{x-2}{4\ln 2} = \frac{y-2}{4\ln 2} = \frac{z-1}{-16\ln 2} \qquad \boxed{\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}}$$

№5. Исследовать на экстремум ф-цию $z = 2x^3 + y^3 - 6xy$

Решение:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 6y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

$$M_1(0;0) \; ; \; M_2(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x \; ; \; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6 \; ; \; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

т. $M_1(0;0)$:

$$A = 0 \; ; \; B = -6 \; ; \; C = 0$$

$AC - B^2 = 0 - 36 = -36 < 0$ $\boxed{\text{- экстремума нет}}$

т. $M_2(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$:

$$A = 12 \cdot \sqrt[3]{2} \; ; \; B = -6 \; ; \; C = 6 \cdot \sqrt[3]{4}$$

$$AC - B^2 = 12 \cdot 6 \cdot \sqrt[3]{8} - 36 = 144 - 36 = 108 > 0$$

$$\begin{cases} AC - B^2 > 0 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{т.} M_2 \text{ - т. минимума}}$$

№6. Исследовать на экстремум ф-цию $z = x^2 + y^2 - 5$ при условии, что $xy = 1$.

Решение:

$$\cancel{\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{т.} M(0;0)}$$

ур-е Лагранжа:

$$\varphi = x^2+y^2+5+\lambda(xy-1)$$

$$\begin{cases} \varphi'_x = 2x+\lambda \cancel{x}y = 0 \\ \varphi'_y = 2y+\lambda x\cancel{y} = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$\cancel{2x}$ $\cancel{\lambda}$ $\begin{cases} y = \dfrac{-2x}{\lambda} \\ x = \dfrac{-2y}{\lambda} \\ \dfrac{4xy}{\lambda^2} = 1 \end{cases}$

$4xy = \cancel{\lambda^2}$ $\begin{cases} \cancel{xy = 1} \\ \cancel{y = \dfrac{4y}{\lambda^2}} \\ \cancel{x = \dfrac{2y}{\lambda}} \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}\right. \\ y^2 = \dfrac{-2}{\lambda} \\ x^2 = \dfrac{-2}{\lambda} \end{cases}$$

$M_1(-1;-1)$ и $M_2(1;1)$
при $\lambda = -2$.

$$d\varphi = (2x+\lambda y)dx + (2y+\lambda x)dy$$

$$d^2\varphi = 2d^2x + 2d^2y = 2(d^2x+d^2y) > 0$$

т.е. точки M_1 и M_2 – т. условного минимума

$\cancel{z}$ $z(x_{M_1}; y_{M_1}) = -3$

$z(x_{M_2}; y_{M_2}) = -3.$