Вариант 14.

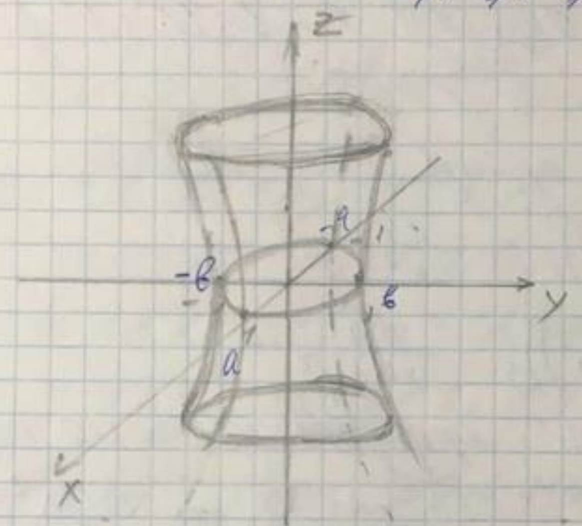
Суркова А.Д.

1. Найти и изобразить поверхность уровня функции $u = x^2 + y^2 - z^2$, проходящую через точку $(1; -1; 1)$.

Решение: $u = x^2 + y^2 - z^2$, так как поверхность проходит через точку $(1, -1, 1)$, то $u = 1^2 + (-1)^2 - 1^2$

$u = 1 \Rightarrow$ следовательно, $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1^2} - \frac{z^2}{1^2} = 1$ - однополосный гиперболоид.

$a = 1$
$b = 1$
$c = 1$



2. Для функции $z = xe^{xy}$ в точке $M(1, 1)$ найти градиент и производную в направлении вектора $l = i - 2j$

Найдем частные производные и их знач. в т. M.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (xe^{xy})'_x = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M = e^{1 \cdot 1} + 1 \cdot 1 e^{1 \cdot 1} = 2e$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (xe^{xy})'_y = x^2 \cdot e^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M = (1)^2 \cdot e^{1 \cdot 1} = e$$

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (2e; e)$$

2. Найдем ед. вектор

$$|l| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \qquad l_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M \cdot \cos\beta = 2e \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - e \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$$

Ответ: $\operatorname{grad} z|_M = (2e; e)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_M = 0$.

③ Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^x \sin y$?

Пусть $y = k\cdot x$, тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^x \sin y = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} e^x\cdot \sin y = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} e^x\cdot \sin kx = 0$$

Результат не будет зависеть от коэф. k.

Мы получили конечное знач. предела, следовательно предел существует.

Ответ: существует.

④ Показать что функция $z = \ln(x^2+y^2)$ удовлетв. уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

Найдем частные произв. 1-го порядка.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln(x^2+y^2))'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(x^2+y^2))'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Найдем частные производные 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{2(x^2+y^2) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{2(x^2+y^2) - 2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2+2y^2+2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

ЧТД.

⑤ Неявная функция $z(x,y)$ в окрестности точки $(-2;1,1)$ задана ур-ем:

$$\sin(x+y+z) = 2z+x$$

Найти дифференц. функции z в точке $(-2;1)$.

С помощью найденного выражения вычислить приближенно $z(-2,1;0,9)$

Пусть $F(x,y,z) = \sin(x+y+z) - 2z - x$

Найдем частные производные:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\cos(x+y+z)-1}{\cos(x+y+z)-2}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\cos(x+y+z)}{\cos(x+y+z)-2}$$

При $x_0 =$ $y_0 =$ $z =$

$$z'_x = -\frac{\cos(x+y+z)-1}{\cos(x+y+z)-2}\Big|_{(-2;1;1)} = -\frac{\cos(0)-1}{\cos(0)-2} = \frac{1-1}{1-2} = 0$$

$$z'_y = -\frac{\cos(x+y+z)}{\cos(x+y+z)-2}\Big|_{(-2;1;1)} = \frac{-\cos(0)}{\cos(0)-2} = \frac{+1}{1} = 1$$

Тогда $dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y = 0\cdot\Delta x + 1\cdot\Delta y = 1\cdot\Delta y$

2. Приближенное значение $z(-2,1;0,9)$

$$x = x_0 + \Delta x \to x_0 = -2;\ \Delta x = -0,1$$

$$y = y_0 + \Delta y \to y_0 = 1;\ \Delta y = -0,1$$

Приближенное знач. функции:

$z|_{(-2,1;0,9)} \approx z|_{(-2;1)} + dz$, где $dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y = 1\cdot\Delta y$

Приближенное значение

$$z|_{(-2,1;0,9)} \approx 1 - 0,1 = 0,9$$

Ответ. $dz = dy$ в т$(-2;1)$; $z(-2,1;0,9) \approx 0,9$