РК1 Вар 14

Часть А.

1. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

• Система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ называется линейно зависимой, если хотя бы один из векторов системы можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов системы. • Система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ называется линейно независимой, если нулевая комбинация векторов возможна лишь при всех $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ равных нулю

$$\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n} - ЛЗ \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}: \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$$

$$\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \dots + \alpha_n\overline{a_n} = 0$$

$$\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n} - ЛНЗ \overset{def}{\Longleftrightarrow} \alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \dots + \alpha_n\overline{a_n} = 0 \text{ только при } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

2. Дать определение самосопряженного линейного оператора на евклидовом пространстве и сформулировать теорему о виде матрицы самосопр. оператора в ортонормированном базисе.

Линейный оператор A в евклидовом пространстве называется самосопряженным, если справедливо равенство $A^* = A$. (т.е. для любых x и y из евкл. пространства $(Ax, y) = (x, A^*y)$)

Теорема о виде матрицы самосопр. оператора в ортонормированном базисе: Матрица самосопр. оператора в ортонормированном базисе является симметрической. Если матрица линейного оператора в некотором ортонорм. базисе явл. симметрической, то оператор является самосопряженным.

Практическая часть.

3.) Найти ортогональный базис линейной оболочки системы векторов $\bar{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\bar{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\bar{a}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ евклидова пространства R^4 (скалярное произв. станд.)

Решение: $\bar{b}_1'=\bar{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\bar{b}_2'=\bar{a}_2-\frac{(\bar{a}_2,\bar{b}_1')}{|\bar{b}_1'|^2}\cdot\bar{b}_1'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1+1+1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\-3/4\end{pmatrix}$$

$$\bar{b}_3'=\bar{a}_3-\frac{(\bar{a}_3\bar{b}_1')}{|\bar{b}_1|^2}\cdot b_1'-\frac{(\bar{a}_3,\bar{b}_2')}{(\bar{b}_2')}\bar{b}_2'=$$

$$=\bar{a}_3-\frac{2}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{\frac{2}{4}}{3/4}\begin{pmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\-3/4\end{pmatrix}=\bar{a}_3-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\-3/4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-1/2-1/6\\1-1/2-1/6\\0-1/2-1/6\\0-1/2+1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\\0\end{pmatrix}$$

Нормируем

$$\bar{b}_1=\frac{\bar{b}_1'}{|\bar{b}_1'|}=\frac{1}{2}\bar{b}_1'=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\bar{b}_2=\frac{\bar{b}_2'}{|\bar{b}_2'|}=\frac{b_2'}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\-3/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/6\\\sqrt{3}/6\\\sqrt{3}/6\\-\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$$

$$\bar{b}_3=\frac{\bar{b}_3'}{|\bar{b}_3'|}=\frac{\bar{b}_3}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{3}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/6\\-\sqrt{6}/3\\0\end{pmatrix}$$

Ответ: $\bar{b}_1=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$ $\bar{b}_2=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/6\\\sqrt{3}/6\\\sqrt{3}/6\\-\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ $\bar{b}_3=\begin{pmatrix}\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/6\\-\sqrt{6}/3\\0\end{pmatrix}$

4.) Найти матрицу перехода от базиса $\bar{a}_1=(1\,2)^T$, $\bar{a}_2=(3,5)^T$ к базису $\bar{b}_1=(-1\,2)^T$ $\bar{b}_2=(2\,-1)^T$ пространства R^2.

$T_{A\to B}$ - ?

$$T_{A\to E}=\left(\underbrace{\begin{matrix}1&3\\2&5\end{matrix}}_{T_{E\to A}}\left|\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right.\right)\sim\left(\begin{matrix}1&3\\0&-1\end{matrix}\left|\begin{matrix}1&0\\-2&1\end{matrix}\right.\right)\sim\left(\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\left|\underbrace{\begin{matrix}-5&3\\2&-1\end{matrix}}_{T_{A\to E}}\right.\right)$$

$$T_{E\to B}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-1\end{pmatrix}$$

$$T_{A\to B}=T_{A\to E}\cdot T_{E\to B}=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-13\\-4&5\end{pmatrix}$$

Ответ: $T_{A\to B}=\begin{pmatrix}11&-13\\-4&5\end{pmatrix}$

5) Линейный оператор A, действующий на некотором двумерном пространстве, в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $e_1' = e_1 - e_2$; $e_2' = 2e_1 + e_2$

$$T_{\bar{e} \to \bar{e}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = T^{-1}_{\bar{e} \to \bar{e}'} A \; T_{\bar{e} \to \bar{e}'}$$

$$T^{-1}_{\bar{e} \to \bar{e}'} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 8/3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 8/3 \end{pmatrix}$

6) Привести квадратичную форму $4x_1x_3 + x_3^2 + 2x_2x_3$ к сумме квадратов методом Лагранжа. Определить, является ли эта форма положительно определенной, отрицательно определенной или неопределенной.

$$x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 = (x_3 + x_2 + 2x_1)^2 - 4(x_1^2 + x_1x_2 \cdot 2\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x_2^2) = (x_3 + x_2 + 2x_1)^2 - 4(x_1 + \tfrac{1}{2}x_2)^2 =$$
$$= (2x_1 + x_2 + x_3)^2 - (2x_1 + x_2)^2$$

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

$A(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$ – канонич. вид квадр. формы.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 0 \Rightarrow \text{неопределенная форма}$$

Ответ: $A(y_1; y_2) = y_1^2 - y_2^2$, неопределенная форма

Часть Б

7) Вывести формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса лин. пространства к другому.

Пусть есть линейное пространство L, $\dim L = n$

Пусть есть базисы $\bar{e} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ и $\bar{e}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ и вектор $\bar{x} \in \mathbb{R}$

$\bar{x} = x_1 \bar{e} + \dots + x_n \bar{e}_n$ - разложение $\bar{x}$ по базису $\bar{e}$

(1) $\bar{x} = \bar{e} X$ - в матричном виде, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - коорд. $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}$

$\bar{x} = x_1' \bar{e}_1' + \dots + x_n' \bar{e}_n'$ - разложение $\bar{x}$ по базису в $\bar{e}'$

(2) $\bar{x} = \bar{e}' X'$ - где $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

(1) = (2) $\quad \bar{e} X = \bar{e}' X'$

$\bar{e}' = \bar{e} \cdot T_{\varepsilon \to \varepsilon'}$, матрица перехода от $\bar{e}$ к $\bar{e}'$

Получаем: $\quad \bar{e} X = \bar{e} (T_{\varepsilon \to \varepsilon'} X')$

$$X = T_{\varepsilon \to \varepsilon'} \cdot X'$$

Умножаем на $(T_{\varepsilon \to \varepsilon'})^{-1}$ $\quad (T_{\varepsilon \to \varepsilon'})^{-1} X = X'$ - формула преобразования коорд. вектора при переходе к новому базису.

$$(T_{\varepsilon \to \varepsilon'})^{-1} X = E X'$$

(8) Привести кривую $-3x^2 + 3y^2 + 8xy - 8\sqrt{5}x - 6\sqrt{5}y + 15 = 0$ к каноническому виду. Указать соотв. преобр. координат. Построить кривую в исходной системе координат.

$-3x^2 + 3y^2 + 8xy \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = 0$

$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(3+\lambda)(3-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 25 = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$

$\lambda_1 = -5 \quad \lambda_2 = 5$

• $\lambda_1 = -5 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $\lambda_2 = 5 \quad \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A(x', y') = -5x'^2 + 5y'^2$

$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' \end{cases}$$

$$-8\sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)-6\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)=10x'-20y'$$

$$-5x'^2+5y'^2+10x'-20y'+15=0$$

$$-5(x'-1)^2+5(y'-2)^2=0$$

$$\frac{(y'-2)^2}{1^2}-\frac{(x'-1)^2}{1^2}=0$$

$$x''=y'-2$$

$$y''=x'-1$$

$$\frac{x''^2}{1}-\frac{y''^2}{1}=0$$ – ур-е 2-х пересек. прямых