Билет №14 Суркова А.Д. ИУ1-21

1. Дать определение предельной точки, граничной точки множества и замкнутого множества в R^n

1) Точку $a \in R^n$ называют граничной точкой множества $A \subseteq R^n$, если любая ε-окрестность точки a содержит как точки, принадлежащие множеству A, так и точки, не принадлежащие этому множеству.

2) Множество, которое содержит все свои граничные точки (свою границу), называют замкнутым множеством.

3) Точку $a \in R^n$ называют предельной точкой множества $A \subset R^n$, если в любой ее проколотой окрестности есть точки из множества A (Предельная точка множества может либо принадлежать этому множеству, либо не принадлежать ему. Если т. a является предельной для множества A, то в любой окрестности $U(a, \varepsilon)$ этой точки содержится бесконечно много точек множества A.)

2. Записать формулу для вычисления производной ФНП по направлению.

Для функции 2-х переменных

$$\frac{\partial z}{\partial a}\Big| = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot \cos\beta$$

Для функции 3 переменных

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A \cdot \cos\gamma$$

3. Сформулировать достаточные условия экстремума ФНП

Пусть функция нескольких переменных $f: R^n \to R$ определена в окрестности $U(a)$ точки a, дважды непрерывно дифференц. в $U(a)$ и $df(a) = 0$. Тогда:

1) если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a положительно определенная, то в этой точке функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум

2) если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a отрицательно определенная, то в этой точке функция $f(x)$ имеет строгий локальный максимум

3) если квадратичная $d^2f(a)$ в точке a знакопеременная, то в этой точке функция $f(x)$ не имеет экстремума.

④ Составить ур-я касательной плоскости и нормали к поверхности $z = y + \ln\frac{x}{z}$ в точке $(1,1,1)$

$F(x,y,z) = y + \ln\frac{x}{z} - z = y + \ln x - \ln z - z$

$F'x = \frac{1}{x}$ $\quad$ $F'x|m = 1$

$F'y = 1$ $\quad$ $F'y|m = 1$

$F'z = -\frac{1}{z} - z$ $\quad$ $F'z|m = -2$

Ур-е касательной плоскости:

$F'x|_{(x_0y_0z_0)} \cdot (x - x_0) + F'_y|_{(x_0,y_0z_0)}(y - y_0) + F'_z|_{(x_0,y_0z_0)}(z - z_0) = 0$

$$1(x-1) + 1(y-1) + (-2)(z-1) = 0$$

$$x - 1 + y - 1 - 2z + 2 = 0$$

$$x + y - 2z = 0$$

Ур-е нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'x|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{y - y_0}{F'y|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{z - z_0}{F'z|_{(x_0,y_0,z_0)}}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

⑤ Исследовать на экстремум функцию

$$z = -11x^2 + 16xy - 6y^2 + 60x - 44y$$

★ Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = (-11x^2 + 16xy - 6y^2 + 60x - 44y)' = -22x + 16y + 60 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = (-11x^2 + 16xy - 6y^2 + 60x - 44y)' = 16x - 12y - 44 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -22x + 16y + 60 = 0 \\ 16x - 12y - 44 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11x + 8y = -30 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$$

отсюда $y = -1$; $x = 2$

Получаем точку $M(2; -1)$

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -22$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 16$; $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12$

Для т. M $\quad AC - B^2 = -22(-12) - 16^2 = 264 - 256 = 8 > 0$

и $A < 0$ точка $M(2; -1)$ является точкой максимума

⑥ Исследовать на экстремум функцию $z = 4x^2 + 9y^2 - 10$ при условии $xy = \frac{3}{2}$

Решение: $y = \frac{3}{2x} \Rightarrow z = 4x^2 + 9 \cdot \frac{9}{4x^2} - 10 = 4x^2 + \frac{81}{4 \cdot x^2} - 10$

$z'_x = 8x - \frac{81}{2x^3}$

$\frac{16x^4 - 81}{2x^3} = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \quad x_2 = \frac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$

x		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$	
z'_x	$-$		$+$		$-$		$+$
z_x	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

при $x = -\frac{3}{2}$ $\quad y = \frac{3}{2\left(\frac{-3}{2}\right)} = -1$; $M_1\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ точка минимума

при $x = \frac{3}{2}$ $\quad y = \frac{3}{2\left(\frac{3}{2}\right)} = 1$; $M_2\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ – точка минимума

$z_{min1} = 4 \cdot \frac{9}{4} + 9 - 10 = 8$

$z_{min2} = 4 \cdot \frac{9}{4} + 9 - 10 = 8$

Ответ: $M_1\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ $M_2\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ – точки минимума

$z_{1min} = z_{2min} = 8.$