Федоренко Д

ИУ1-21

Вариант 15

1. Совокупность линейно независимых элементов $e_1, e_2 \dots e_n$ пространства L называется базисом этого пространства, если для каждого элемента x этого пространства R существуют вещественные числа $x_1, x_2 \dots x_n$ такие, что выполнено равенство:

$$x = x_1 e + x_2 e_2 + \dots x_n e_n$$

Линейное пространство называется n-мерным, если в нем существует n линейно независимых элементов. Число n называется размерностью пространства L.

2. Все корни характеристического ур-ия самосопряженного оператора действительны

Задачи. Часть А.

1 Дано:

$C = (1, -1)^T$

$e_1 = (1, 0)^T$

$e_2 = (0, 1)^T$

$e_1' = (2, 1)^T$

$e_2' = (1, 1)^T$

$c' - ?$

Решение:

$$c' = T^{-1}_{B \to B'} \cdot C$$

$$E' = E \cdot T_{B \to B'}. \quad T_{B \to B'} = E^{-1} \cdot E'$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \det E = 1$$

$$\tilde{E}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E^{-1} = \frac{\tilde{E}^T}{\det E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \tilde{T}_{B-B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{T}^T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det T_{B \to B'} = 1.$$

$$T^{-1}_{B \to B'} = \frac{\tilde{T}^T_{B \to B'}}{\det T_{B \to B'}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $c' = (2; -3)^T$

4.

$B' = \{i', j', k'\}$

$B = \{i, j, k\}$

$\varphi = 90^\circ_{\text{пр.}}$ вокруг i

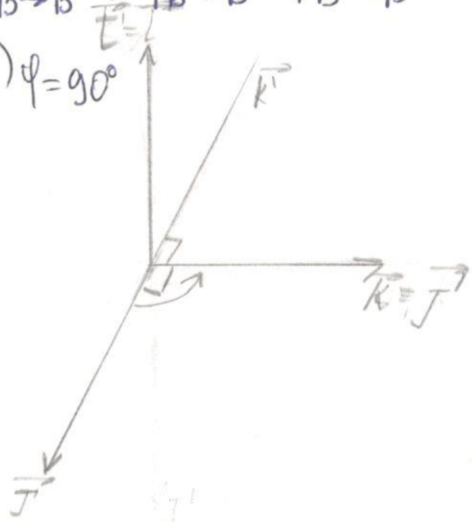
$\gamma = 90^\circ_{\text{по}}$ вокруг k'

$T_{B\to B''}$

$T_{B\to B'} \longrightarrow T_{B'\to B''}$

$T_{B\to B''} = T_{B\to B'} \cdot T_{B'\to B''}$

1) $\varphi = 90^\circ$



$B' = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$

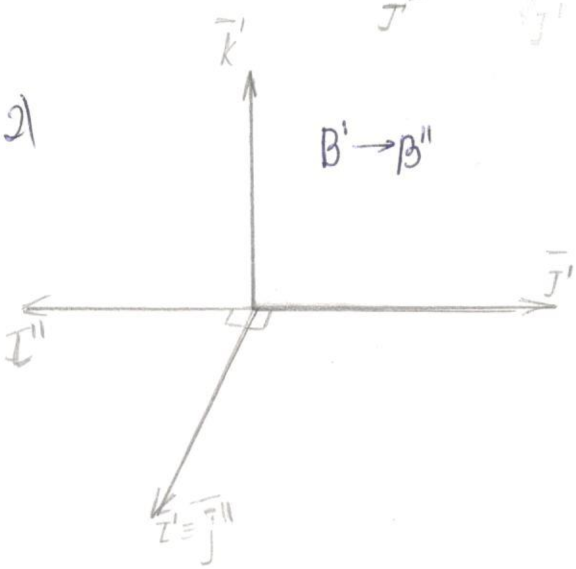
$\vec{i}' = \vec{i}$

$\vec{j}' = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$

$\vec{k}' = 0\vec{i} - 1\vec{j} + 0\vec{k}$

$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $B' \to B''$



$B'' = \{\vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}''\}$

$\vec{i}'' = 0\cdot\vec{i}' - 1\cdot\vec{j}' + 0\cdot\vec{k}'$

$\vec{j}'' = 1\cdot\vec{i}' + 0\cdot\vec{j}' + 0\cdot\vec{k}'$

$\vec{k}'' = 0\cdot\vec{i}' + 0\cdot\vec{j}' + 1\cdot\vec{k}'$

$T_{B'\to B''} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$T_{B\to B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $T_{B\to B''} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda E)X = 0$

$\det|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)(3+\lambda) + 12 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_1 = 3$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -3 \qquad \lambda_2 = -1$

1) $\lambda = -1$

$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Rg A = 1$

x_1 - базис

x_2 - свобод.

$x_2 = C \quad x_1 = -3C$

$X = C\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\lambda = 3$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Rg A = 1$

x_1 - базис $\qquad x_2 = C$

x_2 - свобод. $\qquad x_1 = -C$

$X = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ответ: $\lambda_1 = -1, \ X = C\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3, \ X = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_3x_4 + 5x_4^2$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2) + 5 = 1 > 0$

$\left.\begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \\ \Delta_4 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ по критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена

8. $2x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-8yz$

$$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$$

$$\det|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)^2+16+16-4(5-\lambda)-16(2-\lambda)-4(5-\lambda)=0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+25)+12+4\lambda-32+16\lambda-20+4\lambda=0$$

$$\cancel{2\lambda^2-20\lambda+50-\lambda^3-10\lambda^2-25\lambda+24\lambda-40=0}$$

$\cancel{-\lambda^3}$ $\quad \lambda^3-12\lambda^2+21\lambda-10=0$

$\lambda=1 \quad 1 \quad -11 \quad 10 \quad 0$ – корень

$$(\lambda-1)(\lambda^2-11\lambda+10)=0$$

$$\lambda^2-11\lambda+10=0$$

$\lambda_1+\lambda_2=11 \qquad \lambda_1=1$

$\lambda_1\cdot\lambda_2=10 \qquad \lambda_2=10$

$\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

x_1 – базис.

y_1, z_1 – свобод.

$x=-2y_1+2z_1$

$$X=\begin{pmatrix}-2y_1+2z_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}y_1+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}z_1,$$

$$X_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\quad X_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix};\quad \bar e_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\quad \bar e_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\lambda=10$

$$\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&1&-1\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&1&-2\\2&-5&-4\\0&-9&-9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&1&-2\\0&-9&-9\\0&-9&-9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&1&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

x – базисн. y, z – свобод. $\quad y=-z;\ -4x=-y+z \quad y=2x \quad x=\frac{-2z}{2}$

$$X_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\quad \bar e_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}&\frac13\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&\frac23\\0&0&-\frac23\end{pmatrix}.\qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}x=\frac{-2}{\sqrt5}x'+\frac{2}{\sqrt5}y'+\frac13 z'\\ y=\frac{1}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y'+\frac23 z'\\ z=-\frac23 z'\end{cases}$$

7. Пусть матрица A – матрица линейного оператора A в $B\{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\}$

Найдем матрицу C лин. оператора A в $B'\{\vec{e}_1' \dots \vec{e}_n'\}$ $U_{B \to B'}$ – матрица перехода

(1) $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ в $B\{\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\}$

(2) $\vec{y}' = C\vec{x}'$ в $B'\{\vec{e}' \dots \vec{e}_n'\}$

(3) $\vec{x} = U_{B \to B'} \vec{x}'$

(4) $\vec{y} = U_{B \to B'} \vec{y}' \Rightarrow \vec{y}' = U_{B \to B'}^{-1} \vec{y}$

$$\vec{y}' = U_{B \to B'}^{-1} \vec{y} = U_{B \to B'}^{-1} A \vec{x} = U_{B \to B'}^{-1} A \cdot U_{B \to B'} \vec{x}'$$

$$y' = C\vec{x}' \Rightarrow \quad C\vec{x}' = U_{B \to B'}^{-1} A \cdot U_{B \to B'} \vec{x}'$$

$C = U_{B \to B}^{-1} \cdot A \cdot U_{B \to B'}$ – искомая матрица

$$\boxed{C = U_{B \to B'}^{-1} \cdot A \cdot U_{B \to B'}}$$