4. $xy + e^{x2} = 0$

$M(5; -\frac{1}{5}; 0)$

$$\begin{cases} F'_x = y + 2e^{x2} \\ F'_y = x \\ F'_z = xe^{x2} \end{cases} \qquad \begin{aligned} F'_x|_M &= -\frac{1}{5} \\ F'_y|_M &= 5 \\ F'_z &= 5 \end{aligned}$$

Уравнение касательной плоскости:

$$-\frac{1}{5}(x-5) + 5(y+\frac{1}{5}) + 5z = 0$$

Уравнение нормали: $\dfrac{x-5}{-\frac{1}{5}} = \dfrac{y+\frac{1}{5}}{5} = \dfrac{z}{5}$

5. $z = x^3 + y^3 + xy + 2$

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + y = 0 \\ z'_y = 3y^2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ 3 \cdot 9x^4 + x = 0 \end{cases}$$

$x(27x^3 + 1) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{1}{3}$

$y_1 = 0 \quad y_2 = -\frac{1}{3}$

$M_1(0;0) \quad M_2(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$

$$\begin{cases} z''_x = 6x = A \\ z''_{xy} = +1 = B \\ z''_{yy} = 6y \end{cases}$$

$M_1(0;0)$	$M_2(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$
$A = 0$	$A = -2$
$B = 1$	$B = 1$
$C = 0$	$C = -2$

$M_1(0;0) = AC - B^2 = -1 < 0$ не является точкой экстремума

$M_2(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}) = AC - B^2 = 3 > 0$; $A < 0 \Rightarrow M_2(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$ – точка максимума

6. $z = e^x - y$ при условии $y - x = 5$

<u>1 шаг</u> Функция Лагранжа:

$$F(x, y, \lambda) = e^x - y + \lambda(-x + y - 5)$$

$$\begin{cases} F'_x = e^x - \lambda = 0 \\ F'_y = -1 + \lambda = 0 \\ F'_\lambda = y - 5 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = e^x \\ e^x = 1 \\ y - 5 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 5 \\ x = 0 \end{cases}$$

4. $xy + e^{xz} = 0$

$M(5, -\frac{1}{5}, 0)$

$$\begin{cases} F'_x = y + ze^{xz} & F'_x|_M = -\frac{1}{5} + 0e^{5\cdot 0} = -\frac{1}{5} \\ F'_y = x & F'_y|_M = 5 \\ F'_z = xe^{xz} & F'_z = 5\cdot e^0 = 5 \end{cases}$$

Ур-ие касательной плоскости:

$$-\frac{1}{5}(x-5) + 5(y+\frac{1}{5}) + 5(z-0) = 0$$

Ур-ие нормали: $\frac{x-5}{-\frac{1}{5}} = \frac{y+\frac{1}{5}}{5} = \frac{z-0}{5}$

5. $z = y^2 + 2xy - x^2 - 2x + y^3$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 2x - 2 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x - 1 = 0 \\ 2y + 2x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ 2y + 2y - 2 + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$3y^2 + 4y - 2 = 0$

$D = 16 + 4\cdot 6 = 16 + 24 = 40$

$y_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{10}}{6} = \frac{-2+\sqrt{10}}{3}$

$y_2 = \frac{-2-\sqrt{10}}{3}$

$x_1 = \frac{-2+\sqrt{10}}{3} - 1 = \frac{-5+\sqrt{10}}{3}$

$x_2 = \frac{-5-\sqrt{10}}{3}$

$M_1\left(\frac{-5+\sqrt{10}}{3}; \frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right)$ $M_2\left(\frac{-5-\sqrt{10}}{3}; \frac{-2-\sqrt{10}}{3}\right)$

	M_1	M_2
$z''_x = -2 = A$	$A = -2$	$A = -2$
$z''_{xy} = 2 = B$	$B = 2$	$B = 2$
$z''_{yy} = 2 + 6y = C$	$C = -2+2\sqrt{10}$	$C = -2-2\sqrt{10}$

M_1: $AC - B^2 = 4 - 4\sqrt{10} - 4 = -4\sqrt{10} < 0$ экстремума нет

M_2: $4 + 4\sqrt{10} - 4 = 4\sqrt{10} > 0$ и $A < 0 \Rightarrow$ точка $M_1\left(\frac{-5-\sqrt{10}}{3}; \frac{-2-\sqrt{10}}{3}\right)$ является точкой максимума

$F''_{xx} = e^x$

$F''_{yy} = 0$ $\quad d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$

$F''_{xy} = 0$ $\quad d^2F = 2(dx^2 + dy^2) > 0$

$d^2F > 0,\ \lambda > 0 \Rightarrow M(0;5)$ - точка условного минимума

$z_{min} = e^0 - 5 = -4$ - минимум условный

Ответ: $M(0;5)$ - т. условного минимума

$z_{min} = -4$ - минимум условный

Теория

1 Множество $L \subseteq \mathbb{R}^n$, любые 2е точки которого можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этом множестве, называют линейно связным. Множество $L \in \mathbb{R}^n$ называют ограниченным, если существует такое положительное число r, что r-окрестность точки $O = (0, \ldots, 0)$ содержит множество L

2 Свойства градиента:

- Градиент направлен по нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в точке M_0.
- Градиент направлен в сторону наибольшего возрастания функции и равен по величине мгновенной скорости возрастания функции
- Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору grad z, равна нулю

3 Необходимое условие экстремума ФНП:

Если $z = f(x,y)$ имеет экстремум в точке $P_0(a,b)$, тогда $f'_x = 0$ и $f'_y = 0 \Rightarrow$ $df = 0$