Черкашин С.С. гр. 3-1-21 В-16

а) $8x^2+5y^2-4xy+8\sqrt{5}x+16\sqrt{5}y+64=0$

1) Приведем к кан. виду

$Q(x,y)=8x^2-4xy+5y^2$

2) Заменим линейную форму в нов. переменных

$8\sqrt{5}x+16\sqrt{5}y=8\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)+16\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)=\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x'-\frac{2\cdot 8\sqrt{5}}{\sqrt{5}}y'+\frac{2\cdot 16\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x'+$

$16y'=8x'+32x'=40x'$

Ур-ие кривой в новых переменных.

$4x'^2+9y'^2+40x'+64=0$

$4x'^2+40x'=4(x'^2+10x'+25-25)=$

$=4(x'^2+10x'+25)-100=4(x'+5)^2-100$

Уравнение кривой:

$4(x'+5)^2+9y'^2-100+64=0$

Сделаем еще одну замену.

$$\begin{cases} x''=x'+5 \\ y''=y' \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 \\ -2 & 5\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$ $\lambda_1 = 4$ $\lambda_2 = 9$

$Q = f(x', y') = 4x'^2 + 9y'^2$ в кар. $x'y'$

Вектора для матрицы A: для $\lambda = 4$

$A - 4E = \begin{pmatrix} 8-4 & -2 \\ -2 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$x - \frac{1}{2}y = 0$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ y = y \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2}c \\ y = c \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \alpha$ $c \in R \setminus \{0\}$

Нормируем $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \vec{e}_1'$ для $\lambda = 9$

$A - 9E = \begin{pmatrix} 8-9 & -2 \\ -2 & 5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

$x + 2y = 0$

$\begin{cases} x = -2y \\ y = y \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2c \\ y = c \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} c$ $c \in R \setminus \{0\}$

Нормируем $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \vec{e}_2'$

Собственные вектора $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ $T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, т.е. $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$

Ур-ие кривой в переменных x'', y'':

$$4x''^2+9y''^2-36=0$$

к каноническому виду

$$4x''^2+9y''^2-36 \;|:36$$

$$\frac{x''^2}{9}+\frac{y''^2}{4}=1$$

$$\frac{x''^2}{3^2}+\frac{y''^2}{2}=1$$ — Ур-ие эллипса

Преобразуем исх. координаты:

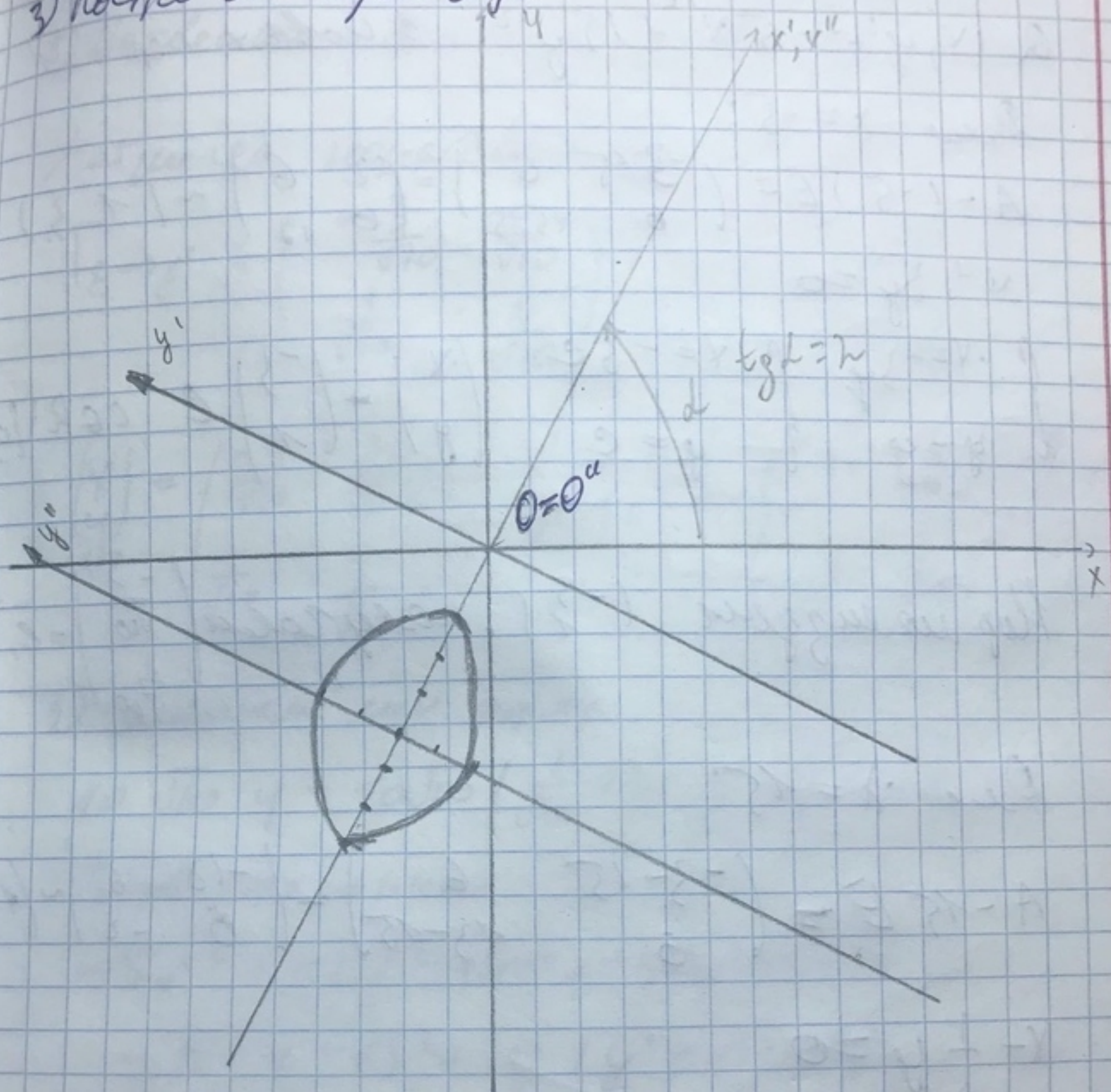
$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt5}x'-\frac{2}{\sqrt5}y'=\frac{1}{\sqrt5}(x''-5)-\frac{2}{\sqrt5}y'' \\ y=\frac{2}{\sqrt5}\cdot x'+\frac{1}{\sqrt5}y'=\frac{2}{\sqrt5}(x-y)+\frac{1}{\sqrt5}y'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt5}x''-\frac{2}{\sqrt5}y'-\sqrt5 \\ y=\frac{2}{\sqrt5}\cdot x''+\frac{1}{\sqrt5}y''-2\sqrt5 \end{cases}$$

$O(-\sqrt5; -2\sqrt5)$

$\bar e_1''=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ $\bar e_2''=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$

3) Построим кривую



б) $12xy - 3x^2 + 13y^2 + 10\sqrt{10}\,y - 5 = 0$

приведем к кан. виду.

$Q(x,y) = -3x^2 + 12xy + 13y^2.$

$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ $\quad |A - \lambda E| = 0$

$\lambda^2 - 10\lambda - 75 = 0$

$\lambda_1 = -5 \quad \lambda_2 = 15.$

$Q(x', y') = -5x'^2 + 15y'^2$ в новых коор x', y'

Для $\lambda = -5$:

$$A - (-5)E = \begin{pmatrix} -3+5 & 6 \\ 6 & 15+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$x + 3y = 0$

$$\begin{cases} x = -3y \\ y = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3c \\ y = c \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} c, \ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Нормализуем $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, получаем $\begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \vec{e}_1$

Для $\lambda = 15$

$$A - 15E = \begin{pmatrix} -3-15 & 6 \\ 6 & 13-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$x - \frac{1}{3}y = 0$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ y = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}c \\ y = c \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \alpha$$

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Нормализуем $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \vec{e}_2$.

Собственные векторы — $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$

Матрица перехода

$$T_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ т. е. } \begin{cases} x = -\frac{3}{10} x' + \frac{1}{\sqrt{10}} y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} x' + \frac{3}{\sqrt{10}} y' \end{cases}$$

2) Запишем лин. форму.

$$10\sqrt{10}\, y = 10\sqrt{10} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} x' + \frac{3}{\sqrt{10}} y' \right) = 10x' + 30y'$$

В нов. переменных:

$$-5x'^2 + 12y'^2 + 10x + 30y' - 5 = 0$$

$$-5(x'-1)^2 + 15(y'+1)^2 - 15 = 0$$

Замена пер.

$$\begin{cases} x'' = y' + 1 \\ y'' = x' - 1 \end{cases} \Rightarrow 15x''^2 - 5y''^2 - 15 = 0$$

к каноническому виду

$$\frac{x''^2}{1} - \frac{y''^2}{3} = 1$$ — каноническое ур-ние гиперболы

Преобразуем систему координат

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{10}} x' + \frac{1}{\sqrt{10}} y' = -\frac{3}{\sqrt{10}} (y''+1) + \frac{1}{\sqrt{10}} (x''-1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} x' + \frac{3}{\sqrt{10}} y' = \frac{1}{\sqrt{10}} (y''+1) + \frac{3}{\sqrt{10}} (x''-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} x'' - \frac{3}{\sqrt{100}} y'' - \frac{4}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{3}{\sqrt{10}} x'' + \frac{1}{\sqrt{10}} y'' - \frac{2}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

3) Строим кривую