Вариант № 2.

1. Найти и изобразить поверхность уровня $u = x^2 + y^2 - z^2$, проходящую через точку (1;-1;1).

Решение:

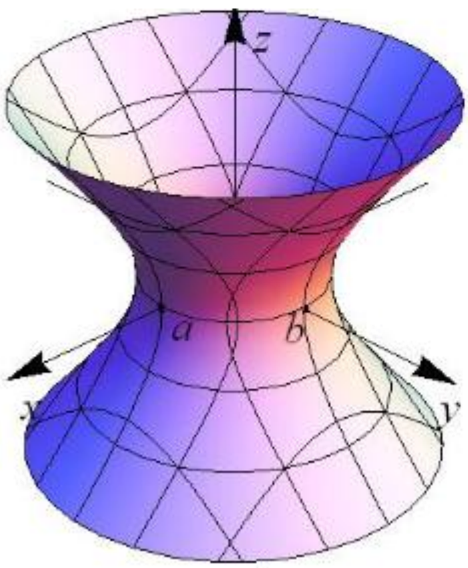
Найдем поверхности уровня

$C = x^2 + y^2 - z^2$ так как поверхность проходит через точку (1;-1;1)

$C = 1^2 + (-1)^2 - 1^2$

$C = 1 + 1 - 1 = 1$

Следовательно, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ - однополостный гиперболоид



2.Для функции $z = xe^{xy}$ в точке М (1;1) найти градиент и производную в направлении вектора $l = i - 2j$

Решение:

1) Найдем частные производные и их значения в точке M

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xe^{xy}\right)'_x = e^{xy} - xye^{xy}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = e^{1\cdot 1} - 1\cdot 1\cdot e^{1\cdot 1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(xe^{xy}\right)'_y = e^{xy}x^2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 1^2 \cdot e^{1\cdot 1} = e$$

тогда градиент функции имеет вид $grad\ z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (0; e)$

2) Находим единичный вектор, разделив каждую координату вектора на его

длину:

$$|a| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$a_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right| = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M \cdot \cos\alpha + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \cdot \cos\beta$$

Следовательно, $\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right| = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M \cdot \cos\alpha + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \cdot \cos\beta = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + e \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{-2e}{\sqrt{5}}$

3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} e^x \cdot \sin y$?

Решение:

Проведем замену $y = kx$, тогда

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} e^x \cdot \sin y = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} e^x \cdot \sin y = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} e^x \cdot \sin kx = 0$$

Результат не зависит от коэффициента k , следовательно, данный предел существует.

4. Доказать, что функция $z = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln(x^2 + y^2) \right)' = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln(x^2 + y^2) \right)' = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right)' = \frac{2 \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)' = \frac{2 \cdot (x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Подставим найденные производные в уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, получаем

$$\frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$$

$$\frac{2y^2-2x^2+2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$$

$$\frac{0}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$$

$0=0$

докано

5. Неявная функция z(x,y) в окрестности точки (-2,1,1) задана уравнением $\sin(x+y+z)=2z+x$ Найти дифференциал функции z в точке (-2;1). С помощью найденного выражения вычислить приближенно функцию z(-2,1;0,9)

Решение:

Зададим функцию $F\left(x,y,z\right)=\sin(x+y+z)-2z-x$

Найдем частные производные

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{\cos(x+y+z)-1}{\cos(x+y+z)-2}$$

$$z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{\cos(x+y+z)}{\cos(x+y+z)-2}$$

Найдем значение производных при $x_0=1,\ \ y_0=2,\ z=-1$

$$z'_x=-\left.\frac{\cos(x+y+z)-1}{\cos(x+y+z)-2}\right|_{(-2;1;1)}=-\frac{\cos(-2+1+1)-1}{\cos(-2+1+1)-2}=\frac{1-1}{1-2}=0$$

$$z'_y=-\left.\frac{\cos(x+y+z)}{\cos(x+y+z)-2}\right|_{(-2;1;1)}=-\frac{\cos(-2+1+1)}{\cos(-2+1+1)-2}=-\frac{1}{1-2}=1$$

Тогда дифференциал имеет вид:

$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y=\cdot 0\Delta x+1\cdot\Delta y=1\cdot\Delta y$

Найдем приближенное значение функции z(-2,1;0,9) для этого обозначим

$x=x_0+\Delta x\ \ \Rightarrow\ \ \ x_0=-2;\ \ \Delta x=-0{,}1$

$y=y_0+\Delta y\ \ \Rightarrow\ \ \ y_0=1;\ \ \Delta y=-0{,}1$

Приближенное значение функции вычислим по формуле: $z\big|_{x=-2.2,y=0,9}\approx z\big|_{x=-2,y=1}+dz$, где $dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y$, тогда

Приближенное значение функции:

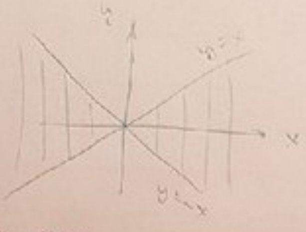
$z\big|_{x=-2.2,y=0,9}\approx 1+0\cdot\left(-0{,}1\right)+1\cdot\left(-0{,}1\right)=1-0{,}1=0{,}9$

Вариант 3

1. $z = \ln\sqrt{x^2 - y^2}$ $\qquad$ $(-1, 0)$

$\sqrt{x^2 - y^2} > 0$

$D(z) = \{(x, y) \in R \; x^2 - y^2 > 0\}$



обл. опр.

$x^2 - y^2 > 0$

$(x-y)(x+y) > 0$

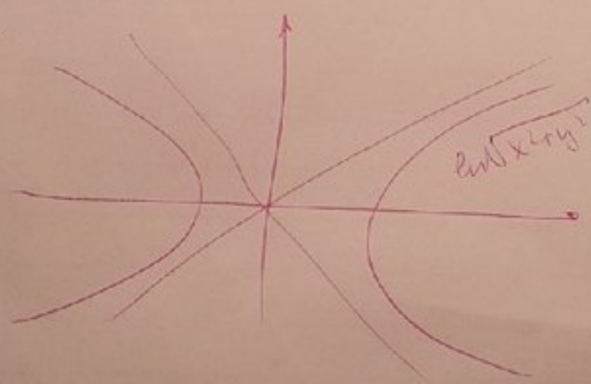
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x = -1 \;, \; y = 0$

$z = \ln\sqrt{1 - 0} =$

$= \ln 1 = 0$

$\ln\sqrt{x^2 - y^2} = 0$ – линия уровня



линии ур.

2. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$, $M(1, -2, 2)$; $N(3, 0, 3)$, $\overline{MN}$

производная

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d_{MN}} = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta + u'_z \cos\gamma \\ \dfrac{du}{d_{MN}} = \text{пр}_{MN}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, z \end{cases}$$

$\overline{MN}\,(2, 2, 1)$

$|MN| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \exp\left(x - \frac{1}{y^2}\right) = \left| y = kx \right| =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \exp\left(x - \frac{1}{k^2x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} e^{\left(x - \frac{1}{0}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} e^{(0-\infty)} = \lim\limits_{x\to 0} e^{-\infty} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^{\infty}} = 0$

Предел существует и единственен.

4. $z'_x - ?$ $z'_y - ?$

$z = f(u(x,y)\, v(x,y))$ $\qquad f = tg(u - v)$

$\qquad u = arctg\, xy$

$z = tg(arctg\, xy - arctg(x/y))$ $\qquad v = arctg(x/y)$

$$z'_x = \frac{1}{\cos^2(arctg\, xy - arctg(x/y))} \cdot \left(\frac{1}{1+(xy)^2} \cdot y - \frac{1}{1+(x/y)^2} \cdot \frac{1}{y} \right)$$

$$z'_y = \frac{1}{\cos^2(arctg\, xy - arctg(x/y))} \cdot \left(\frac{1}{1+(xy)^2} \cdot x - \frac{1}{1+(x/y)^2} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)\right)$$

5. $z(x,y)$ $\qquad (1,1,0)$

$xy - z = e^z$; дифф. z в $(1,1)$, вычисл. прибл. $z(0{,}9; 1{,}2)$

$\overline{\text{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$

$\overline{\text{grad}}\, u = u'_x i + u'_y j + u'_z k =$

$= \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x\, i + \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\, 2y\, j + \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\, 2z\, k$

это уравнение градиента

<u>Градиент в т М</u> $(1, -2, 2)$

$\frac{3}{2}(1^2+(-2)^2+2^2)^{1/2}\, 2 \cdot 1\, i + \frac{3}{2}(1^2+(-2)^2+2^2)^{1/2} \cdot 2(-2)\, j + \frac{3}{2}(1^2+(-2)^2+2^2)^{1/2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot k =$

$= \frac{3}{2}\, 3 \cdot 2i + \frac{3}{2} \cdot 3\, (-4)\, j + \frac{3}{2}\, 3 \cdot 4 \cdot k = 9i - 18j + 18k$

Считаем направляющие косинусы

$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{2}{3}$

$\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{2}{3}$

$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = \frac{1}{3}$

(a_x, a_y, a_z) – координаты вектора

Производная

$\frac{du}{dm} = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta + u'_z \cos\gamma =$

$= \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x \cdot \cos\alpha + \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2y \cdot \cos\beta + \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)\, 2z \cos\gamma$

подставим $M(1, -2, 2)$ и косинусы

$= \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 2(-2)\, \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} =$

$= 6 - 12 + 6 = 0$

Билет 4

1. $u = 1 - z - x^2 - y^2$ $\quad (2, 2, -7)$

$u = 1 - (-7) - 2^2 - 2^2$

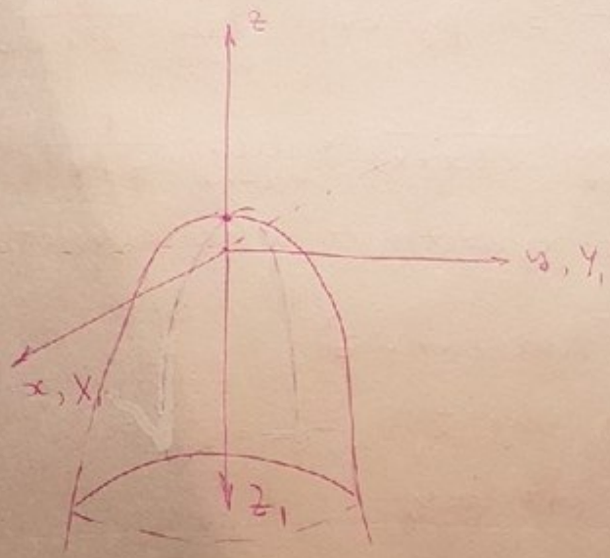
$u = 1 + 7 - 4 - 4$

$u = 0$

$1 - z - x^2 - y^2 = 0$

$x^2 + y^2 = 1 - z$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \\ z_1 = 1 - z = -(z-1) \end{cases} \qquad x_1^2 + y_1^2 = z_1$$



2. $z = e^x \cos y$ $\quad M(1, \frac{\pi}{3})$ $\quad l = -i + \sqrt{3} j$

$z = e^x \cos y$

$l(-1; \sqrt{3})$

$|l| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j$

$\operatorname{grad} z = e^x \cos y \, i + e^x (-\sin y) j$

Градиент в т. $M(1, \frac{\pi}{3})$

$e^1 \cos \frac{\pi}{3} i + e^1 (-\sin \frac{\pi}{3}) j = \frac{ei}{2} - \frac{\sqrt{3} je}{2}$

Направл. косинусы

$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = -\frac{1}{2}$

$\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Производная:

$\frac{dz}{dl} = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta = e^x \cos y \cdot (-\frac{1}{2}) + e^x(-\sin y)\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= -\frac{e^x \cos y}{2} - \frac{e^x \sin y \sqrt{3}}{2}$

• подставим $M(1, \frac{\pi}{3})$

$= -\frac{e}{4} - \frac{e\sqrt{3}\sqrt{3}}{4} = -\frac{e}{4} - \frac{3e}{4} = -e.$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x^2+y} = |y = kx| = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2+kx} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x(x+k)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x+k} = \frac{1}{k}$

предел не существует и не единственен.

4. $u = e^x \ln y + \sin y \ln x + z^2$

$u'_x = e^x \ln y + \sin y \cdot \frac{1}{x}$

$u'_y = e^x \cdot \frac{1}{y} + \ln x \cdot \cos y$

$u'_z = 2z$

5. $z(x,y)$ $(-2,-2,1)$

$\ln(2x-y+3z) = x+y+4z$, $\ln(2x-y+3z)-x-y-4z = u$

$z'_x = -\frac{\frac{1}{2x-y+3z}\cdot 2 - 1}{\frac{1}{2x-y+3z}\cdot 3 - 4} = -\frac{\frac{2}{2x-y+3z} - 1}{\frac{3}{2x-y+3z} - 4} = \frac{-2-2x+y-3z}{3-4(2x-y+3z)}$

$z'_y = -\frac{\frac{1}{2x-y+3z}(-1) - 1}{\frac{1}{2x-y+3z}(3) - 4} = \frac{\frac{1}{2x-y+3z}+1}{\frac{3}{2x-y+3z}-4} = \frac{1+2x-y+3z}{3-4(2x-y+3z)}$

$$dz = \frac{-2-2x+y-3z}{3-4(2x-y+3z)}dx + \frac{1+2x-y+3z}{3-4(2x-y+3z)}dy$$

подставим $(-2,-2)$

$$\ln(2(-2)-(-2)+3z) = -2-2+4z$$

$$\ln(3z-2) = -4+4z$$

Покажем, что $z=1$ в $(-2,-2)$

$$\ln(3-2) = -4+4 \qquad z(-2,-2)=1$$

$$0=0$$

подставим $(-2,-2,1)$

$$dz = \frac{-2-2(-2)+(-2)-3\cdot 1}{3-4(2(-2)-(-2)+3\cdot 1)}dx + \frac{1+2(-2)-(-2)+3\cdot 1}{3-4(2(-2)-(-2)+3\cdot 1)}dy$$

$$dz = 3dx - 4dy.$$

$z(-1{,}9; -1{,}9)$

$$z(x_0,y_0) = z(x,y) + dz$$

$$z(-1{,}9,-1{,}9) = z(-2,-2) + dz$$

$$z(-1{,}9;-1{,}9) = z(-2,-2) + 3dx - 4dy$$

$$dx \approx \Delta x = -1{,}9-(-2) = 0{,}1$$

$$dy \approx \Delta y = -1{,}9-(-2) = 0{,}1$$

$$z(-1{,}9,-1{,}9) = z(-2,-2) + 0{,}3 - 0{,}4$$

$$z(-1{,}9,-1{,}9) = 1-0{,}1 = 0{,}9.$$

Вариант № 5.

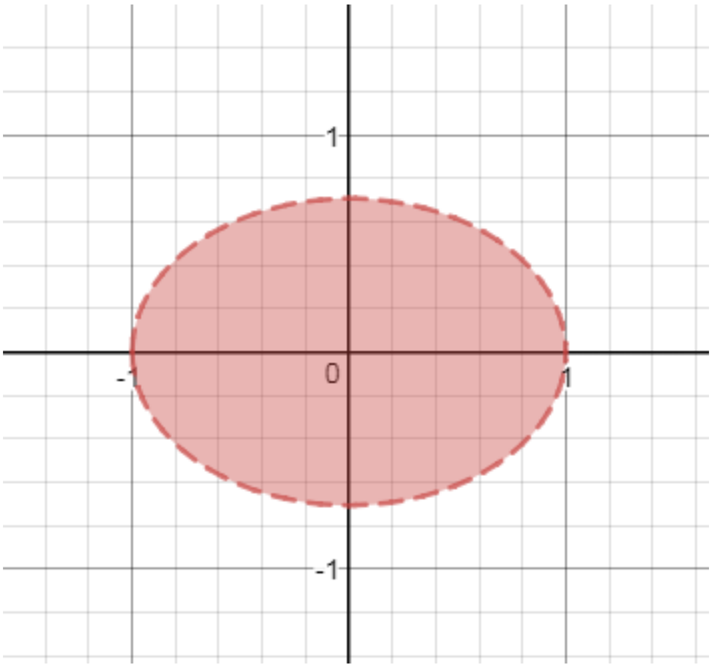
1. Найти и изобразить области определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}}$; найти и изобразить линии уровня этой функции, проходящую через точку $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Решение:

найдем область определения $1 - x^2 - 2y^2 > 0$

$x^2 + 2y^2 < 1$

Часть плоскости внутри эллипса с центром в начале координат и полуосями 1 и $\sqrt{0,5}$

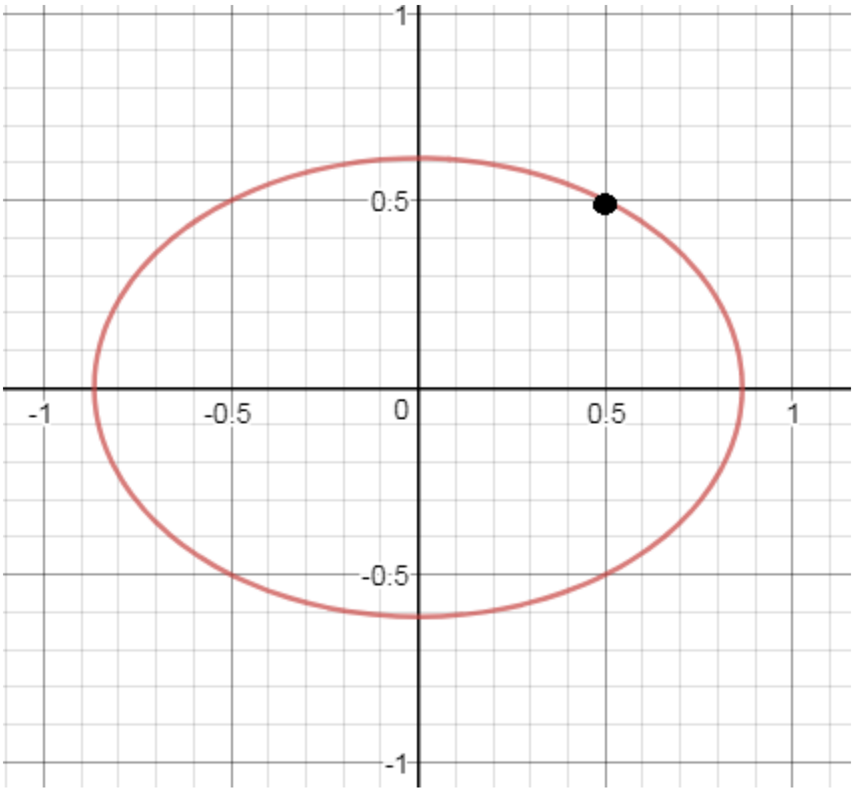


Найдем линии уровня

$C = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}}$ так как линия проходит через точку $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2$$

Следовательно, $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}} = 2$



2.Для функции $u = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xy - 2y + 3$ в точке М (1;-1;2) найти градиент и производную в направлении вектора $l = 3i - 4j - 5k$

Решение:

1) Найдем частные производные и их значения в точке M

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xy - 2y + 3\right)'_x = 3x^2 - 3y$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot (-1) = 3 + 3 = 6$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xy - 2y + 3\right)'_y = 6y^2 - 3x - 2$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 6 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 2 = 6 + 3 - 2 = 7$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xy - 2y + 3\right)'_x = 3z^2$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 3 \cdot 2^2 = 12$$

тогда градиент функции имеет вид $grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (6;\ 7;\ 12)$

2) Находим единичный вектор, разделив каждую координату вектора на его длину:

$$|a|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$$a_0=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cdot\cos\gamma$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cdot\cos\gamma=6\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+7\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+12\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{6-7+24}{\sqrt{6}}=\frac{23}{\sqrt{6}}$$

3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2+2y^2}\right)$?

Решение:

Проведем замену $y=kx$, тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+2y^2}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\left(\frac{x^2+k^2x^2}{x^2+2k^2x^2}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\left(\frac{1+k^2}{1+2k^2}\right)$$

Результат зависит от коэффициента k , следовательно, данного предела не существует.

4. Доказать, что функция $z=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial x}$$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x^2y^2}{x+y}\right)'=\frac{2xy^2(x+y)-x^2y^2}{(x+y)^2}=\frac{2x^2y^2+2xy^3-x^2y^2}{(x+y)^2}=\frac{x^2y^2+2xy^3}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x^2y^2}{x+y}\right)'=\frac{2yx^2(x+y)-x^2y^2}{(x+y)^2}=\frac{2x^2y^2+2yx^3-x^2y^2}{(x+y)^2}=\frac{x^2y^2+2yx^3}{(x+y)^2}$$

Найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}=\left(\frac{x^2y^2+2xy^3}{(x+y)^2}\right)'=\frac{\left(2xy^2+2y^3\right)\cdot(x+y)^2-2(x+y)\left(x^2y^2+2xy^3\right)}{(x+y)^4}=$$

$$=\frac{\left(2xy^2+2y^3\right)\cdot(x+y)-2\left(x^2y^2+2xy^3\right)}{(x+y)^3}=\frac{2y^4}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}=\left(\frac{x^2y^2+2xy^3}{(x+y)^2}\right)'=\frac{\left(2yx^2+6y^2x\right)\cdot(x+y)^2-2(x+y)\left(x^2y^2+2xy^3\right)}{(x+y)^4}=$$

$$=\frac{\left(2yx^2+6y^2x\right)\cdot(x+y)-2\left(x^2y^2+2xy^3\right)}{(x+y)^3}=\frac{2xy^3+6x^2y^2+2yx^3}{(x+y)^3}$$

Подставим найденные производные в уравнения $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=2\frac{\partial z}{\partial x}$, получаем

$$x\cdot\frac{2y^4}{(x+y)^3}+y\left(\frac{2xy^3+6x^2y^2+2yx^3}{(x+y)^3}\right)=2\cdot\frac{x^2y^2+2xy^3}{(x+y)^2}$$

$$\frac{2xy^4+2xy^4+6x^2y^3+2y^2x^3}{(x+y)^3}=\frac{2x^2y^2+4xy^3}{(x+y)^2}$$

$$\frac{4xy^4+6x^2y^3+2y^2x^3}{(x+y)^3}=\frac{2x^2y^2+4xy^3}{(x+y)^2}$$

$$\frac{(x+y)\left(2x^2y^2+4xy^3\right)}{(x+y)^3}=\frac{2x^2y^2+4xy^3}{(x+y)^2}$$

$$\frac{2x^2y^2+4xy^3}{(x+y)^2}=\frac{2x^2y^2+4xy^3}{(x+y)^2}$$

доказано

5. Неявная функция z(x,y) в окрестности точки $\left(\frac{1}{2};-10;2\right)$ задана уравнением $z^3+xz+y=0$ Найти дифференциал функции z в точке $\left(\frac{1}{2};-10\right)$.

С помощью найденного выражения вычислить приближенно функцию z(0,4;-9,8)

Решение:

Зададим функцию $F(x,y,z)=z^3+xz+y$

Найдем частные производные

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{z}{3z^2+x}$$

$$z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{1}{3z^2+x}$$

Найдем значение производных при $x_0=\dfrac{1}{2}\quad y_0=-10,\ z=2$

$$z'_x=-\left.\frac{z}{3z^2+x}\right|_{\left(\frac{1}{2};-10;2\right)}=-\frac{2}{3\cdot 2+0,5}=-\frac{4}{13}$$

$$z'_y=-\left.\frac{1}{3z^2+x}\right|_{\left(\frac{1}{2};-10;2\right)}=-\frac{1}{3\cdot 2+0,5}=-\frac{2}{13}$$

Тогда дифференциал имеет вид:

$$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y=-\frac{4}{13}\Delta x-\frac{2}{13}\Delta y$$

Найдем приближенное значение функции z(0,4;-9,8) для этого обозначим

$$x=x_0+\Delta x\quad\Rightarrow\quad x_0=0.5;\quad \Delta x=-0,1$$

$$y=y_0+\Delta y\quad\Rightarrow\quad y_0=-10;\quad \Delta y=0,2$$

Приближенное значение функции вычислим по формуле: $z\big|_{x=0,4,y=-9.8}\approx z\big|_{x=0.5,y=-10}+dz$, где $dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y$, тогда

Приближенное значение функции:

$$z\big|_{x=0,4,y=-9.8}\approx 2-\frac{4}{13}\cdot(-0,1)-\frac{2}{13}\cdot 0,2=2+\frac{1}{65}-\frac{2}{65}=1,985$$

Вариант № 6.

1. Найти и изобразить поверхность уровня $u = z - x^2 + y^2$, проходящую через точку (4;3;7).

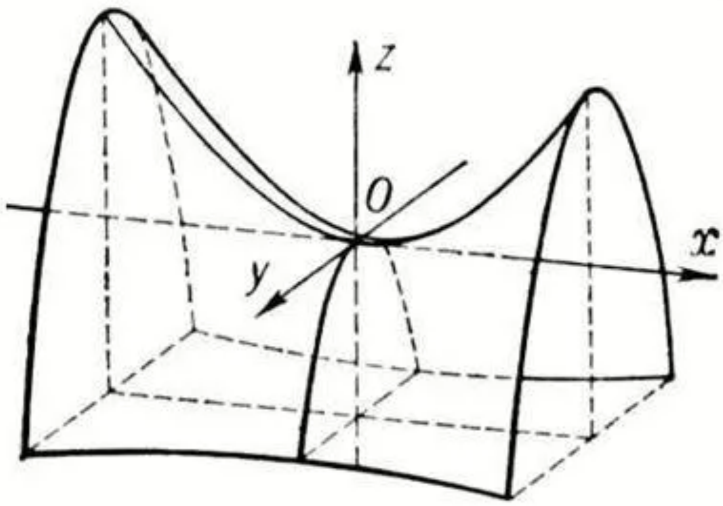
Решение:

Найдем поверхности уровня

$C = z - x^2 + y^2$ так как поверхность проходит через точку (4;3;7)

$C = 7 - 4^2 + 3^2 = 7 - 16 + 9 = 0$

Следовательно, $z - x^2 + y^2 = 0$ или $z = x^2 - y^2$- гиперболический параболоид



2.Для функции $z = x^2 + y^2 - xy$ в точке M (1;3) найти градиент и производную в направлении вектора $l = i - j$

Решение:

1) Найдем частные производные и их значения в точке M

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 + y^2 - xy\right)'_x = 2x - y$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 + y^2 - xy\right)'_y = 2y - x$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

тогда градиент функции имеет вид $grad\ z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (-1; 5)$

2) Находим единичный вектор, разделив каждую координату вектора на его длину:

$$|a| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$a_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right| = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta$$

Следовательно, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right| = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{-1-5}{\sqrt{2}} = \frac{-6}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}$

3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$?

Решение:

Предел существует, так как не зависит от способа приближения

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-0^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-0^2-y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$$

4. Найти производную u_t' функции $u = f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$, если $f = 2x^2 + y^2 + z^2 - yz$, $x = \cos t$, $y = t - \sin t$, $z = t + \sin t$

Решение:

Воспользуемся дифференцированием сложной функции

$$u_t' = f_x' \cdot x_t' + f_y' \cdot y_t' + f_z' \cdot z_t'$$

$u_t' = 4x \cdot (-\sin t) + (2y - z) \cdot (1 - \cos t) + (2z - y) \cdot (1 + \cos t)$ или

$$u_t' = 4\cos t \cdot (-\sin t) + (2t - 2\sin t - t - \sin t) \cdot (1 - \cos t) + (2t + 2\sin t - t + \sin t) \cdot (1 + \cos t) =$$
$$= -2\sin 2t + (t - 3\sin t)(1 - \cos t) + (t + 3\sin t) \cdot (1 + \cos t) = -2\sin 2t + t - t\cos t - 3\sin t +$$
$$+1{,}5\sin 2t + t + t\cos t + 3\sin t + 1{,}5\sin 2t = \sin 2t + 2t$$

5. Неявная функция z(x,y) в окрестности точки (0,1,1) задана уравнением $\ln\frac{z}{y} = \frac{x}{z}$ Найти дифференциал функции z в точке (0;1). С помощью найденного выражения вычислить приближенно функцию

z(-0,1;1,1)

Решение:

Зададим функцию $F\left(x,y,z\right)=\ln\frac{z}{y}-\frac{x}{z}$ или $F\left(x,y,z\right)=\ln z-\ln y-\frac{x}{z}$

Найдем частные производные

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{-\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}}$$

$$z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{-\frac{1}{y}}{\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}}$$

Найдем значение производных при $x_0=0,\quad y_0=1,\ z=1$

$$z'_x=-\left.\frac{-\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}}\right|_{(0;1;1)}=-\frac{-\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{0}{1^2}}=1$$

$$z'_y=-\left.\frac{-\frac{1}{y}}{\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}}\right|_{(0;1;1)}=-\frac{-\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{0}{1^2}}=1$$

Тогда дифференциал имеет вид:

$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y=1\Delta x+1\cdot\Delta y$

Найдем приближенное значение функции z(-0,1;1,1) для этого обозначим

$x=x_0+\Delta x \quad\Rightarrow\quad x_0=0;\ \ \Delta x=-0,1$

$y=y_0+\Delta y \quad\Rightarrow\quad y_0=1;\ \ \Delta y=0,1$

Приближенное значение функции вычислим по формуле: $z\big|_{x=-0.1,y=1.1}\approx z\big|_{x=0,y=1}+dz$, где $dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y$, тогда

Приближенное значение функции:

$z\big|_{x=-0.1,y=1.1}\approx 1+1\cdot\left(-0,1\right)+1\cdot 0,1=1-0,1+0,1=1$

Вариант № 7.

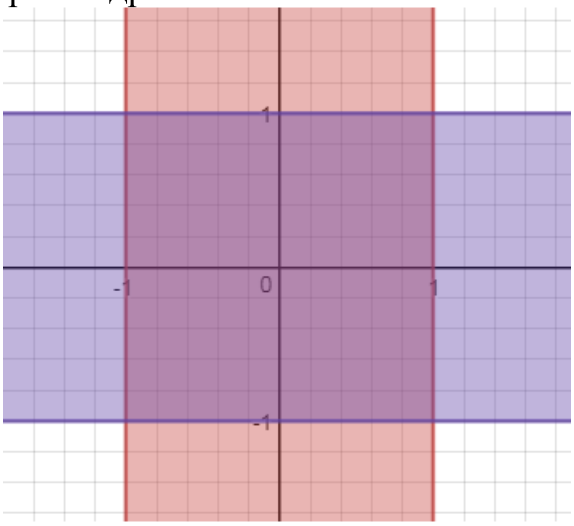
1. Найти и изобразить области определения функции $z = 2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$; найти и изобразить линии уровня этой функции, проходящую через точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Решение:

найдем область определения

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Часть плоскости внутри квадрата

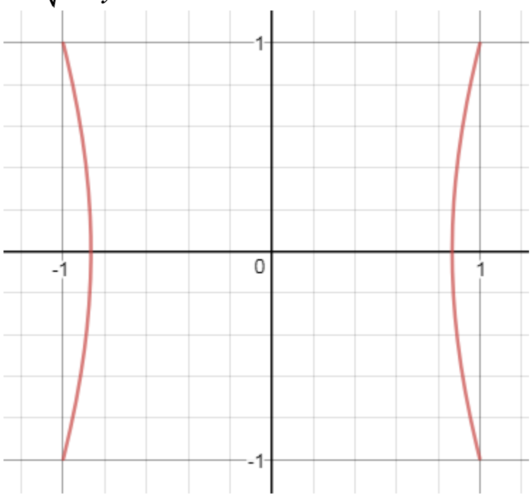


Найдем линии уровня

$C = 2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$ так как линия проходит через точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$$C = 2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \sqrt{1-0^2} = 2\sqrt{1-\frac{3}{4}} - 1 = 2\sqrt{\frac{4-3}{4}} - 1 = 2\sqrt{\frac{1}{4}} - 1 = 1-1 = 0$$

Следовательно, $2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = 0$



2.Для функции $u = xy^2z^3 + x^2 + y^2 + z^2$ в точке М (1;1;1) найти градиент и производную в направлении вектора $l = i + j + k$

Решение:

1) Найдем частные производные и их значения в точке M

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(xy^2z^3 + x^2 + y^2 + z^2\right)'_x = y^2z^3 + 2x$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 1^2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(xy^2z^3 + x^2 + y^2 + z^2\right)'_y = 2xyz^3 + 2y$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(xy^2z^3 + x^2 + y^2 + z^2\right)'_z = 3xy^2z^2 + 2z$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 3 \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 = 5$$

тогда градиент функции имеет вид $grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (3;\ 4; 5)$

2) Находим единичный вектор, разделив каждую координату вектора на его длину:

$$|a| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$a_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right| = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right| = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3+4+5}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \ln\left(\frac{1 - y^2}{1 + x^2}\right)$?

Решение:

Предел существует, так как не зависит от способа приближения

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \ln\left(\frac{1-y^2}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{1-0^2}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+0^2}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \ln\left(\frac{1-y^2}{1+x^2}\right) = \lim_{y\to 0} \ln\left(\frac{1-y^2}{1+0^2}\right) = \lim_{y\to 0} \ln\left(1-y^2\right) = \ln 1 = 0$$

4. Вычислить все частные производные второго порядка от функции $u = x^2 y + arc\sin\frac{y}{z}$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2 y + arc\sin\frac{y}{z}\right)' = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 y + arc\sin\frac{y}{z}\right)' = x^2 + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{z^2}}} \cdot \frac{1}{z} = x^2 + \frac{1}{\sqrt{z^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^2 y + arc\sin\frac{y}{z}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{z^2}}} \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) = \frac{-y}{z\sqrt{z^2 - y^2}}$$

Найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(2xy\right)' = 2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{z^2 - y^2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(z^2 - y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-2y\right) = \frac{y}{\sqrt{\left(z^2 - y^2\right)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{-y}{z\sqrt{z^2 - y^2}}\right)' = -y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(z^4 - y^2 z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(4z^3 - 2y^2 z\right) = \frac{y\left(2z^3 - y^2 z\right)}{z^3\sqrt{\left(z^2 - y^2\right)^3}} =$$

$$= \frac{y\left(2z^2 - y^2\right)}{z^2\sqrt{\left(z^2 - y^2\right)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(2xy\right)' = 2x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \left(2xy\right)' = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{z^2 - y^2}}\right)' = 2x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{z^2 - y^2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(z^2 - y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(2z\right) = \frac{-z}{\sqrt{\left(z^2 - y^2\right)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \left(\frac{-y}{z\sqrt{z^2 - y^2}}\right)' = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \left(\frac{-y}{z\sqrt{z^2 - y^2}}\right)' = \frac{-1}{z\sqrt{z^2 - y^2}} + \left(-\frac{y}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(z^2 - y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-2y\right) =$$

$$= \frac{-1}{z\sqrt{z^2 - y^2}} - \frac{y^2}{z\sqrt{\left(z^2 - y^2\right)^3}}$$

5. Неявная функция z(x,y) в окрестности точки $\left(\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right)$ задана уравнением $x - y + z = e^{x+y-z}$ Найти дифференциал функции z в точке (0,5,1). С помощью найденного выражения вычислить приближенно функцию z(0,7;1,1)

Решение:

Зададим функцию $F\left(x, y, z\right) = x - y + z - e^{x+y-z}$

Найдем частные производные

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1 - e^{x+y-z}}{1 + e^{x+y-z}}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-1 - e^{x+y-z}}{1 + e^{x+y-z}} = 1$$

Найдем значение производных при $x_0 = 1,\ \ y_0 = 2,\ z = -1$

$$z'_x = -\left.\frac{1 - e^{x+y-z}}{1 + e^{x+y-z}}\right|_{\left(\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right)} = -\frac{1 - e^{0,5+1-1,5}}{1 + e^{0,5+1-1,5}} = -\frac{1-1}{1+1} = 0$$

$$z'_y = 1$$

Тогда дифференциал имеет вид:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y$$

Найдем приближенное значение функции z(0,7;1,1) для этого обозначим

$x = x_0 + \Delta x \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0,5; \quad \Delta x = 0,2$

$y = y_0 + \Delta y \quad \Rightarrow \quad y_0 = 1; \quad \Delta y = 0,1$

Приближенное значение функции вычислим по формуле: $z\big|_{x=0,7,\, y=1,1} \approx z\big|_{x=0,5,\, y=1} + dz$, где $dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$, тогда

Приближенное значение функции:

$z\big|_{x=0,7,\, y=1,1} \approx 1,5 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 = 1,5 + 0 + 0,1 = 1,6$

Вариант № 8.

1. Найти и изобразить поверхность уровня $u = \dfrac{x+y+z-1}{x+y+z+1}$, проходящую через точку (0;3;0).

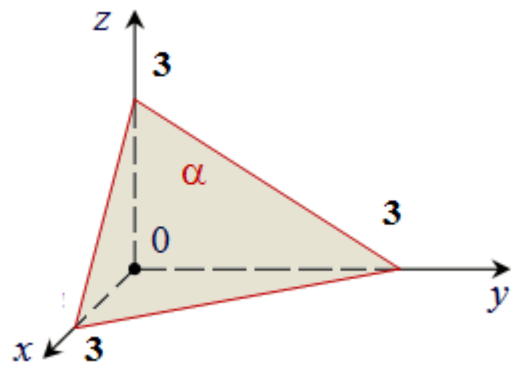
Решение:

Найдем поверхности уровня

$C = \dfrac{x+y+z-1}{x+y+z+1}$ так как поверхность проходит через точку (0;3;0)

$C = \dfrac{0+3+0-1}{0+3+0+1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Следовательно, $\dfrac{x+y+z-1}{x+y+z+1} = \dfrac{1}{2}$ или $x+y+z=3$- плоскость



2.Для функции $z = \sin\left(x^3 - 2y^2\right)$ в точке M (2;-2) найти градиент и производную в направлении вектора $l = 4i + 3j$

Решение:

1) Найдем частные производные и их значения в точке M

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sin\left(x^3 - 2y^2\right)\right)'_x = \cos\left(x^3 - 2y^2\right) \cdot 3x^2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \cos\left(2^3 - 2(-2)^2\right) \cdot 3 \cdot 2^2 = 12\cos 0 = 12$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sin\left(x^3 - 2y^2\right)\right)'_y = \cos\left(x^3 - 2y^2\right) \cdot (-4y)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \cos\left(2^3 - 2(-2)^2\right) \cdot \left(-4 \cdot (-2)\right) = 8\cos 0 = 8$$

тогда градиент функции имеет вид $grad\ z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}; \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = (12; 8)$

2) Находим единичный вектор, разделив каждую координату вектора на его

длину:

$$|a| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$a_0 = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right| = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta$$

Следовательно, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right| = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta = 12 \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{48+24}{5} = \frac{72}{5}$

3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$?

Решение:

Проведем замену $y = kx$, тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=kx}} \left(\frac{x \cdot kx}{x^2+k^2x^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=kx}} \left(\frac{k}{1+k^2}\right)$$

Результат зависит от коэффициента k , следовательно, данного предела не существует.

4. Доказать, что функция $z = \varphi(y+ax) + \psi(y-ax)$ удовлетворяет уравнению $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ для любых дважды дифференцируемых функциях φ, ψ

Решение:

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\varphi(y+ax) + \psi(y-ax)\right)' = \varphi'(y+ax) \cdot a + \psi'(y-ax) \cdot (-a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\varphi(y+ax) + \psi(y-ax)\right)' = \varphi'(y+ax) + \psi'(y-ax)$$

Найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = \left(\varphi'(y+ax) \cdot a + \psi'(y-ax) \cdot (-a)\right)' = \varphi''(y+ax) \cdot a^2 + \psi''(y-ax) \cdot (-a)^2$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \left(\varphi'(y+ax) + \psi'(y-ax)\right)' = \varphi''(y+ax) + \psi''(y-ax)$$

Подставим найденные производные в уравнения $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, получаем

$$a^2\left(\varphi''(y+ax)+\psi''(y-ax)\right)-\left(\varphi''(y+ax)\cdot a^2+\psi''(y-ax)\cdot(-a)^2\right)=0$$

$$a^2\varphi''(y+ax)+a^2\psi''(y-ax)-\varphi''(y+ax)\cdot a^2-\psi''(y-ax)\cdot a^2=0$$

$$0=0$$

доказано

5. Неявная функция z(x,y) в окрестности точки (1,2,1) задана уравнением $arctg(z-x)=yz-2$ Найти дифференциал функции z в точке (1;2). С помощью найденного выражения вычислить приближенно функцию z(1,2;1,9)

Решение:

Зададим функцию $F(x,y,z)=arctg(z-x)-yz-2$

Найдем частные производные

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{\frac{-1}{1+(z-x)^2}}{\frac{1}{1+(z-x)^2}-y}=\frac{1}{1-y-y(z-x)^2}$$

$$z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{-z}{\frac{1}{1+(z-x)^2}-y}=\frac{z}{\frac{1}{1+(z-x)^2}-y}$$

Найдем значение производных при $x_0=1,\ \ y_0=2,\ z=1$

$$z'_x=\left.\frac{1}{1-y-y(z-x)^2}\right|_{(1;2;1)}=\frac{1}{1-2-2(1-1)^2}=-1$$

$$z'_y=\left.\frac{z}{\frac{1}{1+(z-x)^2}-y}\right|_{(1;2;1)}=\frac{1}{\frac{1}{1+(1-1)^2}-2}=-1$$

Тогда дифференциал имеет вид:

$$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y=-1\Delta x-1\cdot\Delta y$$

Найдем приближенное значение функции z(1,2;1,9) для этого обозначим

$$x=x_0+\Delta x\ \Rightarrow\ x_0=1;\ \ \Delta x=0,2$$

$$y=y_0+\Delta y\ \Rightarrow\ y_0=2;\ \ \Delta y=-0,1$$

Приближенное значение функции вычислим по формуле: $z\big|_{x=1,2,y=1,9}\approx z\big|_{x=1,y=2}+dz$, где $dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y$, тогда

Приближенное значение функции:

$$z\big|_{x=1.2,y=1.9}\approx 1-1\cdot 0,2-1\cdot(-0,1)=1-0,2+0,1=0,9$$

Вариант № 9.

1. Найти и изобразить область определения функции $z = \arcsin(2x - y)$, найти и изобразить линию уровня, проходящую через точку (1;3/2).

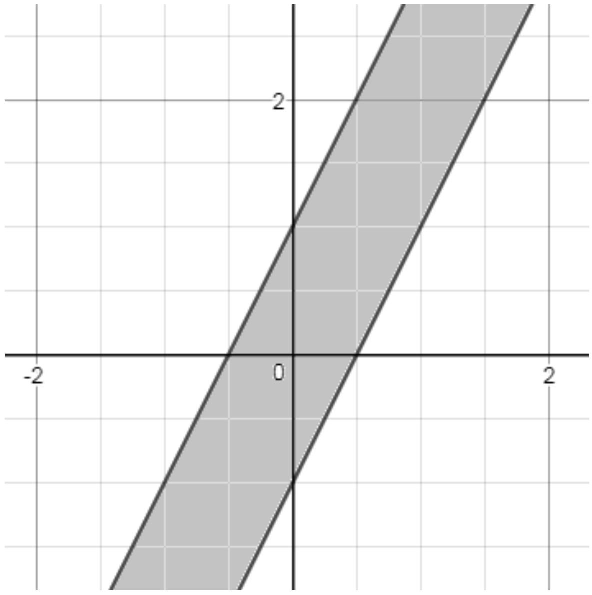
Решение:

Найдем область определения

$-1 \le 2x - y \le 1$

$$\begin{cases} 2x - y \le 1 \\ 2x - y \ge -1 \end{cases}$$

Построим область определения, часть плоскости между параллельными прямыми

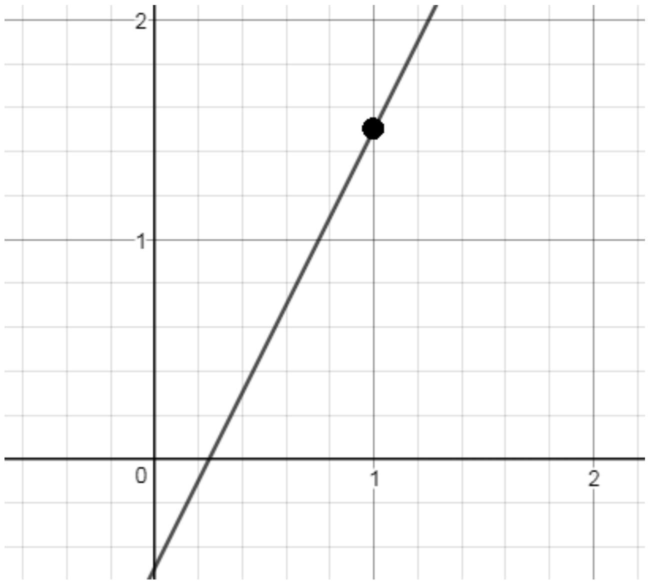


Найдем линию уровня

$C = \arcsin(2x - y)$ так как линия проходит через точку (1;3/2)

$$C = \arcsin\left(2 \cdot 1 - \frac{3}{2}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Следовательно, $\arcsin(2x - y) = \frac{\pi}{6}$



2.Для функции $u = e^{xyz}$ в точке М (2;3;1) найти градиент и производную в направлении вектора *MN,* если $N(1;1;-5)$

Решение:

1) Найдем частные производные и их значения в точке *M*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{xyz}\right)'_x = e^{xyz} yz$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = e^{2\cdot 3\cdot 1} \cdot 3 \cdot 1 = 3e^6$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{xyz}\right)'_y = e^{xyz} xz$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = e^{2\cdot 3\cdot 1} \cdot 2 \cdot 1 = 2e^6$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(e^{xyz}\right)'_z = e^{xyz} xy$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = e^{2\cdot 3\cdot 1} \cdot 2 \cdot 3 = 6e^6$$

тогда градиент функции имеет вид $grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(3e^6; 2e^6; 6e^6\right)$

2) Находим координаты вектора *NM*, затем единичный вектор, разделив каждую координату вектора на его длину:

$$MN = (-1-2; 1-3; -5-1) = (-3; -2; -6)$$

$$|MN| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$MN_0 = \left(-\frac{3}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}\right)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right| = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right| = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma = 3e^6 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) + 2e^6 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) + 6e^6 \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{-49e^6}{7} = -7e^6$$

3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x \cdot \ln y$?

Решение:

Проведем замену $y = kx$, тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x \cdot \ln y\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \left(x \cdot \ln kx\right) = 0$$

Результат не зависит от коэффициента k , следовательно, данного предел существует.

4. Найти частные производные z'_x, z'_y функции $z = f\left(u\left(x,y\right), v\left(x,y\right)\right)$, если $f = u\ln v - v\ln u,\ u = x\cos y,\ v = x\sin y$

Решение:

Воспользуемся дифференцированием сложной функции

$$z_x{}' = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x$$

$$z_x{}' = \left(\ln v - \frac{v}{u}\right) \cdot \cos y + \left(\frac{u}{v} - \ln u\right) \sin y$$

Аналогично находим z'_y

$$z_y{}' = \left(\ln v - \frac{v}{u}\right) \cdot \left(-\mathrm{x}\sin y\right) + \left(\frac{u}{v} - \ln u\right) \cdot \mathrm{x}\cos y$$

5. Неявная функция z(x,y) в окрестности точки (1,1,1) задана уравнением $3x - y - z = \cos\left(z - y\right)$ Найти дифференциал функции z в точке (1;1). С помощью найденного выражения вычислить приближенно функцию z(0,8;0,8)

Решение:

Зададим функцию $F\left(x,y,z\right) = 3x - y - z - \cos\left(z - y\right)$

Найдем частные производные

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3}{-1+\sin(z-y)} = \frac{3}{1-\sin(z-y)}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-1-\sin(z-y)}{-1+\sin(z-y)} = \frac{-1-\sin(z-y)}{1-\sin(z-y)}$$

Найдем значение производных при $x_0 = 1,\ \ y_0 = 1,\ z = 1$

$$z'_x = \left.\frac{3}{1-\sin(z-y)}\right|_{(1;1;1)} = \frac{3}{1-\sin(1-1)} = 3$$

$$z'_y = \left.\frac{-1-\sin(z-y)}{1-\sin(z-y)}\right|_{(1;1;1)} = \frac{-1-\sin(1-1)}{1-\sin(1-1)} = -1$$

Тогда дифференциал имеет вид:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = 3\Delta x - 1\cdot\Delta y$$

Найдем приближенное значение функции z(0,8;0,8) для этого обозначим

$$x = x_0 + \Delta x \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1;\ \ \Delta x = -0,2$$

$$y = y_0 + \Delta y \quad \Rightarrow \quad y_0 = 1;\ \ \Delta y = -0,2$$

Приближенное значение функции вычислим по формуле: $z\big|_{x=0.8,\,y=0,8} \approx z\big|_{x=1,\,y=1} + dz$, где $dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$, тогда

Приближенное значение функции:

$$z\big|_{x=0.8,\,y=0,8} \approx 1 + 3\cdot(-0,2) - 1\cdot(-0,2) = 1 - 0,6 + 0,2 = 1 - 0,4 = 0,6$$

Вариант 12

1. Найти и изобразить поверхность уровня функции $u=\ln\left(7-2x^2-3y^2-z^2\right)$, проходящую через точку (1;1;1)

Решение:

$u\left(x,y,z\right)=C$

$\ln\left(7-2x^2-3y^2-z^2\right)=C$

Найдем значение C зная, что поверхность проходит через точку (1;1;1):

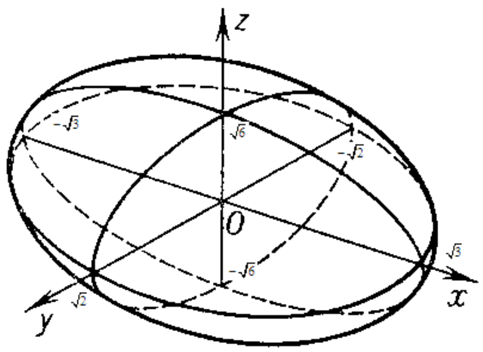
$\ln\left(7-2\cdot 1^2-3\cdot 1^2-1^2\right)=C$

$\ln\left(7-2-3-1\right)=C$

$\ln 1=C \quad \Rightarrow \quad C=0$

Тогда $\ln\left(7-2x^2-3y^2-z^2\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 7-2x^2-3y^2-z^2=1 \quad \Rightarrow \quad 2x^2+3y^2+z^2=6$

Получили уравнение эллипсоида $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{6}=1$



2. Для функции $z=\arcsin\left(xy\right)+\arccos\left(\frac{x}{y}\right)$ в точке M (1/2, 1) найти градиент и производную в направлении вектора l = -5i +2 j

Решение:

1) Найдем частные производные и их значения в точке M_0

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\arcsin\left(xy\right)+\arccos\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_x=\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}-\frac{1}{y\sqrt{1-x^2/y^2}}=\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}-\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{1-0.5^2\cdot 1^2}}-\frac{1}{\sqrt{1^2-0.5^2}}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\arcsin(xy)+\arccos\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\frac{x}{y^2\sqrt{1-x^2/y^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=\frac{0.5}{\sqrt{1-0.5^2\cdot 1^2}}+\frac{0.5}{1\cdot\sqrt{1^2-0.5^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

тогда градиент функции имеет вид $grad\ z=\left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

2) Находим единичный вектор, разделив каждую координату вектора на его длину:

$$l_0=\left(\frac{-5}{\sqrt{29}};\frac{2}{\sqrt{29}}\right)\qquad |l|=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial z}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\cos\gamma$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M}\cdot\cos\beta=0\cdot\left(\frac{-5}{\sqrt{29}}\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{29}}$$

3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\frac{x}{y}}$?

Решение:

Проведем замену $y=kx$, тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\frac{x}{y}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} e^{\frac{x}{y}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} e^{\frac{x}{kx}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} e^{\frac{1}{k}}=e^{\frac{1}{k}}$$

Результат зависит от коэффициента k , следовательно, данного предела не существует.

4. Найти производную u'_t функции $u=f\left(x(t),y(t),z(t)\right)$, если $f=x^2y^3z^5$, $x=t\ln t$, $y=\ln t$, $z=\frac{1}{\ln t}$

Решение:

Воспользуемся дифференцированием сложной функции

$$u'_t=f'_x\cdot x'_t+f'_y\cdot y'_t+f'_z\cdot z'_t$$

$$u'_t=2xy^3z^5\cdot(\ln t+1)+3y^2x^2z^5\cdot\frac{1}{t}+5z^4x^2y^3\cdot\left(\frac{-1}{t\ln^2 t}\right)$$ или

$$u'_t = 2t\ln t\cdot\ln^3 t\left(\frac{1}{\ln t}\right)^5\cdot(\ln t+1)+3\ln^2 t\cdot t^2\ln^2 t\left(\frac{1}{\ln t}\right)^5\cdot\frac{1}{t}+5\left(\frac{1}{\ln t}\right)^4\cdot t^2\ln^2 t\cdot\ln^3 t\cdot\left(\frac{-1}{t\ln^2 t}\right)=$$

$$=\frac{2t(\ln t+1)}{\ln t}+\frac{3t}{\ln t}-\frac{5t}{\ln t}=\frac{2t\ln t}{\ln t}=2t$$

5. Неявная функция z(x,y) в окрестности точки (1,1,1) задана уравнением $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$ Найти дифференциал функции z в точке (1,1) . с помощью найденного выражения вычислить приближенно функцию z(1.1:1.1)

Решение:

Зададим функцию $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-x^3-y^3-z^3$

Найдем частные производные

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2x-3x^2}{2z-3z^2}$$

$$z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{2y-3y^2}{2z-3z^2}$$

Найдем значение производных при $x_0=1,\ \ y_0=1,\ z=1$

$$z'_x=-\left.\frac{2x-3x^2}{2z-3z^2}\right|_{(1.1.1)}=-\frac{2-3}{2-3}=-1$$

$$z'_y=-\left.\frac{2x-3x^2}{2z-3z^2}\right|_{(1.1.1)}=-\frac{2-3}{2-3}=-1$$

Тогда дифференциал имеет вид:

$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y=-\Delta x-\Delta y$

Найдем приближенное значение функции z(1.1:1.1) для этого обозначим

$x=x_0+\Delta x\ \ \Rightarrow\ \ x_0=1;\ \ \Delta x=0,1$

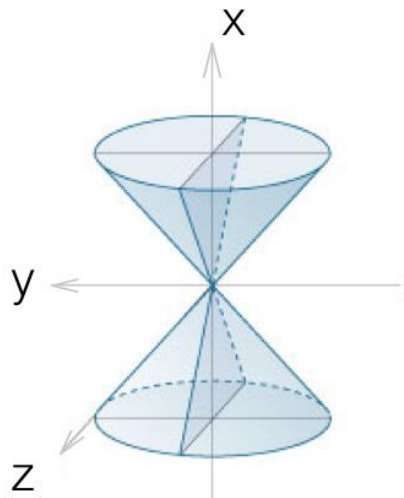
$y=y_0+\Delta y\ \ \Rightarrow\ \ y_0=1;\ \ \Delta y=0,1$

Приближенное значение функции вычислим по формуле: $z\big|_{x=1,1,\,y=1,1}\approx z\big|_{x=,\,y=1}+dz$, где $dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y$, тогда

Приближенное значение функции:

$z\big|_{x=1,1,\,y=1,1}\approx 1-1\cdot 0,1-1\cdot 0,1=1-0,2=0,8$

1. $u = \frac{x^2+y^2-2}{x^2-z^2-1}$ $\quad u = C$



$$\frac{x^2+y^2-2}{x^2-z^2-1} = C$$

Найдем C зная, что поверхность проходит через точку $(2;2;0)$

$$\frac{2^2+2^2-2}{2^2-0^2-1} = C \Rightarrow C = 2$$

$$\frac{x^2+y^2-2}{x^2-z^2-1} = 2 \Rightarrow x^2 - y^2 - 2z^2 = 0$$

коническая поверхность

2. Найдем частные производные и их значения в точке M_0

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(tg(3x^2-2y)\right)'_x = \frac{6x}{\cos^2(3x^2-2y)} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -\frac{6}{\cos^2(3-3)} = -6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(tg(3x^2-2y)\right)'_y = -\frac{2}{\cos^2(3x^2-2y)} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -\frac{2}{1} = -2$$

$\underline{grad\ z = (-6;-2)}$ $\quad |\vec{l}| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$ $\quad \vec{l}_0 = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}; \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta = (-6)\cdot\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right) + (-2)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$= \frac{18}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{40} = \underline{2\sqrt{10}}$$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x+y)e^x \cdot arctg\, y = \lim\limits_{y\to 0} y \cdot e^0 \cdot arctg\, y = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x+y)e^x \cdot arctg\, y = \lim\limits_{x\to 0} x e^x \cdot 0 = 0$

Предел существует, т.к. не зависит от способа приближения

4. $u=e^{x^2+y^2}\sin^2 z$

Найдем частные производные $1^{го}$ порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(e^{x^2+y^2}\sin^2 z\right)'_x=2xe^{x^2+y^2}\sin^2 z$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{x^2+y^2}\sin^2 z\right)'_y=2ye^{x^2+y^2}\sin^2 z$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(e^{x^2+y^2}\sin^2 z\right)'_z=e^{x^2+y^2}2\sin z\cos z=e^{x^2+y^2}\sin 2z$$

Найдем частные производные $2^{го}$ порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(2xe^{x^2+y^2}\sin^2 z\right)'_x=2\sin^2 z\left(e^{x^2+y^2}+2x^2e^{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(2ye^{x^2+y^2}\sin^2 z\right)'_y=2\sin^2 z\,e^{x^2+y^2}(1+2y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(e^{x^2+y^2}\sin 2z\right)'_z=2e^{x^2+y^2}\cos 2z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(2xe^{x^2+y^2}\sin^2 z\right)'_y=2\cdot 2xye^{x^2+y^2}\sin^2 z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\left(2xe^{x^2+y^2}\sin^2 z\right)'_z=4xe^{x^2+y^2}\sin z\cdot\cos z=2xe^{x^2+y^2}\sin 2z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\left(2ye^{x^2+y^2}\sin^2 z\right)'_x=4xye^{x^2+y^2}\sin^2 z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\left(2ye^{x^2+y^2}\sin^2 z\right)'_z=2ye^{x^2+y^2}\sin 2z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\left(e^{x^2+y^2}\sin 2z\right)'_x=2xe^{x^2+y^2}\sin 2z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=\left(e^{x^2+y^2}\sin 2z\right)'_y=2ye^{x^2+y^2}\sin 2z$$

5. $z^4 - xz - y = 0$ $\quad F(x,y,z) = z^4 - xz - y$

$$z'_x = \frac{F'_x}{F'_z} = \frac{-z}{4z^3 - x} \qquad z'_y = \frac{F'_y}{F'_z} = \frac{-1}{4z^3 - x}$$

Найдем значение производных при $x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ z = -1$

$$z'_x\Big|_{(1,2,-1)} = \frac{1}{-4-1} = -\frac{1}{5} \qquad z'_y\Big|_{(1,2,-1)} = \frac{-1}{-4-1} = \frac{1}{5}$$

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = -\frac{1}{5}\Delta x + \frac{1}{5}\Delta y$$

Найдем приближенное значение ф-и $z(1{,}2;\ 1{,}9)$ для этого обозн-м

$x = x_0 + \Delta x \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1\ ;\ \Delta x = 0{,}2$

$y = y_0 + \Delta y \quad \Rightarrow \quad y_0 = 2\ ;\ \Delta y = -0{,}1$

$$z\Big|_{x=1{,}2;\, y=1{,}9} \approx z\Big|_{x=1;\, y=2} + dz = -1 - \frac{1}{5}(0{,}2) + \frac{1}{5}(-0{,}1) = -1{,}06$$

Вариант № 1.

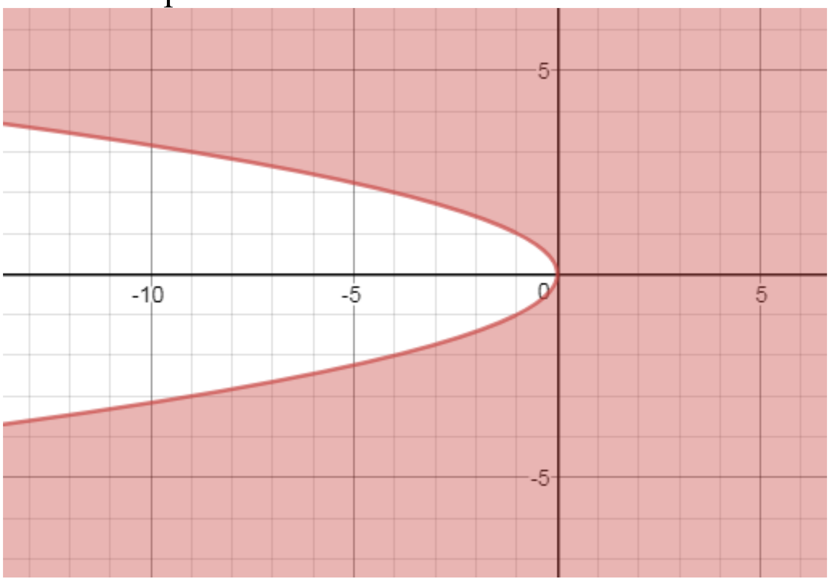
1. Найти и изобразить области определения функции $z=\ln\left(x+y^2\right)$; найти и изобразить линии уровня этой функции, проходящую через точку (-3;2).

Решение:

найдем область определения каждого из слагаемых

$x+y^2\geq 0$

Часть плоскости вне параболы



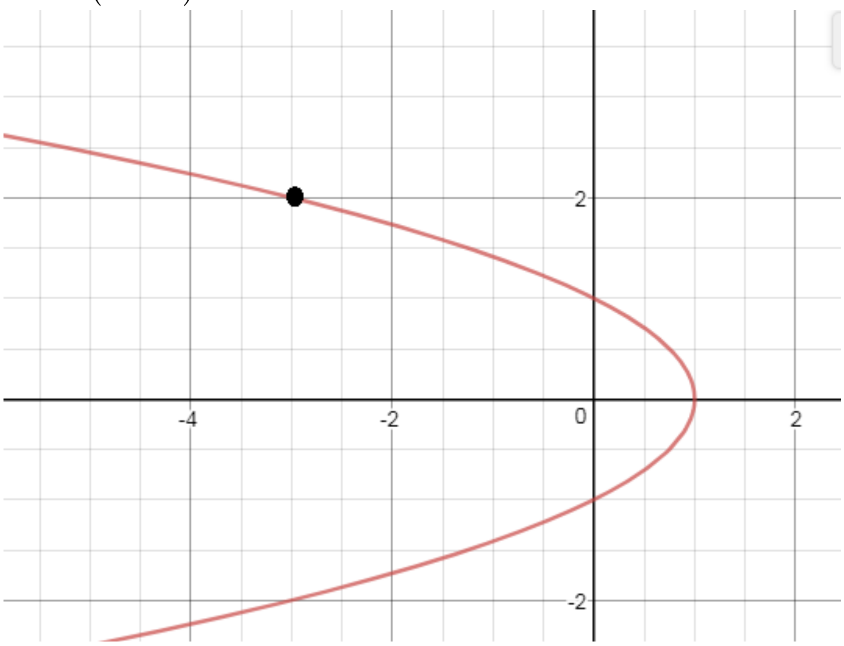
Найдем линии уровня

$C=\ln\left(x+y^2\right)$ так как линия проходит через точку (-3;2)

$C=\ln\left(-3+2^2\right)$

$C=\ln 1=0$

Следовательно, $\ln\left(x+y^2\right)=0$ или $x+y^2=1$



2.Для функции $u = y^3 + \sqrt{z^2 - x^2}$ в точке М (3;0;-5) найти градиент и производную в направлении вектора $l = 2i - j + 2k$

Решение:

1) Найдем частные производные и их значения в точке M

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(y^3 + \sqrt{z^2 - x^2} \right)'_x = \frac{-2}{2\sqrt{z^2 - x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = -\frac{1}{\sqrt{(-5)^2 - 3^2}} = -\frac{1}{\sqrt{25-9}} = -\frac{1}{\sqrt{16}} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(y^3 + \sqrt{z^2 - x^2} \right)'_y = 3y^2$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(y^3 + \sqrt{z^2 - x^2} \right)'_x = \frac{2}{2\sqrt{z^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \frac{1}{\sqrt{(-5)^2 - 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{25-9}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

тогда градиент функции имеет вид $grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left(-\frac{1}{4};\ 0; \frac{1}{4} \right)$

2) Находим единичный вектор, разделив каждую координату вектора на его длину:

$$|a| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$a_0 = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right| = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma$$

Следовательно, $\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right| = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0$

3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \cos\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^4} \right)$?

Решение:

Проведем замену $y = kx$, тогда

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \cos\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^4} \right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} \cos\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^4} \right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} \cos\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4 k^4} \right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} \cos\frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2 k^2} \right)$$

Результат зависит от коэффициента k , следовательно, данного предела не существует.

4. Вычислить все частные производные второго порядка от функции $u = e^{xy} \sin z$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{xy} \sin z\right)' = e^{xy} y \cdot \sin z$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{xy} \sin z\right)' = e^{xy} x \cdot \sin z$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(e^{xy} \sin z\right)' = e^{xy} \cdot \cos z$$

Найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(e^{xy} y \cdot \sin z\right)' = e^{xy} y^2 \cdot \sin z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(e^{xy} x \cdot \sin z\right)' = e^{xy} x^2 \cdot \sin z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(e^{xy} \cdot \cos z\right)' = -e^{xy} \sin z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(e^{xy} y \cdot \sin z\right)' = \text{sinz}\left(e^{xy} yx + e^{xy}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \left(e^{xy} y \cdot \sin z\right)' = e^{xy} y \cdot \cos z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \left(e^{xy} x \cdot \sin z\right)' = \sin z\left(e^{xy} xy + e^{xy}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \left(e^{xy} x \cdot \sin z\right)' = e^{xy} x \cdot \cos z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \left(e^{xy} \cdot \cos z\right)' = e^{xy} y \cdot \cos z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \left(e^{xy} \cdot \cos z\right)' = e^{xy} x \cdot \cos z$$

5. Неявная функция z(x,y) в окрестности точки (1,2,-1) задана уравнением $z^3 + xz + y = 0$ Найти дифференциал функции z в точке (1,2). С помощью найденного выражения вычислить приближенно функцию z(0,9;2,2)

Решение:

Зададим функцию $F\left(x,y,z\right)=z^3+xz+y$

Найдем частные производные

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{z}{3z^2+x}$$

$$z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{1}{3z^2+x}$$

Найдем значение производных при $x_0=1,\ \ y_0=2,\ z=-1$

$$z'_x=-\left.\frac{z}{3z^2+x}\right|_{(1.2.-1)}=-\frac{-1}{3\cdot\left(-1\right)+1}=-\frac{1}{2}$$

$$z'_y=-\left.\frac{1}{3z^2+x}\right|_{(1.2.-1)}=-\frac{1}{3\cdot\left(-1\right)+1}=\frac{1}{2}$$

Тогда дифференциал имеет вид:

$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y=-0,5\Delta x+0,5\Delta y$

Найдем приближенное значение функции z(0,9;2,2) для этого обозначим

$x=x_0+\Delta x\ \ \Rightarrow\ \ \ x_0=1;\ \ \Delta x=-0,1$

$y=y_0+\Delta y\ \ \Rightarrow\ \ \ y_0=2;\ \ \Delta y=0,2$

Приближенное значение функции вычислим по формуле: $z\big|_{x=0,9,y=2,2}\approx z\big|_{x=1,y=2}+dz$, где $dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y$, тогда

Приближенное значение функции:

$z\big|_{x=0,9,y=2,2}\approx-1-0,5\cdot\left(-0,1\right)+0,5\cdot0,2=-1+0,05+0,1=-0,85$

Вариант № 11.

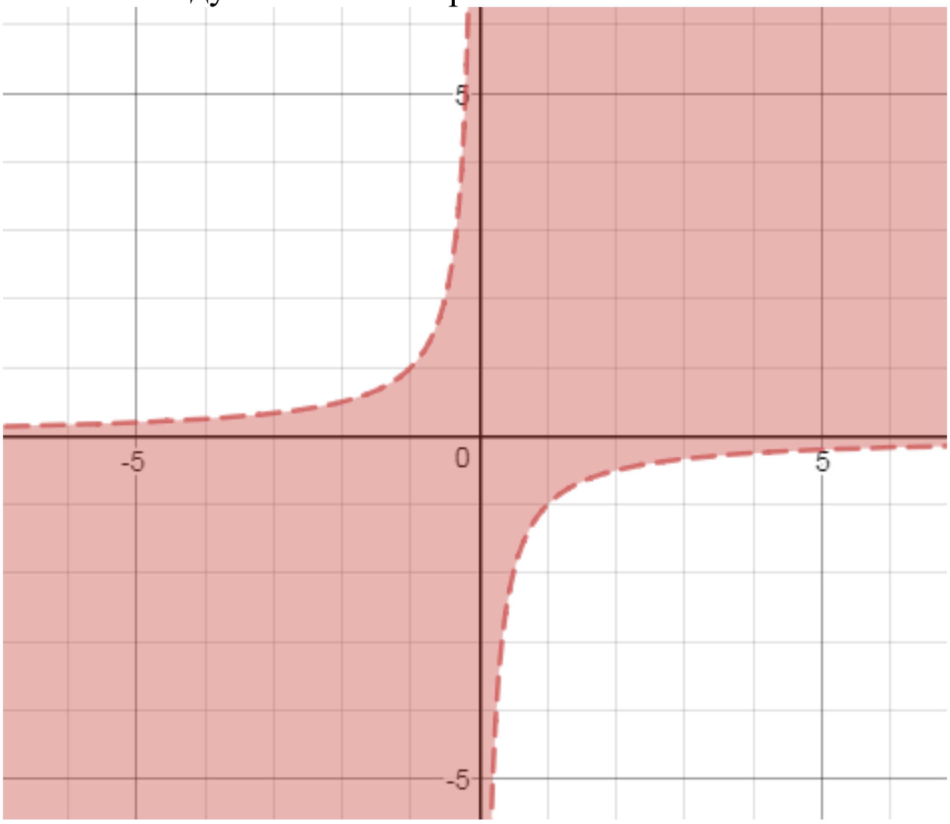
1. Найти и изобразить области определения функции $z=\ln(xy+1)$; найти и изобразить линии уровня этой функции, проходящую через точку $(1;e-1)$.

Решение:

найдем область определения

$xy+1>0$ или $y>\dfrac{-1}{x}$

Часть плоскости между веточками параболы

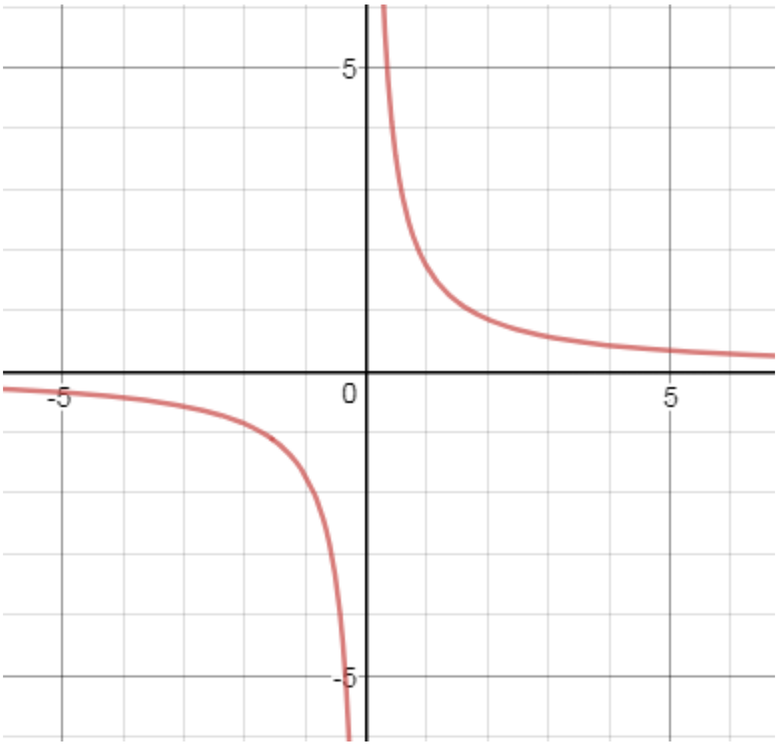


Найдем линию уровня

$C=\ln(xy+1)$ так как линия проходит через точку $(1;e-1)$

$C=\ln(1\cdot(e-1)+1)=\ln(e-1+1)=\ln e=1$

Следовательно, $\ln(xy+1)=1$



2.Для функции $u = x^3 - x^2 y + y^2 z - z^3$ в точке M (1;-1;1) найти градиент и производную в направлении вектора $l = -i - j - k$

Решение:

1) Найдем частные производные и их значения в точке M

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^3 - x^2 y + y^2 z - z^3\right)'_x = 3x^2 - 2xy$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 3 + 2 = 5$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^3 - x^2 y + y^2 z - z^3\right)'_y = -x^2 + 2yz$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -1^3 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -1 - 2 = -3$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^3 - x^2 y + y^2 z - z^3\right)'_z = y^2 - 3z^2$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = (-1)^2 - 3 \cdot 1^2 = 1 - 3 = -2$$

тогда градиент функции имеет вид $grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (5;\ -3; -2)$

2) Находим единичный вектор, разделив каждую координату вектора на его длину:

$$|a| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$a_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right| = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right| = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma = 5 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-5+3+2}{\sqrt{3}} = 0$$

3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)$?

Решение:

Предел существует, так как не зависит от способа приближения

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^3}{x^2+0^2}\right) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \left(\frac{0^3}{0^2+y^2}\right) = 0$$

4. Доказать, что функция $z = e^{-9x}\cos 3y + e^{-4x}\sin 2y$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{-9x}\cos 3y + e^{-4x}\sin 2y\right)' = -9e^{-9x}\cos 3y - 4e^{-4x}\sin 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{-9x}\cos 3y + e^{-4x}\sin 2y\right)' = -3e^{-9x}\sin 3y + 2e^{-4x}\cos 2y$$

Найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-3e^{-9x}\sin 3y + 2e^{-4x}\cos 2y\right)' = -9e^{-9x}\cos 3y - 4e^{-4x}\sin 2y$$

Подставим найденные производные в уравнения $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, получаем

$$-9e^{-9x}\cos 3y - 4e^{-4x}\sin 2y - \left(-9e^{-9x}\cos 3y - 4e^{-4x}\sin 2y\right) = 0$$

$$-9e^{-9x}\cos 3y - 4e^{-4x}\sin 2y + 9e^{-9x}\cos 3y + 4e^{-4x}\sin 2y = 0$$

$$0 = 0$$

доказано

5. Неявная функция z(x,y) в окрестности точки $(-1;-1;-1)$ задана уравнением $e^x + e^y + e^z = -\frac{3}{e}z$ Найти дифференциал функции z в точке (-1,-1). С помощью найденного выражения вычислить приближенно функцию z(-0,9; -0,8)

Решение:

Зададим функцию $F(x,y,z) = e^x + e^y + e^z + \frac{3}{e}z$

Найдем частные производные

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{e^x}{e^z + \frac{3}{e}}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{e^y}{e^z + \frac{3}{e}}$$

Найдем значение производных при $x_0 = -1,\ \ y_0 = -1,\ z = -1$

$$z'_x = -\left.\frac{e^x}{e^z + \frac{3}{e}}\right|_{(-1;-1;-1)} = -\frac{e^{-1}}{e^{-1} + \frac{3}{e}} = -\frac{1}{4}$$

$$z'_y = -\left.\frac{e^y}{e^z + \frac{3}{e}}\right|_{(-1;-1;-1)} = -\frac{e^{-1}}{e^{-1} + \frac{3}{e}} = -\frac{1}{4}$$

Тогда дифференциал имеет вид:

$$dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y = -\frac{1}{4}\cdot\Delta x - \frac{1}{4}\cdot\Delta y$$

Найдем приближенное значение функции z(-0,9;-0,8) для этого обозначим

$x = x_0 + \Delta x \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1;\ \ \Delta x = 0,1$

$y = y_0 + \Delta y \quad \Rightarrow \quad y_0 = -1;\ \ \Delta y = 0,2$

Приближенное значение функции вычислим по формуле: $z\big|_{x=-0,9,y=-0,8} \approx z\big|_{x=-1,y=-1} + dz$, где $dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y$, тогда

Приближенное значение функции:

$$z\big|_{x=-0,9,y=-0,8} \approx -1 - \frac{1}{4}\cdot 0,1 - \frac{1}{4}\cdot 0,2 = -1 - 0,025 - 0,05 = -1,075$$