- **Вопрос 1**: Дать определение линейного (векторного) пространства.

  Ответ: Множество L элементов x, y, z, . . . любой природы называют линейным пространством, если выполнены три условия: 1) задано сложение элементов L, т.е. закон, по которому любым элементам $x, y \in L$ ставится в соответствие элемент $z \in L$, называемый суммой элементов x и y и обозначаемый $z = x + y$; 2) задано умножение элемента на число, т.е. закон, по которому любому элементу $x \in L$ и любому числу $\lambda \in R$ ставится в соответствие элемент $z \in L$, называемый произведением элемента x на (действительное) число и обозначаемый $z = \lambda x$; 3) указанные законы (линейные операции) подчиняются следующим аксиомам линейного пространства: а) $x + y = y + x$; б) $(x + y) + z = x + (y + z)$; в) $0 \in L$, что $x + 0 = x$ для любого $x \in L$; г) $(x) \in L$, что $x + (x) = 0$; д) $1\Delta x = x$; е) $\lambda(x) = (\lambda)x$; ж) $(\lambda +)x = \lambda x + x$; з) $\in \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

- **Вопрос 2**: Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

  Ответ: Систему векторов x1, x2, ..., xk в линейном пространстве L называют линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору. Если же линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору только лишь в случае, когда она тривиальна, систему векторов называют линейно независимой.

- **Вопрос 3**: Дать определение базиса и размерности линейного пространства.

  Ответ: Базисом линейного пространства L называют любую упорядоченную систему векторов, для которой выполнены два условия: 1) эта система векторов линейно независима; 2) каждый вектор в линейном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы. Максимальное количество линейно независимых векторов в данном линейном пространстве называют размерностью линейного пространства.

- **Вопрос 4**: Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому.

  Ответ: i-й столбец матрицы перехода есть столбец координат i-го вектора нового базиса в старом. Поэтому говорят, что матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам.

- **Вопрос: 5**: Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.

  Ответ: Чтобы получить координаты вектора в старом базисе, необходимо столбец координат этого вектора в новом базисе умножить слева на матрицу перехода из старого базиса в новый. $x = Ux$, где. U — матрица перехода.

- **Вопрос: 6**: Дать определение подпространства линейного пространства и линейной оболочки системы векторов.

  Ответ: Подмножество H линейного пространства L называют линейным подпространством, если выполнены следующие два условия: 1) сумма любых двух векторов из H принадлежит H: $x, y \in H \rightarrow x + y \in H$; 2) произведение любого вектора из H на любое действительное число снова принадлежит H: $x \in H$, $\lambda \in R \rightarrow \lambda x \in H$.

- **Вопрос: 7**: Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.

  Ответ: Линейное пространство E называют евклидовым пространством, если в этом пространстве задано скалярное умножение, т.е. закон или правило, согласно которому каждой паре векторов $x, y \in E$ поставлено в соответствие действительное число (x, y), называемое скалярным произведением. При этом выполняются следующие аксиомы скалярного умножения: а) $(x, y) = (y, x)$; б) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$; в) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \lambda \in R$; г) $(x, x) > 0$, причем $(x, x) = 0$ лишь в случае, когда $x = 0$.

- **Вопрос: 8**: Записать неравенство Коши — Буняковского и неравенство треугольника.

  Ответ: Для любых векторов x, y евклидова пространства E справедливо неравенство Коши — Буняковского $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$. Неравенство треугольника: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

- **Вопрос: 9**: Дать определение ортогональной системы векторов и ортонормированного базиса евклидова пространства.

  Ответ: Два вектора в евклидовом пространстве называют ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Систему векторов евклидова пространства называют ортогональной, если любые два вектора из этой системы ортогональны.

- **Вопрос: 10**: Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов.

  Ответ: Теорема о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов утверждает, что векторы в линейно независимой системе являются ортогональными, если и только если эта система состоит из двух векторов в евклидовом пространстве.

- **Вопрос: 11**: Дать определение линейного оператора и матрицы линейного оператора.

  Ответ: Отображение $A : L \rightarrow L$ из линейного пространства L в линейное пространство L называют линейным отображением или линейным оператором, если выполнены следующие условия: а) $A(x + y) = A(x) + A(y)$ для любых векторов $x, y \in L$; б) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ для любого вектора $x \in L$ и любого числа $\lambda \in R$.

- **Вопрос: 12**: Записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

  Ответ: Матрицы Ab и Ae линейного оператора $A : L \Rightarrow L$, записанные в базисах b и e линейного пространства L, связаны друг с другом соотношением: $Ae = U^{-1}AbU$, где $U = U_{b \rightarrow e}$ — матрица перехода от базиса b к базису e.

- **Вопрос: 13**: Дать определение характеристического уравнения, собственного числа и собственного вектора линейного оператора.

  Ответ: Многочлен $\xi_A(\lambda) = det(A\lambda E)$ называют характеристическим многочленом матрицы A, а уравнение $\xi A(\lambda) = A$ — характеристическим уравнением матрицы A. Ненулевой вектор x в линейном пространстве L называют собственным вектором линейного оператора $A : L \rightarrow L$, если для некоторого действительного числа λ выполняется соотношение $Ax = \lambda x$. При этом число λ называют собственным значением (собственным числом) линейного оператора A.

- **Вопрос: 14**: Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряжённого оператора, отвечающих разным собственным значениям.

  Ответ: Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

- **Вопрос: 15**: Дать определение самосопряжённого линейного оператора на евклидовом пространстве и сформулировать теорему о виде матрицы самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе.

  Ответ: Линейный оператор самосопряженный в евклидовом пространстве, если для любых векторов x и y верно равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$.

- **Вопрос: 16**: Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряжённого оператора.

  Ответ: Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора действительны.

- **Вопрос: 17**: Сформулировать теорему о существовании ортонормированного базиса, в котором матрица заданного самосопряженного оператора имеет простой вид.

  Ответ: Теорема о существовании ортонормированного базиса для самосопряженного оператора гласит, что для любого самосопряженного оператора A в конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора A имеет диагональный вид, где на главной диагонали стоят собственные значения оператора. Более того, этот базис может быть выбран таким, чтобы в нём каждому собственному значению соответствовал один собственный вектор.

- **Вопрос: 18**: Дать определение ортогонального линейного оператора и ортогональной матрицы.

  Ответ: Ортогональный линейный оператор — это линейный оператор на евклидовом пространстве, который сохраняет длины векторов и углы между ними ($\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$).
  Ортогональная матрица — это квадратная матрица A, у которой столбцы (или строки) образуют ортонормированный базис в евклидовом пространстве R^n ($A^T A = AA^T = I$), где I — единичная матрица.

- **Вопрос: 19**: Дать определение квадратичной формы, матрицы и канонического вида квадратичной формы.

  Ответ: Квадратичная форма — это функция вида $Q(x)$, которая ставит в соответствие каждому вектору x из линейного пространства V действительное число, определенное формулой $Q(x) = x^T Ax$, где A — симметричная матрица. Матрица квадратичной формы A представляет собой матрицу коэффициентов при квадратичных членах в выражении $Q(x) = x^T Ax$. Канонический вид квадратичной формы — это её представление в виде суммы квадратов переменных с некоторыми коэффициентами, выраженными через единицы, нули и -1.

- **Вопрос: 20**: Записать формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

  Ответ: $A = U^T AU$

- **Вопрос: 21**: Дать определение положительно определённой, отрицательно определённой и неопределённой квадратичной формы.

  Ответ: Квадратичная форма $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется:

  положительно определенной, если $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ для любых ненулевых значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$;
  отрицательно определенной, если $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ для любых ненулевых значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$;
  неопределенной, если она не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной. То есть, существуют такие ненулевые значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ и такие, при которых $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$.

- **Вопрос: 22**: Сформулировать критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы и его следствия для отрицательно определённых и неопределённых форм.

  Ответ: Критерий Сильвестра - это метод проверки на положительную определённость квадратичной формы, заданной матрицей A. Для этого проверяются знаки определителей подматриц матрицы A:

  Если все определители больше нуля, то квадратичная форма является положительно определённой. Если знаки определителей чередуются, начиная с отрицательного, то квадратичная форма является отрицательно определённой. Если ни одно из первых двух условий не выполняется, но есть хотя бы один ненулевой определитель, то квадратичная форма не является ни положительно определённой, ни отрицательно определённой - она неопределённая. Следствия критерия Сильвестра:

  Если все главные миноры матрицы A ненулевые и чётного порядка, то квадратичная форма является положительно определённой. Если все главные миноры матрицы A ненулевые, но чётность порядка матрицы и число отрицательных главных миноров не совпадают, то квадратичная форма является отрицательно определённой. Если хотя бы один главный минор матрицы A равен нулю, то квадратичная форма не может быть положительно или отрицательно определённой, и может быть только неопределённой.

- **Вопрос: 23**: Сформулировать закон инерции квадратичных форм.

  Ответ: Закон инерции квадратичных форм утверждает, что для любых двух канонических форм, полученных из одной и той же квадратичной формы, число положительных элементов, число отрицательных элементов и число нулевых элементов не зависят от выбора канонических форм и одинаковы для всех канонических форм. Эти числа называются, соответственно, положительным, отрицательным и нулевым индексами инерции квадратичной формы.