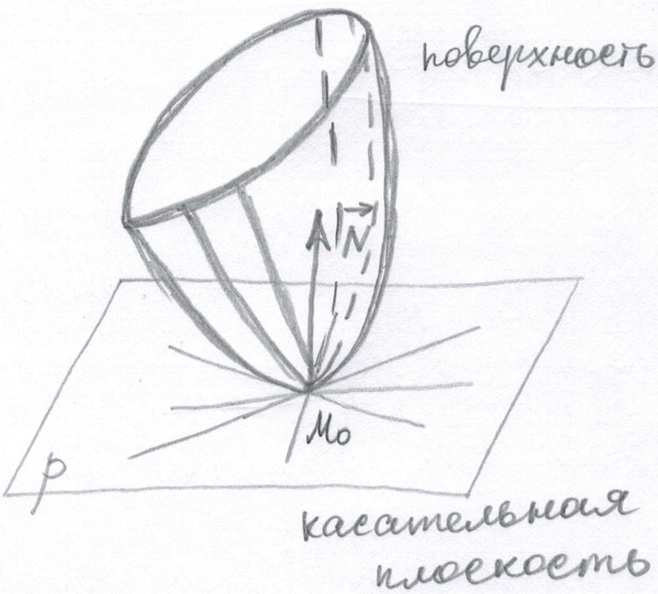
С.з №5 (продолжение)

Касательная плоскость и нормаль к поверхности



Касат. плоскость – p к поверхности в точке M_0 (точка касания) наз-ся плоскость, в которой лежат все касательные в точке M к различным кривым проведённым на поверхности ч/з эту точку.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка касания

p – касательная плоскость

$\vec{N}$ – нормаль

Нормаль – это перпендикуляр к касательной плоскости p, проведённый ч/з т. касания M_0.

$y = y(x)$, $M_0(x_0, y_0)$

$y = f(x)$

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$ ур-ние кас.

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$ ур-ние нор.

$z = f(x, y)$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0)}$$

ур-ние касательной

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x} = \frac{y - y_0}{f'_y} = \frac{z - z_0}{-1}}$$

ур-ние нормали

Случай неявно заданной функции: $F(x, y, z) = 0$.

$$\boxed{F'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0}$$

ур-ние касательной

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}}$$ уравнение нормали.

Задачи: 7.229 а
7.233 а
7.232
7.234
7.239 а

Д/З 7.229 б
7.233 б, в
7.235
7.239 б

7.229 а) $z = \sin x \cdot \sin y$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} z'_x = \sin y \cdot \cos x, \\ z'_y = \sin x \cdot \cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x|_{M_0} = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \\ z'_y|_{M_0} = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} z - z_0 = z'_x\cdot(x - x_0) + z'_y\cdot(y - y_0) \\ \hline z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) \end{array}}$$ уравнение касательной плоскости

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

$$\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{y-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$$

уравнение нормали

7.233 а) $x(y+z)(xy-z)+8=0$, $M_0(2,1,3)$

$$F(x,y,z)=(xy+xz)(xy-z)+8 = x^2y^2-xyz+x^2yz-xz^2+8 = 0$$

$$\begin{cases} F'_x = 2y^2x-yz+2xyz-z^2, \\ F'_y = 2x^2y-xz+x^2z, \\ F'_z = -xy+x^2y-2xz. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_x\big|_{M_0(2,1,3)} = 2\cdot 1^2\cdot 2-1\cdot 3+2\cdot 2\cdot 1\cdot 3-3^2 = 4-3+12-9 = 1+3 = 4 \\ F'_y\big|_{M_0(2,1,3)} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1-2\cdot 3+2\cdot 2\cdot 3 = 8-6+12 = 14 \\ F'_z\big|_{M_0(2,1,3)} = -2+4\cdot 1-2\cdot 2\cdot 3 = 2-12 = -10 \end{cases}$$

$$F'_x\Big|_{M_0}\cdot(x-x_0)+F'_y\Big|_{M_0}\cdot(y-y_0)\cdot F'_z\Big|_{M_0}(z-z_0)=0$$

$$\boxed{4(x-2)+14(y-1)+(-10)(z-3)=0}$$

ур-ние касательной плоскости.

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_{M_0}}$$

$$\boxed{\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{14}=\frac{z-3}{-10}}$$ ур-ние нормали

7 232) $z=4x-xy+y^2$ – поверхность

касат. пл-сть $\parallel$ $4x+y+2z+9=0$

$\uparrow$

?

$$\underbrace{f'_x(x_0,y_0)}_{A}(x-x_0)+\underbrace{f'_y(x_0,y_0)}_{B}(y-y_0)\underbrace{-z}_{-1=C}+z_0=0$$

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=4-y_0, \\ f'_y(x_0,y_0)=-x_0+2y_0 \end{cases}$$

$$f'_z=-1$$

$\vec{N_1} = \{ f'_x, f'_y, f'_z \} = \{ 4 - y_0, -x_0 + 2y_0, -1 \}$

нормальный вектор касательной плоскости

$\vec{N_2} = \{ 4, 1, 2 \}$ – нормальный вектор плоскости $4x + y + 2z + 9 = 0$.

Условие $\parallel$ этих плоскостей: $\vec{N_1} \parallel \vec{N_2}$ $\Rightarrow$ пропорциональность координат векторов

$$\frac{4 - y_0}{4} = \frac{-x_0 + 2y_0}{1} = \frac{-1}{2}$$

$$4 - y_0 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$y_0 = 6$$

$$-x_0 + 2y_0 = -\frac{1}{2}$$

$$-x_0 + 12 = -\frac{1}{2}$$

$$x_0 = 12 + \frac{1}{2} = \frac{25}{2} = x_0$$

$$z_0 = 4x_0 - x_0 y_0 + y_0^2 = 4 \cdot \frac{25}{2} - \frac{25}{2} \cdot 6 + 6^2 = 50 - 75 + 36 = 11 = z_0$$

$$\boxed{M_0 \left(\frac{25}{2}; 6; 11 \right)}$$

точка касания

$$\begin{cases} z'_x = 4 - y_0 = 4 - 6 = -2, \\ z'_y = -x_0 + 2y_0 = -\frac{25}{2} + 12 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$

$$\boxed{z - 11 = -2\cdot\left(x - \frac{25}{2}\right) - \frac{1}{2}(y - 6)}$$ уравнение касательной плоскости

⋮

$$\boxed{4x + y + 2z - 78 = 0}$$

7.234 $x^2 - z^2 - 2x + 6y = 4$ – поверхность

Нормали $\parallel \frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$

?

$$\vec{N_1} = \{F'_x, F'_y, F'_z\}$$

$$\vec{N_2} = \{1, 3, 4\}$$

$$\begin{cases} F'_x = 2x - 2, \\ F'_y = 6, \\ F'_z = -2z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x|_{M_0} = 2x_0 - 2, \\ F'_y|_{M_0} = 6, \\ F'_z|_{M_0} = -2z_0 \end{cases}$$

$\vec{N_1} \parallel \vec{N_2} \Rightarrow$ пропорц. соотв. координат.

$$\frac{2x_0-2}{1}=\frac{6}{3}=\frac{-2z_0}{4}=2$$

$$2x_0-2=2$$
$$2x_0=4 \qquad x_0=2$$

$$-2z_0=8$$
$$z_0=-4$$

$$x_0=2 \qquad z_0=-4$$

$$x_0^2-z_0^2-2x_0+6y_0=4$$

$$6y_0=4+2x_0+z_0^2-x_0^2$$

$$6y_0=4+2\cdot 2+(-4)^2-2^2=4+\cancel{4}+16-\cancel{4}=20$$

$$y_0=\frac{20}{6} \qquad M_0=\left(2;\ \frac{20}{6};\ -4\right)$$

$$F'_x/_{M_0}=2x_0-2=2\cdot 2-2=4-2=2$$

$$F'_y/_{M_0}=6=6$$

$$F'_z/_{M_0}=-2z_0=-2\cdot(-4)=+8$$

$$\vec{N}=\{2,6,+8\}\sim\{1,3,4\}$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x/_{M_0}}=\frac{y-y_0}{F'_y/_{M_0}}=\frac{z-z_0}{F'_z/_{M_0}}$$

$$\boxed{\frac{x-2}{1}=\frac{y-\frac{10}{3}}{3}=\frac{z+4}{4}}$$ нормаль.

7.239 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2ax, \\ x^2+y^2+z^2=2by \end{cases}$ — показать, что поверхности ортогональны

$$\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2ax=0, \\ G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2by=0 \end{cases}$$

$$\vec{N_1}=\{F'_x, F'_y, F'_z\}$$

$$\vec{N_2}=\{G'_x, G'_y, G'_z\}$$

$$\begin{cases} F'_x=2x-2a, \\ F'_y=2y, \\ F'_z=2z \end{cases} \qquad \begin{cases} G'_x=2x \\ G'_y=2y-2b \\ G'_z=2z \end{cases}$$

$$p_1 \perp p_2 \Rightarrow \vec{N_1} \perp \vec{N_2} \Rightarrow \vec{N_1} \cdot \vec{N_2}=0.$$

$$(2x-2a)\cdot 2x+2y(2y-2b)+2z\cdot 2z=0$$

$$4x^2-4ax+4y^2-4by+4z^2=0$$

$$x^2-ax+y^2-by+z^2=0 \qquad \begin{cases} ax=\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \\ by=\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-$$

$$-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=0$$

$$x^2+y^2+z^2-x^2-y^2-z^2=0$$

$$0=0$$