Модуль 3. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных (ФНП)

С.з. №1. Тема: Область определения ФНП. Линии уровня. Поверхности уровня.

Опр 1: Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – множество точек n-го арифметического пространства. Если каждой точке $P(x_1, \dots, x_n) \in D$ поставлено в соответствие число $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$, то говорят, что определена ФНП $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ на области D.

D – область определения ф-ции f.

$E = \{u \in \mathbb{R},\ u = f(P),\ P \in D\}$ – область значений функции f.

Если $n = 2$, то $z = f(x, y)$ – функция 2-х переменных. (функция точек плоскости в трёхмерном пространстве)

Опр 2: Графиком функции нескольких переменных наз-ся мн-во:

$$\Gamma(f) = \left\{(\vec{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \vec{x} \in D(f),\ y = f(\vec{x})\right\}$$

Если $n = 2$, то $\Gamma(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\right\}$

Опр 3: Поверхностью уровня наз-ся мн-во

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) = const\}$$

Если $n = 2$, то $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = const\}$ – линия уровня.

Задачи:

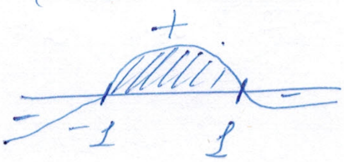
[Д]	[ЕД]	Д/З [Д]
3.137	7.4	3.141
3.139	7.9	3.145
3.143	7.15	3.151
3.147	7.16	3.154
3.150		3.157
3.153		3.167
3.155		3.168

3.137 Определить и изобразить область определения функции: $u = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$

<u>Решение</u>

$1-x^2 \geq 0$

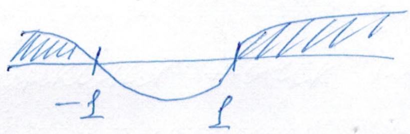
$(1-x)(1+x) \geq 0$



$x \in [-1; 1]$

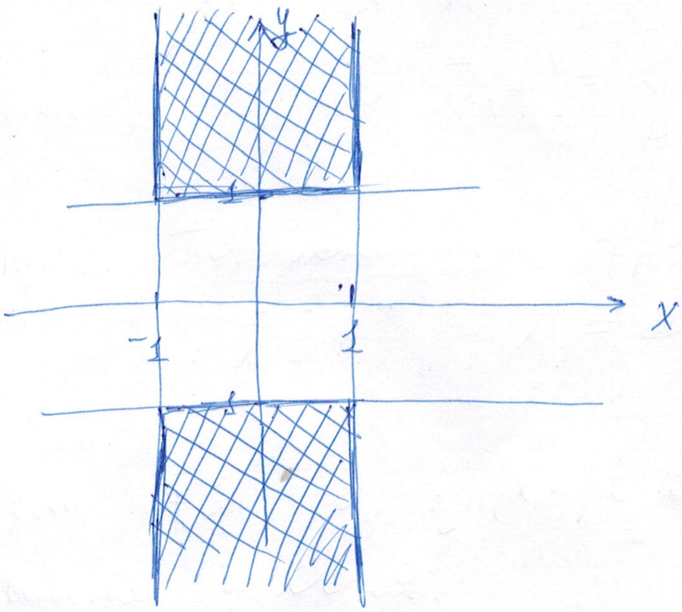
$y^2-1 \geq 0$

$(y-1)(y+1) \geq 0$



$y \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

$D(u) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ y \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty) \}$



Ответ: $D(u) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $x \in [-1; 1],\ y \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \}$

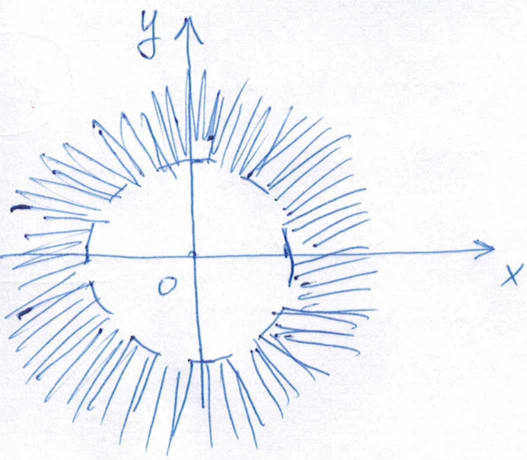
„два вертикальных бесконечных рукава вместе с границами"

3.139 Определить и изобразить область определения функции $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

Решение: $x^2+y^2-1>0$

$x^2+y^2>1$

$D(u) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$



Ответ: $D(u) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$

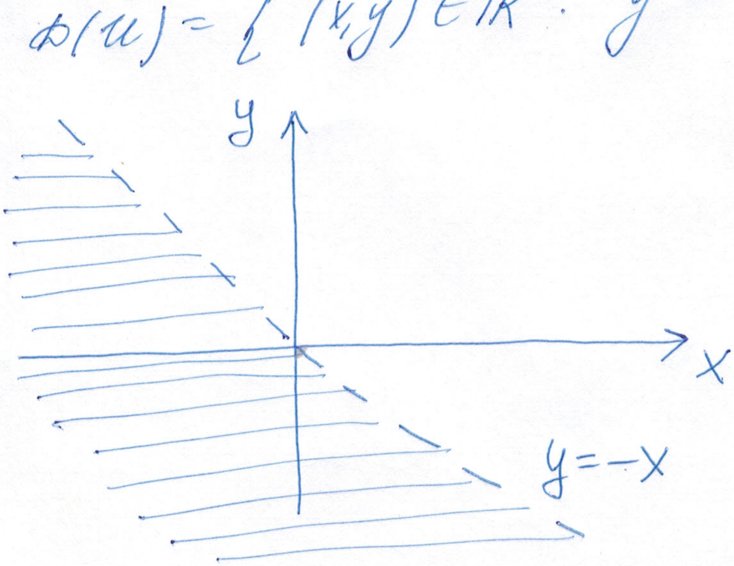
„внешность окружности без самой окружности"

3.143 Определить и изобразить область определения функции: $u = \ln(-x-y)$

Решение: $-x-y>0$

$y<-x$

$D(u) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y<-x\}$



Ответ: $D(u) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y<-x\}$

„полуплоскость, расположенная ниже прямой $y=-x$ без самой прямой"

4

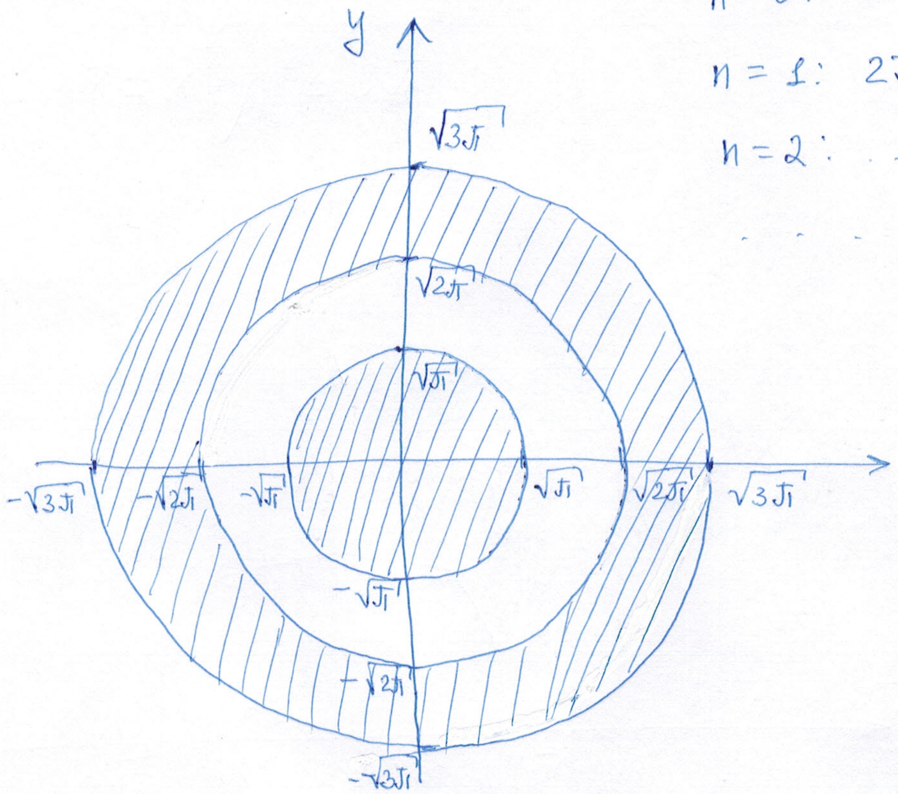
3.147 Определить и изобразить область определения функции $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$

Решение: $\sin(x^2+y^2)\geq 0 \Rightarrow 0+2\pi n \leq x^2+y^2 \leq \pi+2\pi n,$
$n\in\mathbb{Z}$

$n=0:\ 0\leq x^2+y^2\leq \pi,$

$n=1:\ 2\pi\leq x^2+y^2\leq 3\pi$

$n=2:\ \ldots$



$D(u)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2\pi n\leq x^2+y^2\leq \pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\}$

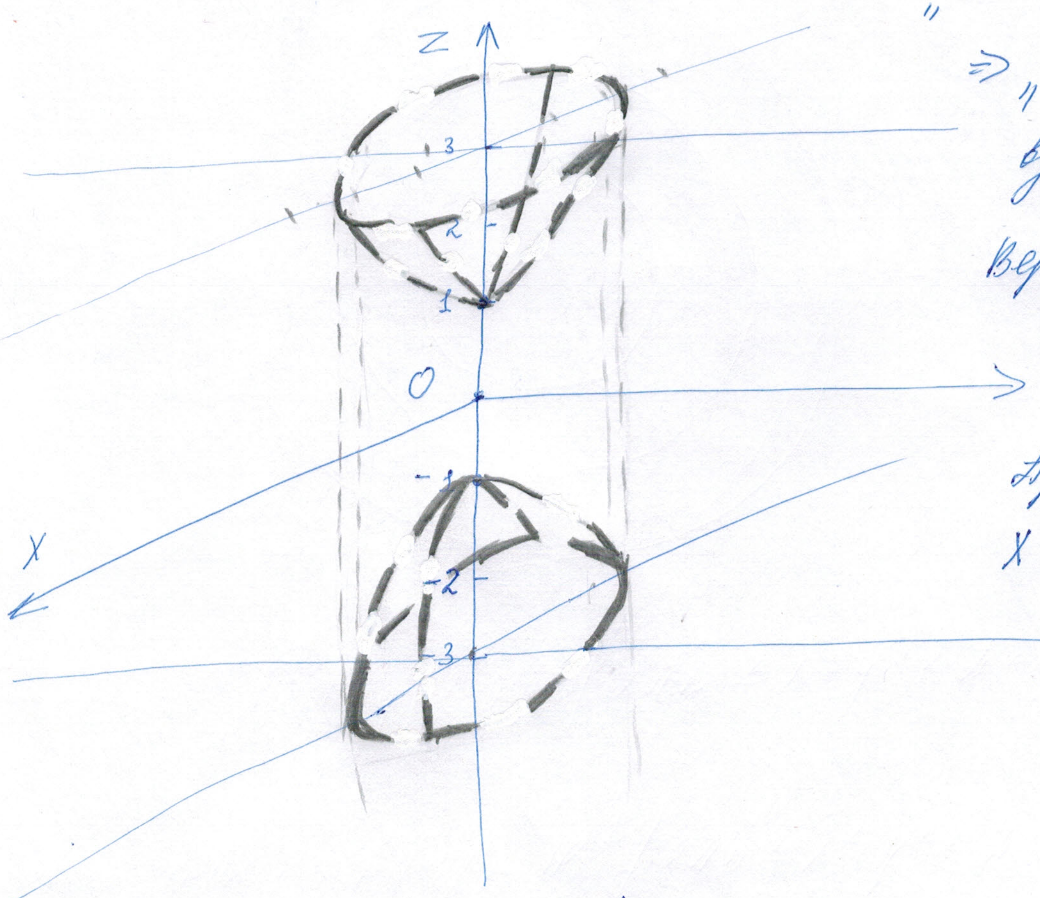
Ответ: $D(u)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2\pi n\leq x^2+y^2\leq \pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\}$

3.150 Определить и изобразить область определения функции $u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2)$

Решение: $-1 - x^2 - y^2 + z^2 > 0,$

$x^2 + y^2 - z^2 < -1$

$\boxed{x^2 + y^2 - z^2 = -1}$ двуполостный гиперболоид.



„–" перед z ⟹ „вытянутый" вдоль оси Oz.

Вершины в т. $z = \pm 1$.

При $z = \pm 3$ $x^2 + y^2 = 8$ т.е окружность радиуса $2\sqrt{2}$

$D(u) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < -1 \}$

„внутренность двуполостного гиперболоида без самого гиперболоида"

Ответ: $D(u) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < -1 \}$

3.153 Построить линии уровня
$z = x^2 - y^2$

Решение: $z = x^2 - y^2 = const = C$

1 случай: $const = C = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 0$

$\boxed{\begin{array}{c} y = x \\ \hline y = -x \end{array}}$ – пара пересекающихся прямых

2 случай: $const = C > 0$

т.е $C = a^2$

$x^2 - y^2 = a^2$

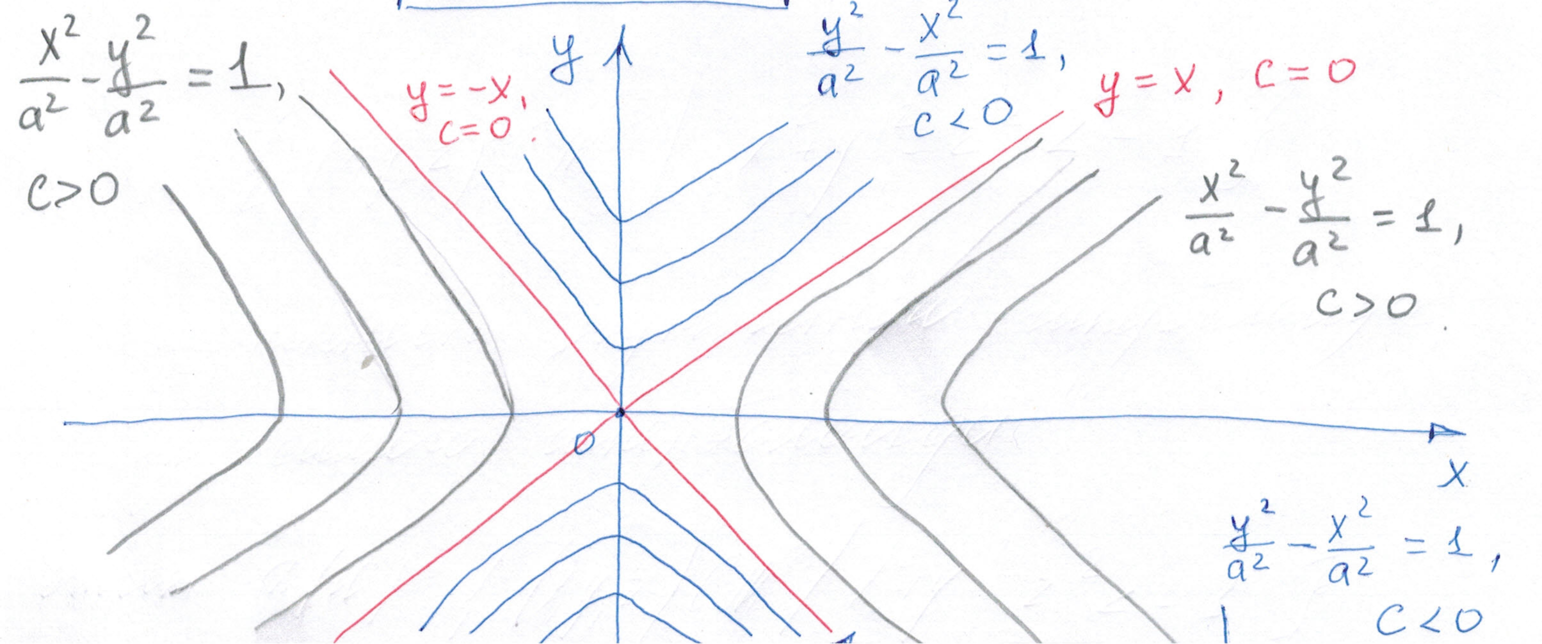
$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1}$ – гиперболы

3 случай: $const = C < 0$

т.е $C = -a^2$

$x^2 - y^2 = -a^2$

$\boxed{\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1}$ – гипербола.



Линии уровня – это кривые вида $y = x$, $y = -x$ – прямые

и гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ при $c = a^2$

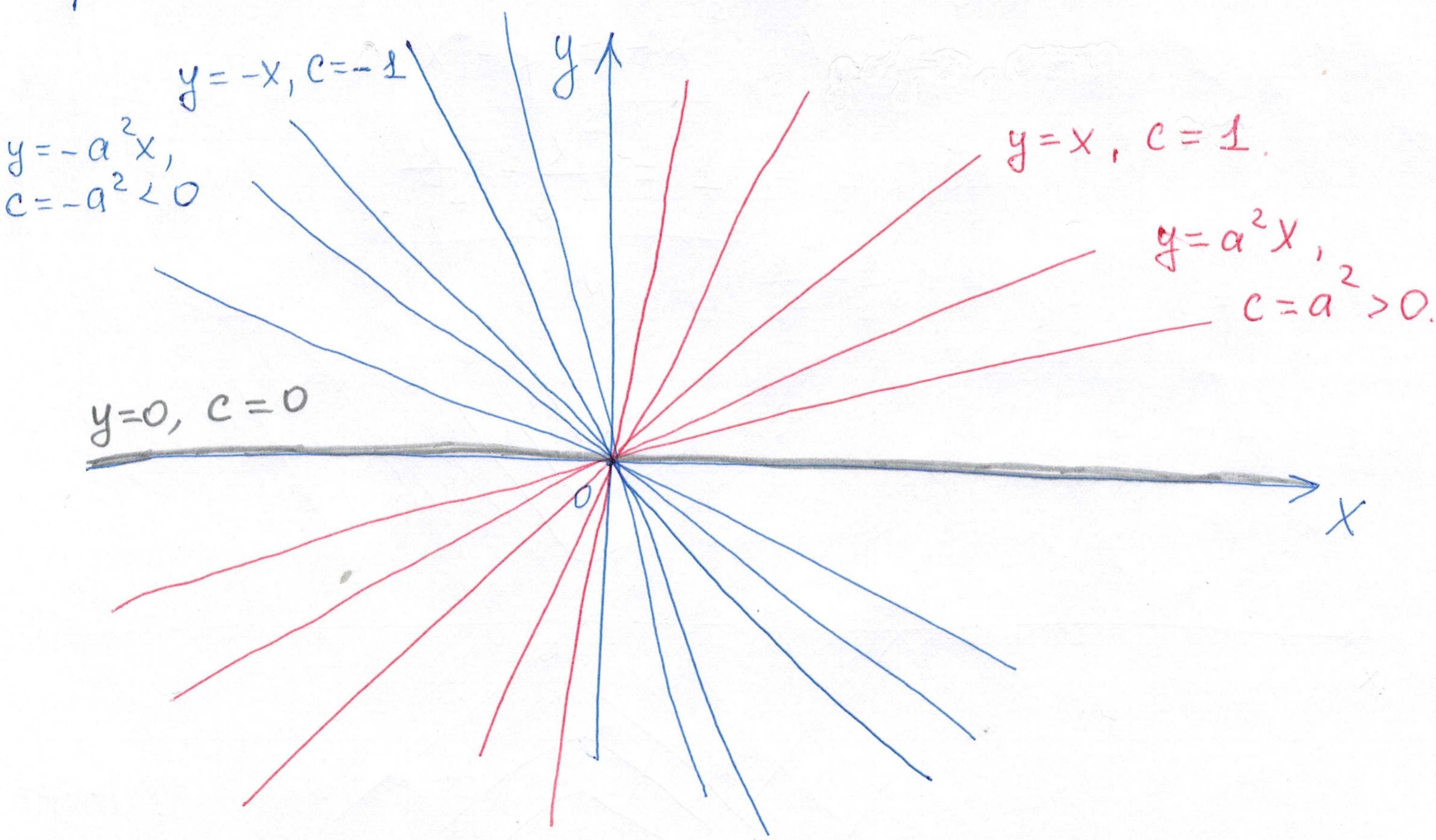
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ при $c = -a^2$.

3.155 Построить линии уровня

$$z = \frac{y}{x}$$

Решение: $z = \frac{y}{x} = c = const \Rightarrow y = c \cdot x$

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } c = 0,\ y = 0. \\ \text{при } c > 0,\ c = a^2,\ y = a^2 x \\ \text{при } c < 0,\ c = -a^2,\ y = -a^2 x \end{array}\right\} \text{семейство прямых}$$



Линии уровня – это семейство прямых вида $y = c \cdot x$, где $c = const$.

[Е.Д]. 7.9 Определить и изобразить область определения ф-ции $z = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$

Решение: $1-(x^2+y)^2 \geq 0$

$(x^2+y)^2 \leq 1$

$(x^2+y)^2 - 1 \leq 0$

$\boxed{(x^2+y-1)(x^2+y+1) \leq 0}$

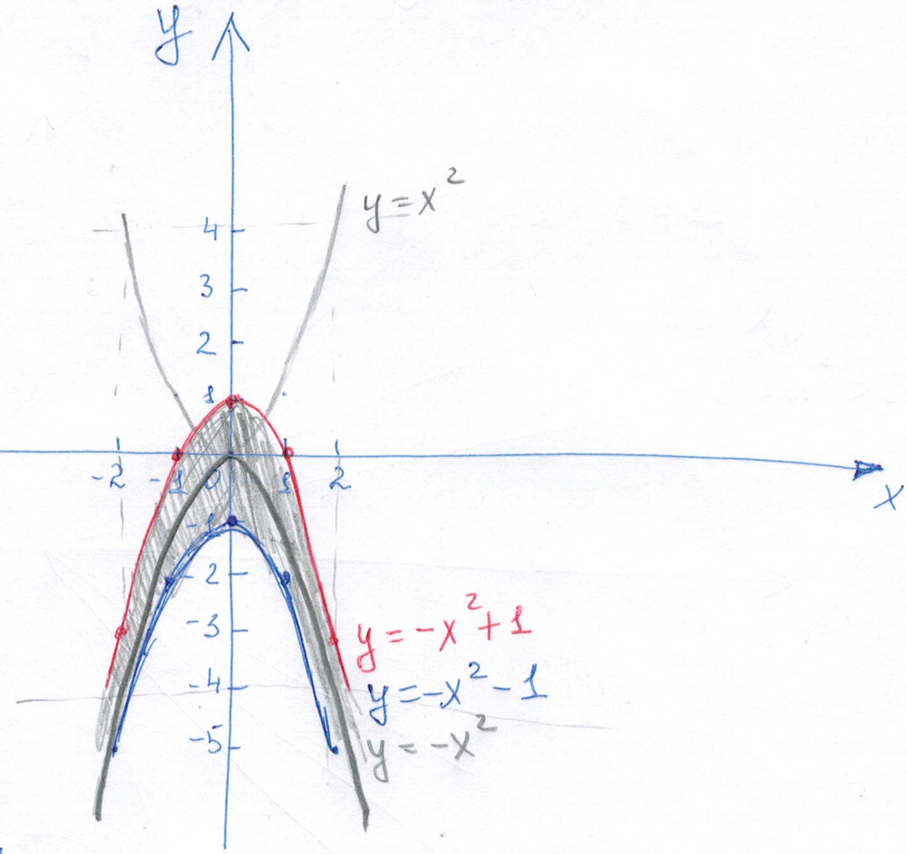
$x^2+y-1=0$, $y = -x^2+1$

$x^2+y+1=0$ $y = -x^2-1$

$- + = -$

$+ - = -$

"мн-во точек м/у параболами $y=-x^2+1$ и $y=-x^2-1$ вместе с самими параболами"



$D(z) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq -x^2+1, \ y \geq -x^2-1 \}$;

$y \geq x^2+1,\ y \leq -x^2-1 \}$

Ответ: $D(z) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2+1,\ y \geq -x^2-1,$
$y \geq x^2+1,\ y \leq -x^2-1 \}.$

7.16 Определить и изобразить область определения функции $z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$

Решение: $-1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1$

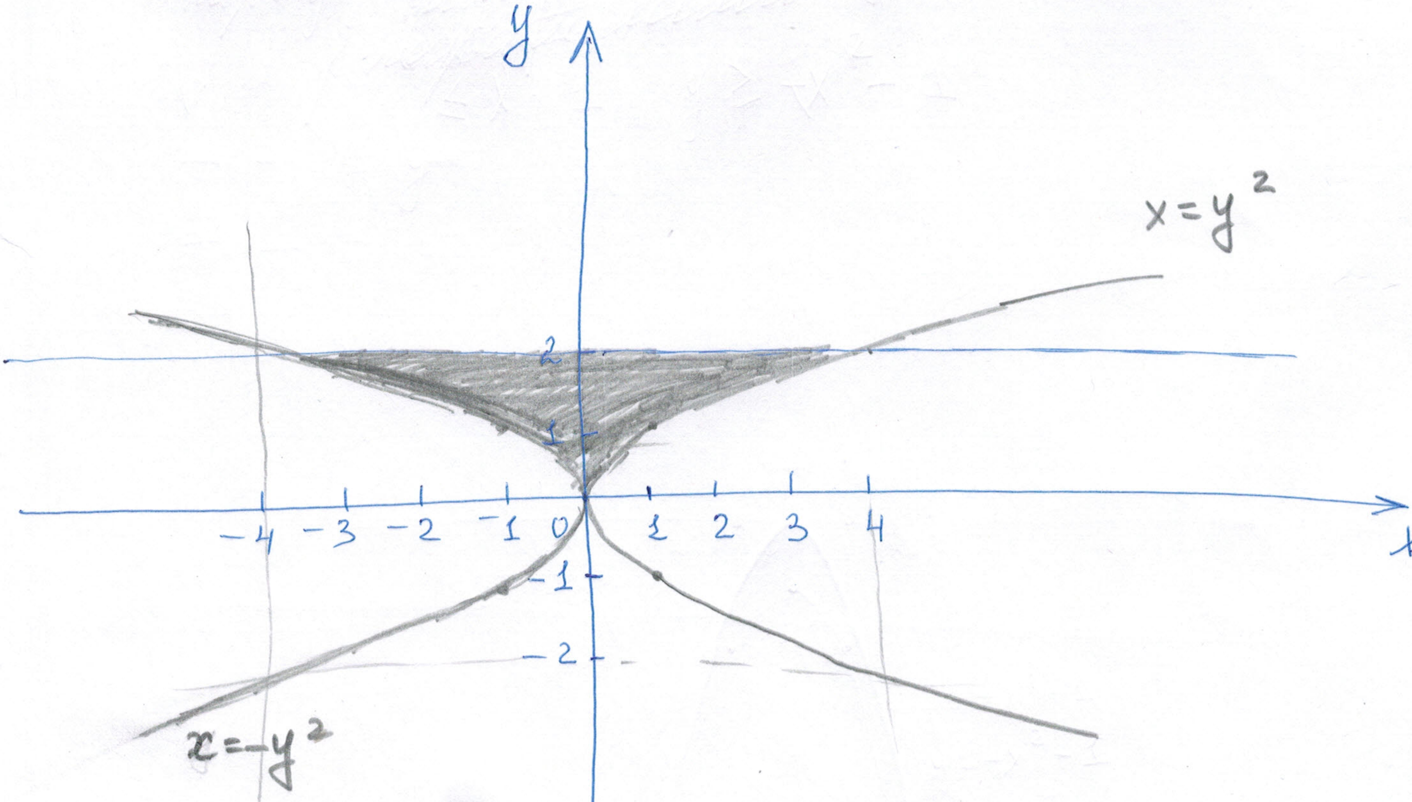
$x \leq y^2$

$x \geq -y^2$

$-1 \leq 1-y \leq 1$

$-2 \leq -y \leq 0$

$0 \leq y \leq 2$



$D(z) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y^2,\ x \geq -y^2,\ y \in [0;2] \}$

Ответ: $D(z) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq -y^2,\ y \in [0;2] \}$.

[D]: Задачник Демидович

[Е.Д]: Задачник Ефимов, Демидович

Д/З: 3.141 Определить и изобразить область определения функции $u = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$

3.145 $u = \arccos \dfrac{x}{x+y}$, D_f – ? изобразить

3.151 $z = x+y$, линии уровня ?

3.154 $z = (x+y)^2$, линии уровня ?

3.157 $z = \sqrt{xy}$, линии уровня ?

3.167 $u = x^2+y^2+z^2$, поверхность уровня ?

3.168 $u = x^2+y^2-z^2$, поверхность уровня ?