С.з №3. Тема: Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Дифференциалы первого и второго порядков

Пусть $f(x,y)=z$: приращение по „x" – Δx, y-const.

$$\boxed{z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}}$$

 — // —   : приращение по „y" – Δy, x-const

$$\boxed{z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}}$$

z'_x, z'_y – частные производные ф-ции $z=f(x,y)$ по x и по y соответственно.

Дифференциал первого порядка ф-ции $z=f(x,y)$

$$dz = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y \Rightarrow dz = A\cdot dx + B\,dy$$

$$\Downarrow$$

$\Delta x = dx$

$\Delta y = dy$

$$\boxed{dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy}$$

Частные производные z'_x и z'_y – это ф-ции от x и y $\Rightarrow$ от них тоже м/о взять производные.

Для ф-ции $z=f(x,y)$ это будут уже частные производные второго порядка и т.д

Частные производные высшего порядка – это частные производные порядка выше чем один (т.е два, три и т.д)

z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, z''_{yx}

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$? всегда ли равны.

Ответ: $z''_{xy} = z''_{yx}$, если ф-ции z''_{xy}, z''_{yx} непрерывные по x и по y.

Дифференциал второго порядка:

$$\boxed{d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2 z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2}$$

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n$$

Задачи: [Е.Д] 7.55, 7.57, 7.60, 7.61, 7.63, 7.89, 7.91, 7.105

д/з. 7.56, 7.58, 7.59, 7.62, 7.64, 7.90, 7.92, 7.102, 7.103, 7.107

7.55 $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$, Частн. произв. 1-го и 2-го порядка?

$z'_x = 5x^4 - 5y^3 \cdot 3x^2 = 5x^4 - 15x^2y^3$, $y = const$

$z'_y = 5y^4 - 15x^3y^2$, $x = const$

$z''_{xx} = 20x^3 - 30xy^3$

$z''_{xy} = -45x^2y^2$

$z''_{yy} = 20y^3 - 30x^3y$

$z''_{yx} = -45x^2y^2$

$z''_{xy} = z''_{yx}$

7.57 $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, Частн. произв. 1-го и 2-го порядка?

$$z'_x = y \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot 1 - \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}x \cdot x}{x^2+y^2} =$$

$$= y \cdot \frac{\cancel{x^2} + y^2 - \cancel{x^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad y = const$$

$$z'_y = x \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot 1 - \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}y \cdot y}{x^2+y^2} =$$

$$= x \cdot \frac{x^2 + \cancel{y^2} - \cancel{y^2}}{x^2+y^2} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad x = const$$

7.60 $z = y^x$ Частн. произв. 1-го и 2-го порядка ?

$z'_x = (y^x)'_x = y^x \cdot \ln y$, $y = const$

$z'_y = (y^x)'_y = x \cdot y^{x-1}$, $x = const$

$z''_{xx} = y^x \ln y \cdot \ln y = \ln^2 y \cdot y^x$, $y = const$

$z''_{yy} = x \cdot (x-1) y^{x-2}$, $x = const$

$z''_{xy} = (y^x \ln y)'_y = (y^x)'_y \ln y + y^x (\ln y)'_y =$

$= x \cdot y^{x-1} \ln y + y^x \cdot \frac{1}{y} = x y^{x-1} \ln y + y^{x-1} =$

$= y^{x-1} (x \ln y + 1)$, $x = const$

7.61 $z = \ln(x^2 + y^2)$ Частн. произв. 1-го и 2-го порядка ?

$z'_x = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x$, $y = const$

$z'_y = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y$, $x = const$

$z''_{xx} = 2 \cdot \frac{x^2+y^2 - 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = 2 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$z''_{yy} = 2 \cdot \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = 2\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y = 2x\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)'_y =$$

$$= -2x \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z''_{yx} = 2\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x = 2y\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)'_x =$$

$$= -2y \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

7.63 $\quad u = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

Частные производные 1-го и 2-го порядка

$$u'_x = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)} \cdot 2x$$

$$u'_y = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} \cdot 2y$$

$$u'_z = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} \cdot 2z$$

$$u''_{xx} = -2\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)'_x =$$

$$= -2\cdot\frac{(x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^2+y^2+z^2)\cdot 2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^4} =$$

$$= -2\cdot\frac{\cancel{(x^2+y^2+z^2)}\,(x^2+y^2+z^2-4x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= -2\cdot\frac{(y^2+z^2-3x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$u''_{yy} = -2\cdot\frac{(x^2+z^2-3y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$u''_{zz} = -2\cdot\frac{(x^2+y^2-3z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$u''_{xy} = -2\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)'_y = -2x\cdot\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)'_y =$$

$$= -2x\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}\cdot 2y = \frac{8xy}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$u''_{xz} = \frac{8xz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$u''_{yx} = -2\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)'_x = -2y\cdot(-2)\cdot\frac{1\cdot(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= \frac{8xy}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$u_{xy} = u_{yx}$$

$$u_{yz} = -2\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)'_z = -2y\cdot(-2)\cdot\frac{1\cdot(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$

$$= \frac{8yz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$u_{zy} = -2\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)'_y = \dots =$$

$$= \frac{8zy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$u_{zx} = -2\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)'_x = \ldots =$$

$$= \frac{8zx}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$u_{zx} = u_{xz}$

$u_{yz} = u_{zy}$

789 $z = \ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$, Дифференциал 1-го порядка

$$dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy$$

$$z'_x = \frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)}$$

$$z'_y = \frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}y\right)$$

$$dz = \frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dy \right)$$

7.91 $z = \ln\cos\frac{x}{y}$, дифф-ал 1-го порядка?

$$z'_x = \frac{1}{\cos\frac{x}{y}} \cdot \left(-\sin\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x =$$

$$= -\operatorname{tg}\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{y}\operatorname{tg}\frac{x}{y}$$

$$z'_y = \frac{1}{\cos\frac{x}{y}} \cdot \left(-\sin\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y =$$

$$= -\operatorname{tg}\frac{x}{y} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{x}{y^2}\operatorname{tg}\frac{x}{y}$$

$$dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{x}{y}\left(-\frac{1}{y}\,dx + \frac{x}{y^2}\,dy\right) =$$

$$= \frac{1}{y}\operatorname{tg}\frac{x}{y}\left(-dx + \frac{x}{y}\,dy\right)$$

7.105 $z=(x+y)e^{xy}$, Дифф-лы 1-го и 2-го порядка?

$$z'_x=e^{xy}+(x+y)y\cdot e^{xy}=e^{xy}(1+xy+y^2)$$

$$z'_y=e^{xy}+(x+y)x\,e^{xy}=e^{xy}(1+x^2+xy)$$

$$dz=e^{xy}\left[(1+xy+y^2)\,dx+(1+x^2+xy)\,dy\right]$$

$$z''_{xx}=\left(e^{xy}(1+xy+y^2)\right)'_x=y\,e^{xy}(1+xy+y^2)+$$
$$+e^{xy}y=e^{xy}y(2+xy+y^2)$$

$$z''_{yy}=\left(e^{xy}(1+xy+y^2)\right)'_y=x\,e^{xy}(1+xy+x^2)+$$
$$+x\,e^{xy}=e^{xy}x(2+xy+x^2)$$

$$z''_{xy}=\left(e^{xy}(1+xy+y^2)\right)'_y=e^{xy}\cdot x(1+xy+y^2)+$$
$$+e^{xy}\cdot(x+2y)=e^{xy}(x+x^2y+xy^2+x+2y)=$$
$$=e^{xy}\left(2(x+y)+xy(x+y)\right)=e^{xy}(x+y)(2+xy)$$

$$z''_{yx} = \left(e^{xy}(1+xy+x^2)\right)'_x = e^{xy}\cdot y\,(1+xy+x^2) +$$

$$+ e^{xy}(y+2x) = e^{xy}\left(y+xy^2+yx^2+y+2x\right) =$$

$$= e^{xy}\left(2(x+y)+xy(y+x)\right) = e^{xy}(x+y)(2+xy)$$

$$d^2z = z''_{xx}\,dx^2 + 2z''_{xy}\,dx\,dy + z''_{yy}\,dy^2 =$$

$$= e^{xy}y\,(2+xy+y^2)\,dx^2 + 2e^{xy}(x+y)(2+xy)\,dx\,dy +$$

$$+ e^{xy}x\,(2+xy+x^2)\,dy^2$$