БИЛЕТ 1

1. Дать определение открытой окрестности и открытого множества в R^n .

Откры́тое мно́жество — это множество, каждый элемент которого входит в него вместе с некоторой окрестностью (в метрических пространствах и, в частности, на числовой прямой).

Открытая окрестность для точки или множества — открытое множество, содержащее данную точку или данное множество.

2. Записать формулу для вычисления частных производных неявной функции $z(x,y)$, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$

Если функция $F(x,y,z)$ дифференцируема по переменным *x,y,z* в некоторой пространственной области D и $F'_z(x,y,z)\neq 0$, то уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет однозначную неявную функцию $z(x,y)$, также дифференцируемую

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

3. Сформулировать необходимое условие экстремума ФНП

Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0) и имеет экстремум в этой точке, то ее дифференциал равен нулю:

$$df(x_0y_0)=0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x(x_0y_0)=0 \\ f'_y(x_0y_0)=0 \end{cases}$$

4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3+y^3+z^3=5xyz$ в точке $(2;1;1)$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка:

$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-5xyz$

$F'x=3x^2-5yz$

$F'x|_M=3\cdot 2^2-5\cdot 1\cdot 1=12-5=7$

$F'y=3y^2-5xz$

$F'y|_M=3\cdot 1^2-5\cdot 2\cdot 1=3-10=-7$

$F'z=3z^2-5xy$

$F'z|_M=3\cdot 1^2-5\cdot 2\cdot 1=3-10=-7$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(x-x_0)+F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(y-y_0)+F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(z-z_0)=0$$

$$7(x-2)-7\cdot(y-1)-7\cdot(z-1)=0$$

$$7x-7y-7z=0$$

$$x-y-z=0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

$$\frac{x-2}{7}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z-1}{-7}$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z=4y^3+2xy+x^2+3$

Решение:

Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(4y^3+2xy+x^2+3\right)'_x=2y+2x=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(4y^3+2xy+x^2+3\right)'_y=12y^2+2x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y+2x=0\\12y^2+2x=0\end{cases}$$

Решим данную систему

$$-\begin{cases}2y+2x=0\\12y^2+2x=0\end{cases}$$

$$2y-12y^2=0$$

$$2y(1-6y)=0$$

$$y_1=0 \qquad y_2=\frac{1}{6}$$

$$x_1=0 \qquad x_2=-\frac{1}{6}$$

Следовательно, две точки $M_1(0;0)$, $M_2\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2;\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=24y$$

Для точки $M_1(0;0)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2;\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=24\cdot 0=0$$

$AC-B^2=2\cdot 0-2^2=-4<0$ не является точкой экстремума

Для точки $M_2\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2;\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=24\cdot\frac{1}{6}=4$$

$AC-B^2=2\cdot4-2^2=8-4=4>0$ и $A>0$ точка $M_2\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$ является точкой минимума

6. Исследовать на экстремум функцию $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при условии $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}$

БИЛЕТ 2

1. Дать определение предельной точки, граничной точки множества и замкнутого множества в R^n.

2. Записать формулу для вычисления производной ФНП по направлению.

Для функции двух переменных $\left.\frac{\partial z}{\partial a}\right| = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot \cos\beta$

Для функции трех переменных $\left.\frac{\partial u}{\partial a}\right| = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A \cdot \cos\gamma$

3. Сформулировать достаточное условие экстремума ФНП

Пусть функция нескольких переменных f: $R^n \to R$ определена в окрестности U(a) точки a, дважды непрерывно дифференцируема в U(a) и df(a) = 0. Тогда:
1)если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a положительно определенная, то в этой точке функция f(x) имеет строгий локальный минимум;
2)если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a отрицательно определенная, то в этой точке функция f(x) имеет строгий локальный максимум;
3)если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a знакопеременная, то в этой точке функция f(x) не имеет экстремума.

Или

Пусть функция f(x, y) определена в окрестности U(a, b) точки P (a, b), дважды непрерывно дифференцируема в U(a, b) и df(a, b) = 0. Тогда:
1) если A > 0 и $AC - B^2 > 0$, то в точке P (a, b) функция f(x, y) имеет строгий локальный минимум;
2)если A < 0 и $AC - B^2 > 0$, то в точке P функция f(x, y) имеет строгий локальный максимум;
3)если $AC - B^2 < 0$, то функция f(x, y) не имеет в точке P экстремума.
где $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = y + \ln\frac{x}{z}$ в точке $(1;1;1)$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка:

$F(x,y,z) = y + \ln\frac{x}{z} - z = y + \ln x - \ln z - z$

$F'x = \frac{1}{x} \qquad F'x\big|_M = \frac{1}{1} = 1$

$F'y = 1 \qquad F'y\big|_M = 1$

$F'z = -\frac{1}{z} - 1 \qquad F'z\big|_M = -\frac{1}{1} - 1 = -2$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)} \cdot (x - x_0) + F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)} \cdot (y - y_0) + F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)} \cdot (z - z_0) = 0$$

$$1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) - 2 \cdot (z-1) = 0$$

$$x - 1 + y - 1 - 2z + 2 = 0$$

$$x + y - 2z = 0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}} = \frac{y - y_0}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}} = \frac{z - z_0}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z = -11x^2 + 16xy - 6y^2 + 60x - 44y$

Решение:

Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-11x^2 + 16xy - 6y^2 + 60x - 44y\right)'_x = -22x + 16y + 60 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \left(-11x^2 + 16xy - 6y^2 + 60x - 44y\right)'_y = 16x - 12y - 44 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -22x + 16y + 60 = 0 \\ 16x - 12y - 44 = 0 \end{cases}$$

Решим данную систему

$$\begin{cases} -22x + 16y + 60 = 0 \\ 16x - 12y - 44 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11x + 8y = -30 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -44x + 32y = -120 \\ 44x - 33y = 121 \end{cases}$$

$$-y = 1$$

$$y = -1$$

$$x = 2$$

Следовательно, одна точка $M(2;-1)$

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -22; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 16; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12$

Для точки $M(2;-1)$

$AC - B^2 = -22 \cdot (-12) - 16^2 = 264 - 256 = 8 > 0$

и $A < 0$ точка $M(2;-1)$ является точкой максимума

6. Исследовать на экстремум функцию $z = 4x^2 + 9y^2 - 10$ при условии $xy = \frac{3}{2}$

БИЛЕТ 3

1. Дать определение ограниченного и связного множества в R^n
2. Перечислить основные свойства градиента ФНП

Свойства градиента:

- Градиент направлен по нормали к поверхности $z=f(x; y)$ в точке M_0.
- Градиент направлен в сторону наибольшего возрастания функции и равен по величине мгновенной скорости возрастания функции (то есть производной по этому направлению).
- Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору $\overline{gradz}$, равна нулю.

3. Сформулировать необходимые условия условного экстремума ФНП

Метод множителей Лагранжа состоит в том, что для отыскания условного экстремума составляют функцию Лагранжа: $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ (параметр λ называют множителем Лагранжа). Необходимые условия экстремума задаются системой уравнений, из которой определяются стационарные точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

Или составляем функцию Лагранжа:

$L(x,y,\lambda) = z(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

Необходимое условие условного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$$

4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $xy + e^{xz} = 0$ в точке $\left(5; -\dfrac{1}{5}; 0\right)$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка:

$F\left(x,y,z\right)=xy+e^{xz}$

$F'x=y+e^{xz}\cdot z \qquad F'x\big|_M=-\frac{1}{5}+e^{5\cdot 0}\cdot 0=-\frac{1}{5}$

$F'y=x \qquad F'y\big|_M=5$

$F'z=e^{xz}\cdot x \qquad F'z\big|_M=e^{5\cdot 0}\cdot 5=5$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot\left(x-x_0\right)+F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot\left(y-y_0\right)+F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot\left(z-z_0\right)=0$$

$$-\frac{1}{5}\cdot\left(x-5\right)+5\cdot\left(y+\frac{1}{5}\right)+5\cdot\left(z-0\right)=0$$

$$-\frac{1}{5}x+1+5y+1+5z=0$$

$$-\frac{1}{5}x+5y+5z+2=0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

$$\frac{x-5}{-\frac{1}{5}}=\frac{y+\frac{1}{5}}{5}=\frac{z-0}{5}$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3+xy+2$

Решение:

Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3+y^3+xy+2\right)'_x=3x^2+y=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3+y^3+xy+2\right)'_y=3y^2+x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2+y=0\\3y^2+x=0\end{cases}$$

Решим данную систему

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = -3x^2$$

$$3\left(-3x^2\right)^2 + x = 0$$

$$27x^4 + x = 0$$

$$x\left(27x^3 + 1\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad 27x^3 + 1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$y_1 = -3 \cdot 0^2 \qquad y_2 = -3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3}$$

Следовательно, две точки $M_1\left(0;0\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

Для точки $M_1\left(0;0\right)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \cdot 0 = 0; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \cdot 0 = 0$$

$AC - B^2 = 0 \cdot 0 - 1^2 = -1 < 0$ не является точкой экстремума

Для точки $M_2\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -2; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -2$$

$$AC - B^2 = -2 \cdot (-2) - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

и $A < 0$ точка $M_2\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ является точкой максимума

6. Исследовать на экстремум функцию $z = e^x - y$ при условии $y - x = 5$

Решение:

Составляем функцию Лагранжа:

$$L\left(x, y, \lambda\right) = e^x - y + \lambda\left(y - x - 5\right)$$

Находим частные производные, приравниваем их к нулю, находим точки подозрительные на локальный экстремум:

$$\begin{cases} L'_x = e^x - \lambda = 0 \\ L'_y = -1 + \lambda = 0 \\ L'_\lambda = y - x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Находим вторые производные:

$L''_{xx} = e^x; \;\; L''_{xy} = 0; \quad L''_{yy} = 0$

Исследуем в стационарной точке второй дифференциал функции Лагранжа $\lambda = -1$

Составим матрицу:

$\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-1+0-0 = -1 < 0$ следовательно, точка (0;5) является точкой условного минимума.

БИЛЕТ 4

1. Дать определение предела ФНП по множеству и непрерывной ФНП

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число A называется ***пределом функции*** $z = f(x;y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $|f(x;y) - A| < \varepsilon$. Записывают:

$$\boxed{A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) \text{ или } A = \lim_{M \to M_0} f(M).}$$

Функция $z = f(x;y)$ (или $f(M)$) называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0;y_0)$, если она:

а) определена в этой точке и некоторой ее окрестности,

б) имеет предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$,

в) этот предел равен значению функции z в точке M_0, т. е.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0).$$

2. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $(x_0;y_0;z_0)$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)} \cdot (x-x_0) + F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)} \cdot (y-y_0) + F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)} \cdot (z-z_0) = 0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}} = \frac{y-y_0}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}} = \frac{z-z_0}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

3. Сформулировать достаточное условие условного экстремума

Если в стационарной точке $d^2F>0$, то функция $z=f(x,y)$ имеет в данной точке условный минимум, если же $d^2F<0$, то условный максимум, где

$$d^2F=F''_{xx}dx^2+2F''_{xy}dxdy+F''_{yy}dy^2$$

или

Из уравнения связи получаем: $\varphi'_x dx+\varphi'_y dy=0$, $dy = -\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx$, поэтому в любой стационарной точке имеем:

$$d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dx\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx\right) +$$

$$+F''_{yy}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx\right)^2 = -\frac{dx^2}{(\varphi'_y)^2}\cdot(-(\varphi'_y)^2F''_{xx} + 2\varphi'_x\varphi'_yF'_{xy} - (\varphi'_x)^2F''_{yy})$$

Второй сомножитель (расположенный в скобке) можно представить в такой форме:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$$

Красным цветом выделены элементы определителя, который является гессианом функции Лагранжа. Если H>0, то $d^2F<0$, что указывает на условный максимум. Аналогично, при H<0 имеем $d^2F>0$, т.е. имеем условный минимум функции z=f(x,y).

4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$ в точке $(1;0;1)$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка:

$F(x,y,z) = z^3 + yz - xy^2 - x^3$

$F'x = -y^2 - 3x^2$ $\qquad F'x|_M = -0^2 - 3\cdot1^2 = -3$

$F'y = z - 2xy$ $\qquad F'y|_M = 1 - 2\cdot1\cdot0 = 1$

$F'z = 3z^2 + y$ $\qquad F'z|_M = 3\cdot1^2 + 0 = 3$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(x - x_0) + F'_y|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(y - y_0) + F'_z|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(z - z_0) = 0$$

$$-3\cdot(x-1) + 1\cdot(y-0) + 3\cdot(z-1) = 0$$

$$-3x + 3 + y + 3z - 3 = 0$$

$$-3x + y + 3z = 0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x|_{(x_0;y_0;z_0)}} = \frac{y - y_0}{F'_y|_{(x_0;y_0;z_0)}} = \frac{z - z_0}{F'_z|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{3}$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z = 3\ln x + 4\ln y - xy - x - y$

Решение:

Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(3\ln x + 4\ln y - xy - x - y\right)'_x = \dfrac{3}{x} - y - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(3\ln x + 4\ln y - xy - x - y\right)'_y = \dfrac{4}{y} - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{x} - y - 1 = 0 \\ \dfrac{4}{y} - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Решим данную систему

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} - y - 1 = 0 \\ \dfrac{4}{y} - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{3}{x} - 1 = \frac{3-x}{x}$$

$$\frac{4}{\frac{3-x}{x}} - x - 1 = 0$$

$$\frac{4x}{3-x} - x - 1 = 0$$

$$\frac{4x - 3x + x^2 - 3 + x}{3-x} = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0,\ x \neq 3$$

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

$$y_1 = \frac{3}{1} - 1 = 2 \qquad y_2 = \frac{3}{-3} - 1 = -2$$

Следовательно, две точки $M_1(1;2)$, $M_2(-3;-2)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-3}{x^2};\quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1;\quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-4}{y^2}$$

Для точки $M_1(1;2)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-3}{1^2} = -3;\quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1;\quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-4}{2^2} = -1$$

$$AC - B^2 = -3\cdot(-1) - (-1)^2 = 3 - 1 = 2 > 0$$

и $A < 0$ точка $M_1(1;2)$ является точкой максимума

Для точки $M_2\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-3}{(-3)^2} = -\frac{1}{3};\quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1;\quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-4}{(-2)^2} = -1$$

$$AC - B^2 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) - (-1)^2 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} < 0$$ не является точкой максимума

6. Исследовать на экстремум функцию $z = xy$ при условии $x^2 + y^2 = 6$

БИЛЕТ 5

1. Дать определение частной производной ФНП в точке

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y — независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется *частным приращением* z по x и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x; y)$ по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

2. Записать формулы для вычисления частных производных сложной функции вида $z = f\left(u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

3. Сформулировать теорему о связи непрерывности и дифференцируемости ФНП

Теорема

Если функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x;y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $e^z - z + xy = 3$ в точке $(2;1;0)$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка:

$F(x,y,z) = e^z - z + xy - 3$

$F'x = y \qquad F'x|_M = 1$

$F'y = x \qquad F'y|_M = 2$

$F'z = e^z - 1 \qquad F'z|_M = e^0 - 1 = 0$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(x-x_0) + F'_y|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(y-y_0) + F'_z|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(z-z_0) = 0$$

$$1\cdot(x-2) + 2\cdot(y-1) + 0\cdot(z-0) = 0$$

$$x - 2 + 2y - 2 = 0$$

$$x + 2y - 4 = 0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x|_{(x_0;y_0;z_0)}} = \frac{y-y_0}{F'_y|_{(x_0;y_0;z_0)}} = \frac{z-z_0}{F'_z|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{0}$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z = y\sqrt{x} - x - y^2 + 6y$

Решение:

Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(y\sqrt{x} - x - y^2 + 6y\right)'_x = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(y\sqrt{x} - x - y^2 + 6y\right)'_y = \sqrt{x} - 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ \sqrt{x} - 2y + 6 = 0 \end{cases}$$

Решим данную систему

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ \sqrt{x} - 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad y = 2\sqrt{x}, x > 0$$

$$\sqrt{x} - 2 \cdot 2\sqrt{x} + 6 = 0$$

$$3\sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$$y = 2\sqrt{4} = 4$$

Следовательно, одна точка $M\left(4;4\right)$

Находим частные производные второго порядка

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{4\sqrt{x^3}}; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

Для точки $M\left(4;4\right)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4}{4\sqrt{4^3}} = \frac{-1}{8}; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

$$AC - B^2 = -\frac{1}{8} \cdot (-2) - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > 0$$

и $A < 0$ точка $M\left(4;4\right)$ является точкой максимума

6. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x + \sqrt{3}y + 2$ при условии $x^2 - y^2 = 1$

Решение:

Составляем функцию Лагранжа:

$$L\left(x, y, \lambda\right) = 2x + \sqrt{3}y + 2 + \lambda\left(x^2 - y^2 - 1\right)$$

Находим частные производные, приравниваем их к нулю, находим точки подозрительные на локальный экстремум:

$$\begin{cases} L'_x = 2 + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = \sqrt{3} - 2y\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = \sqrt{3} \\ \lambda_1 = 0,5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -\sqrt{3} \\ \lambda_2 = -0,5 \end{cases}$$

Получили две точки

Находим вторые производные:

$L''_{xx} = 2\lambda;\; L''_{xy} = 0;\quad L''_{yy} = -2\lambda$

Исследуем в стационарной точке второй дифференциал функции Лагранжа

$\lambda = 0{,}5$

Составим матрицу:

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -2\sqrt{3} \\ -4 & 1 & 0 \\ -2\sqrt{3} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0+0+0-12+16-0 = 4 > 0$$ следовательно, точка $\left(-2;\sqrt{3}\right)$ является точкой условного максимума.

$\lambda = -0{,}5$

Составим матрицу:

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2\sqrt{3} \\ 4 & -1 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0+0+0+12-16-0 = -4 < 0$$ следовательно, точка $\left(2;-\sqrt{3}\right)$ является точкой условного минимума.

БИЛЕТ 6

1. Дать определение дифференцируемой ФНП в точке.

Функция $z = f(x;y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x;y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

2. Записать формулы для вычисления производной сложной функции вида $u = f\left(x(t), y(t), z(t)\right)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

3. Сформулировать теорему о необходимых условиях дифференцируемости ФНП

Если функция $z = f\left(\text{x}, y\right)$ дифференцируема в точке M(x,y) то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные

4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 yz + 2x^2 z - 3xyz + 2 = 0$ в точке $(1;0;-1)$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка:

$F\left(x, y, z\right) = x^2 yz + 2x^2 z - 3xyz + 2$

$F'x = 2xyz + 4xz - 3yz \qquad F'x\big|_M = 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \cdot (-1) = -4$

$F'y = x^2 z - 3xz \qquad F'y\big|_M = 1^2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot (-1) = 2$

$F'z = x^2 y + 2x^2 - 3xy \qquad F'z\big|_M = 1^2 \cdot 0 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 0 = 2$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)} \cdot (x - x_0) + F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)} \cdot (y - y_0) + F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)} \cdot (z - z_0) = 0$$

$$-4 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 0) + 2 \cdot (z + 1) = 0$$

$$-4x + 4 + 2y + 2z + 2 = 0$$

$$-4x + 2y + 2z + 6 = 0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}} = \frac{y - y_0}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}} = \frac{z - z_0}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-0}{2} = \frac{z+1}{2}$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 - 12xy + 17y^2 - 2y$

Решение:

Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^2 - 12xy + 17y^2 - 2y\right)'_x = 4x - 12y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^2 - 12xy + 17y^2 - 2y\right)'_y = -12x + 34y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 12y = 0 \\ -12x + 34y - 2 = 0 \end{cases}$$

Решим данную систему

$$\begin{cases} 4x - 12y = 0 \\ -12x + 34y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -6x + 17y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 18y = 0 \\ -6x + 17y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$-y - 1 = 0$$

$$y = -1$$

$$x = 3y = 3 \cdot (-1) = -3$$

Следовательно, одна точка $M(-3;-1)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 34$$

Для точки $M(-3;-1)$

$AC - B^2 = 4 \cdot 34 - (-12)^2 = 136 - 144 < 0$ не является точкой экстремума

6. Исследовать на экстремум функцию $z = 4 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}$ при условии $xy = -2$

БИЛЕТ 7

1. Дать определение (полного) первого дифференциала ФНП.

Главная часть приращение функции $z = f(x;y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается символом dz:

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y.$$

Выражения $A \cdot \Delta x$ и $B \cdot \Delta y$ называют *частными дифференциалами*. Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому равенство можно переписать в виде

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy.$$

2. Записать формулы для вычисления частных производных неявной функции $z(x,y)$, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$

Если функция $F(x,y,z)$ дифференцируема по переменным *x,y,z* в некоторой пространственной области D и $F'_z(x,y,z) \neq 0$, то уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет однозначную неявную функцию $z(x,y)$, также дифференцируемую

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

3. Сформулировать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП

Теорема (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x;y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^4 + 2x^2 y - xy + x$ в точке $(1;0;2)$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка:

$F(x,y,z)=x^4+2x^2y-xy+x-z$

$F'x=4x^3+4xy-x+1 \qquad F'x\big|_M=4\cdot1^3+4\cdot1\cdot0-1+1=4$

$F'y=2x^2-x \qquad F'y\big|_M=2\cdot1^2-1=1$

$F'z=-1 \qquad F'z\big|_M=-1$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(x-x_0)+F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(y-y_0)+F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(z-z_0)=0$$

$$4\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)-1\cdot(z-2)=0$$

$$4x-4+y-z+2=0$$

$$4x+y-z-2=0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y},\ x,y>0$

Решение:

Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}\right)'_x=y-\dfrac{50}{x^2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}\right)'_y=x-\dfrac{20}{y^2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y-\dfrac{50}{x^2}=0\\[2ex]x-\dfrac{20}{y^2}=0\end{cases}$$

Решим данную систему

$$\begin{cases}y-\dfrac{50}{x^2}=0\\[2ex]x-\dfrac{20}{y^2}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} y-\dfrac{50}{x^2}=0 \\ x-\dfrac{20}{y^2}=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{50}{x^2} \quad x,y\neq 0$$

$$x-\frac{20}{\left(\dfrac{50}{x^2}\right)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x-\frac{20x^4}{2500}=0$$

$$x\left(1-\frac{20x^3}{2500}\right)=0$$

$x_1=0$ *не удов*

$$1-\frac{20x^3}{2500}=0 \quad \Rightarrow \quad x^3=125 \quad \Rightarrow x_2=5$$

$$y=\frac{50}{5^2}=\frac{50}{25}=2$$

Следовательно, одна точка $M(5;2)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{100}{x^3};\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{40}{y^3}$$

Для точки $M(5;2)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{100}{5^3}=\frac{100}{125}=\frac{4}{5}=0{,}8;\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{40}{2^3}=\frac{40}{8}=5$$

$AC-B^2=0{,}8\cdot 5-1^2=4-1=3>0$ и $A>0$ является точкой минимума

6. Исследовать на экстремум функцию $z=2y-x^2$ при условии $y^2=2x-1$

БИЛЕТ 8

1. Дать определение второго дифференциала ФНП и матрицы Гессе.

Пусть функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. *Дифференциал второго порядка* определяется по формуле $d^2z = d(dz)$. Найдем его:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x \cdot dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y \cdot dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right) \cdot dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right) \cdot dy.$$

Отсюда: $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$

Второй дифференциал является квадратичной формой от переменных $dx_1, \dots, dx_n$. Как известно из курса алгебры, квадратичной форме сопоставляется матрица квадратичной формы, в рассматриваемом случае имеющая вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

где все производные вычислены в рассматриваемой точке и называемая иногда *матрицей Гессе*.

2. Записать формулу для вычисления производной ФНП по направлению.

Для функции двух переменных $\left.\frac{\partial z}{\partial a}\right| = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot \cos\beta$

Для функции трех переменных $\left.\frac{\partial u}{\partial a}\right| = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A \cdot \cos\gamma$

3. Сформулировать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП

Теорема (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x;y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^4 - 4y^3z + 4xyz^2 - 4xz^3 + 1 = 0$ в точке $(1;1;1)$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка:

$F(x,y,z) = 3x^4 - 4y^3z + 4xyz^2 - 4xz^3 + 1$

$F'x = 12x^3 + 4yz^2 - 4z^3 \qquad F'x\big|_M = 12\cdot 1^3 + 4\cdot 1\cdot 1^2 - 4\cdot 1^3 = 12$

$F'y = -12y^2z + 4xz^2 \qquad F'y\big|_M = -12\cdot 1^2\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot 1^2 = -8$

$F'z = -4y^3 + 8xyz - 12xz^2 \qquad F'z\big|_M = -4\cdot 1^3 + 8\cdot 1\cdot 1\cdot 1 - 12\cdot 1\cdot 1^2 = -8$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(x-x_0) + F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(y-y_0) + F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(z-z_0) = 0$$

$$12\cdot(x-1) - 8\cdot(y-1) - 8\cdot(z-1) = 0$$

$$12x - 12 - 8y + 8 - 8z + 8 = 0$$

$$12x - 8y - 8z + 4 = 0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}} = \frac{y-y_0}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}} = \frac{z-z_0}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

$$\frac{x-1}{12} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-8}$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

Решение:

Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y\right)'_x = 2x + y - 3 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y\right)'_y = x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

Решим данную систему

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -4x - 2y = -6 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$-3x = 0$$

$$x = 0$$

$$y = 3$$

Следовательно, одна точка $M(0;3)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

и $A > 0$ точка $M(0;3)$ является точкой минимума

6. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2$ при условии $2x^2 + y^2 = 4$

Билет 9

1. Дать определение градиента ФНП и производной ФНП по направлению

Градиентом функции $z=f(x,y)$ называется вектор
$$grad(z)=\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}.$$
Иначе, этот вектор может быть записан следующим образом:
$$grad(z)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right\}$$

Производная по направлению.

Пусть задана функция двух переменных $z=f(x,y)$ и произвольный вектор

$\bar{S}=\{a;b\}$ Рассмотрим приращение этой функции, взятое вдоль данного вектора $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ т.е. вектор $\{\Delta x,\Delta y\}$ коллинеарный по отношению к вектору $\bar{S}$. Длина приращения аргумента $\Delta l=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

Производной по некоторому направлению называется предел отношения приращения функции вдоль данного направления на длину приращения аргумента, когда длина приращения аргумента стремиться к 0.

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta l}$$

2. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $(x_0;y_0;z_0)$

Уравнение касательной плоскости:
$$F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(x-x_0)+F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(y-y_0)+F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(z-z_0)=0$$
Уравнение нормали:
$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

3. Сформулировать теорему о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования

Теорема **(Шварц).** Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой. В частности, для $z = f(x;y)$ имеем: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$ в точке $(1;2;3)$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка:

$F(x,y,z)=x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16$

$F'x=2x+y-2z \qquad F'x\big|_M=2\cdot1+2-2\cdot3=-2$

$F'y=4y+x+z \qquad F'y\big|_M=4\cdot2+1+3=12$

$F'z=-6z+y-2x \qquad F'z\big|_M=-6\cdot3+2-2\cdot1=-18$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(x-x_0)+F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(y-y_0)+F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(z-z_0)=0$$

$$-2\cdot(x-1)+12\cdot(y-2)-18\cdot(z-3)=0$$

$$-2x+2+12y-24-18z+54=0$$

$$-2x+12y-18z+32=0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-3}{-18}$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+3y^2-2x^2-4y$

Решение:

Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3+3y^2-2x^2-4y\right)'_x=3x^2-4x=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3+3y^2-2x^2-4y\right)'_y=6y-4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x^2-4x=0\\ 6y-4=0\end{cases}$$

Решим данную систему

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x = 0 \\ 6y - 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}$$

$$3x^2 - 4x = 0$$

$$(3x-4)\,x = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{4}{3}$$

Следовательно, две точки $M_1\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $M_2\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 4; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$$

Для точки $M_1\left(0;\frac{1}{3}\right)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \cdot 0 - 4 = -4; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$$

$AC - B^2 = -4 \cdot 6 - 0^2 = -24 < 0$ экстремума нет

Для точки $M_2\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \cdot \frac{4}{3} - 4 = 4; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$$

$AC - B^2 = 4 \cdot 6 - 0^2 = 24 > 0$ и $A > 0$ следовательно, $M_2\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ точка минимума

6. Исследовать на экстремум функцию $z = x + 2y$ при условии $x^2 + 3y^2 = 21$

БИЛЕТ 10

1. Дать определение (обычного) экстремума (локального максимума и минимума) ФНП

Функция $z=f(x,y)$ имеет **максимум** в точке $M_0(x_0,y_0)$ (т. е. при $x=x_0$ и $y=y_0$), если $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ для всех точек (x,y), достаточно близких к точке (x_0,y_0) и отличных от нее.

Функция $z=f(x,y)$ имеет минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$ (т. е. при $x=x_0$ и $y=y_0$), если $f(x_0,y_0)<f(x,y)$ для всех точек (x,y), достаточно близких к точке (x_0,y_0) и отличных от нее.

Максимум и минимум функции называются экстремумами функции, т. е. говорят, что функция имеет экстремум в данной точке, если эта функция имеет максимум или минимум в данной точке.

2. Перечислить основные свойства градиента ФНП

Свойства градиента:

- Градиент направлен по нормали к поверхности z=*f*(x; y) в точке M_0.
- Градиент направлен в сторону наибольшего возрастания функции и равен по величине мгновенной скорости возрастания функции (то есть производной по этому направлению).
- Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору $\overline{grad z}$, равна нулю.

3. Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях того, чтобы выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ было полным дифференциалом

Для того, чтобы выражение P(x,y)dx+Q(x,y)dy было полным дифференциалом некоторой функции u=u(x,y), необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ для всех x,y при условии, что $P(x,y)$; $Q(x,y)$; $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$; $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в некоторой ограниченной области.

4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\left(z^2-x^2\right)xyz-y^5=5$ в точке $(1;1;2)$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка:

$F\left(x,y,z\right)=\left(z^2-x^2\right)xyz-y^5-5$ или $F\left(x,y,z\right)=xyz^3+x^3yz-y^5-5$

$F'x=yz^3+3x^2yz \qquad F'x\big|_M=1\cdot 2^3+3\cdot 1^2\cdot 1\cdot 2=8+6=14$

$F'y=xz^3+x^3z-5y^4 \qquad F'y\big|_M=1\cdot 2^3+1^3\cdot 2-5\cdot 1^4=5$

$F'z=3xyz^2+x^3y \qquad F'z\big|_M=3\cdot 1\cdot 1\cdot 2^2+1^3\cdot 1=25$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot\left(x-x_0\right)+F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot\left(y-y_0\right)+F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot\left(z-z_0\right)=0$$

$$14\left(x-1\right)+5\cdot\left(y-1\right)+25\cdot\left(z-2\right)=0$$

$$14x-14+5y-5+25z-50=0$$

$$14x+5y+25z-69=0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

$$\frac{x-1}{14}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-2}{25}$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+8y^3-6xy+1$

Решение:

Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3+8y^3-6xy+1\right)'_x=3x^2-6y=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3+8y^3-6xy+1\right)'_y=24y^2-6x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-6y=0\\ 24y^2-6x=0\end{cases}$$

Решим данную систему

$$\begin{cases}3x^2-6y=0\\ 24y^2-6x=0\end{cases}\Rightarrow\qquad y=\frac{x^2}{2}$$

$$24\left(\frac{x^2}{2}\right)^2-6x=0$$

$$6x^4-6x=0$$

$$6x\left(x^3-1\right)=0$$

$x_1=0 \qquad x^3-1=0$

$\qquad\qquad x_2=1$

$y_1=\dfrac{0^2}{2}=0 \qquad y_2=\dfrac{1^2}{2}=0{,}5$

Следовательно, две точки $M_1(0;0)$, $M_2(1;0,5)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x;\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=48y$$

Для точки $M_1(0;0)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6\cdot 0=0;\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=48\cdot 0=0$$

$AC-B^2=0\cdot 0-(-6)^2=-36<0$ не является точкой экстремума

Для точки $M_2(1;0,5)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6\cdot 1=6;\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=48\cdot 0,5=24$$

$AC-B^2=6\cdot 24-(-6)^2=144-36=108>0$

и $A>0$ точка $M_2(1;0,5)$ является точкой минимума

6. Исследовать на экстремум функцию $z=e^{x-y}$ при условии $x^2+y^2=2$

БИЛЕТ 11

1. Дать определение условного экстремума ФНП

Определение. Говорят, что в точке $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на кривой L, функция $f(x, y)$ имеет *условный максимум (минимум)*, если неравенство

$$f(x, y) < f(x_0, y_0)$$

(соответственно

$$f(x, y) > f(x_0, y_0)\ )$$

выполняется во всех точках $M(x, y)$ кривой L, принадлежащих некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и отличных от точки M_0

Если кривая L задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$, то задача о нахождении условного экстремума функции $z = f(x, y)$ на кривой L может быть сформулирована так: найти экстремумы функции $z = f(x, y)$ в области D при условии, что $\varphi(x, y) = 0$.

Таким образом, при нахождении условных экстремумов функции $z = f(x, y)$ аргументы x и y уже нельзя рассматривать как независимые переменные: они связаны между собой соотношением $\varphi(x, y) = 0$, которое называют *уравнением связи*.

2. Записать формулы для вычисления частных производных сложной функции вида $z = f\left(u(x,y), v(x,y)\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

3. Сформулировать теорему о неявной функции

теорема существования неявной функции двух переменных: если функция $F(x; y; z)$ и ее производные $F'_x(x; y; z)$, $F'_y(x; y; z)$, $F'_z(x; y; z)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, причем $F(x_0; y_0; z_0) = 0$, а $F'_z(x_0; y_0; z_0) \neq 0$, то существует окрестность точки M_0, в которой уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

определяет единственную функцию $z = f(x; y)$, непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки $(x_0; y_0)$ и такую, что $f(x_0; y_0) = z_0$.

4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\sqrt{x + y - z} = e^{x-2y+z}$ в точке $(2;3;4)$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка:

$$F\left(x,y,z\right)=\sqrt{x+y-z}-e^{x-2y+z}$$

$$F'x=\frac{1}{2\sqrt{x+y-z}}-e^{x-2y+z} \qquad F'x\big|_M=\frac{1}{2\sqrt{2+3-4}}-e^{2-2\cdot3+4}=0,5-1=-0,5$$

$$F'y=\frac{1}{2\sqrt{x+y-z}}+2e^{x-2y+z} \qquad F'y\big|_M=\frac{1}{2\sqrt{2+3-4}}+2e^{2-2\cdot3+4}=0,5+2=2,5$$

$$F'z=\frac{-1}{2\sqrt{x+y-z}}-e^{x-2y+z} \qquad F'z\big|_M=\frac{-1}{2\sqrt{2+3-4}}-e^{2-2\cdot3+4}=-0,5-1=-1,5$$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot\left(x-x_0\right)+F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot\left(y-y_0\right)+F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot\left(z-z_0\right)=0$$

$$-0,5\cdot\left(x-2\right)+2,5\cdot\left(y-3\right)-1,5\cdot\left(z-4\right)=0$$

$$-0,5x-1+2,5y-7,5-1,5z+6=0$$

$$-0,5x+2,5y-1,5z-2,5=0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

$$\frac{x-2}{-0,5}=\frac{y-3}{2,5}=\frac{z-4}{-1,5}$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-15xy$

Решение:

Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3+y^3-15xy\right)'_x=3x^2-15y=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3+y^3-15xy\right)'_y=3y^2-15x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-15y=0\\3y^2-15x=0\end{cases}$$

Решим данную систему

$$\begin{cases}3x^2-15y=0\\3y^2-15x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-5y=0\\y^2-5x=0\end{cases}\Rightarrow y=\frac{x^2}{5}$$

$$\left(\frac{x^2}{5}\right)^2-5x=0$$

$$\frac{x^4}{25}-5x=0$$

$$x\left(\frac{x^3}{25}-5\right)=0$$

$$x_1=0 \qquad y_1=\frac{0^2}{5}=0$$

$$\frac{x^3}{25}-5=0 \qquad \Rightarrow \qquad x^3=125 \quad \Rightarrow \quad x_2=5 \ \Rightarrow y_2=\frac{5^2}{5}=5$$

Следовательно, две точки $M_1(0;0)$, $M_2(5;5)$

Находим частные производные второго порядка

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x; \quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-15; \quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$$

Для точки $M_1(0;0)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6\cdot 0=0; \quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-15; \quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6\cdot 0=0$$

$AC-B^2=0\cdot 0-(-15)^2=-225<0$ экстремума нет

Для точки $M_2(5;5)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6\cdot 5=30; \quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-15; \quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6\cdot 5=30$$

$AC-B^2=30\cdot 30-(-15)^2=900-225=675>0$

и $A>0$ точка $M_2(5;5)$ является точкой минимума

6. Исследовать на экстремум функцию $z=\dfrac{x^2}{4}+y^2$ при условии $xy=2$

БИЛЕТ 12

1. Дать определение функции Лагранжа и множителей Лагранжа задачи на условный экстремум ФНП.

Допустим, мы имеем функцию n переменных $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и m уравнений связи ($n > m$):

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0;\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Обозначив множители Лагранжа как $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, составим функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m$$

Необходимые условия наличия условного экстремума задаются системой уравнений, из которой находятся координаты стационарных точек и значения множителей Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0; (i = \overline{1,n}) \\ \varphi_j = 0; (j = \overline{1,m}) \end{cases}$$

2. Записать формулы для вычисления производной сложной функции вида $u = f\left(x(t), y(t), z(t)\right)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

3. Сформулировать теорему Тейлора для функции двух переменных

Пусть $z = f(x; y)$ — функция, непрерывная вместе со всеми частными производными до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$. Тогда для любой точки $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ этой окрестности имеет место равенство

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = f(x_0; y_0) + df(x_0; y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0; y_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0; y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x; y_0 + \theta\Delta y),\ \ 0 < \theta < 1,$$

которая называется ***формулой Тейлора***, а первые $(n+1)$ слагаемых в правой части — ***многочленом Тейлора степени*** n. При $(x_0; y_0) = (0; 0)$ имеем формулу и многочлен Маклорена.

4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ в точке $(2;2;1)$

Решение:

Найдем частные производные первого порядка:

$$F(x,y,z)=2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}-8$$

$$F'_x=\frac{2^{\frac{x}{z}}\ln 2}{z} \qquad F'_x\big|_M=\frac{2^{\frac{2}{1}}\ln 2}{1}=4\ln 2$$

$$F'_y=\frac{2^{\frac{y}{z}}\ln 2}{z} \qquad F'_y\big|_M=\frac{2^{\frac{2}{1}}\ln 2}{1}=4\ln 2$$

$$F'_z=2^{\frac{x}{z}}\ln 2\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)+2^{\frac{y}{z}}\ln 2\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)$$

$$F'_z\big|_M=2^{\frac{2}{1}}\ln 2\cdot\left(-\frac{2}{1^2}\right)+2^{\frac{2}{1}}\ln 2\cdot\left(-\frac{2}{1^2}\right)=-16\ln 2$$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(x-x_0)+F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(y-y_0)+F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}\cdot(z-z_0)=0$$

$$4\ln 2\cdot(x-2)+4\ln 2\cdot(y-2)-16\ln 2\cdot(z-1)=0$$

$$(x-2)+(y-2)-4\cdot(z-1)=0$$

$$x+y-4z=0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_{(x_0;y_0;z_0)}}$$

$$\frac{x-2}{4\ln 2}=\frac{y-2}{4\ln 2}=\frac{z-1}{-16\ln 2}$$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z=2x^3+y^3-6xy$

Решение:

Найдем частные производные и воспользуемся необходимым условием существования экстремума

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(2x^3+y^3-6xy\right)'_x=6x^2-6y=0\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(2x^3+y^3-6xy\right)'_y=3y^2-6x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x^2-6y=0\\3y^2-6x=0\end{cases}$$

Решим данную систему

$$\begin{cases}6x^2-6y=0\\3y^2-6x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-y=0\\y^2-2x=0\end{cases}\Rightarrow\quad y=x^2$$

$$\left(x^2\right)^2-2x=0$$

$x^4 - 2x = 0$

$x\left(x^3 - 2\right) = 0$

$x_1 = 0 \qquad y_1 = 0^2 = 0$

$x^3 - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \sqrt[3]{2} \ \Rightarrow y_2 = \sqrt[3]{4}$

Следовательно, две точки $M_1(0;0)$, $M_2\left(\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}\right)$

Находим частные производные второго порядка

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$

Для точки $M_1(0;0)$

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12 \cdot 0 = 0; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \cdot 0 = 0$

$AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0$ экстремума нет

Для точки $M_2\left(\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}\right)$

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12 \cdot \sqrt[3]{2}; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \cdot \sqrt[3]{4}$

$AC - B^2 = 12\sqrt[3]{2} \cdot 6\sqrt[3]{4} - (-6)^2 = 144 - 36 = 108 > 0$

и $A > 0$ точка $M_2\left(\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}\right)$ является точкой минимума

6. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - 5$ при условии $xy = 1$