РК 2 Линейная алгебра и функции нескольких переменных

Оглавление

Введение

Здесь разобрана теория к РК 1 по линейной алгебре. Основной источник информации - http://fn.bmstu.ru/educational-work-fs-12/70-lections/240-lin-al-fmp , конспекты лекций, интернет.

Теория

1. Сформулировать определение дифференциала n-го порядка скалярной функции нескольких переменных (скалярной ФНП или СФНП). Выписать дифференциал второго порядка и матрицу Гесса для скалярной функции двух переменных.+++

Дифференциал k-го порядка

Дифференциал n-го порядка — это дифференциал 1-го порядка от дифференциала (n-1)-го порядка функции f:

$$d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x))$$

Дифференциал второго порядка для функции двух переменных

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y$$

Матрица Гессе

Если для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке x существуют все частные производные второго порядка, то из них можно составить квадратную матрицу порядка n

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f_m(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_m(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f_m(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

которую называют ***матрицей Гессе***.

Тогда для 2-го порядка

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

2. Сформулировать определение условного экстремума скалярной ФНП. Сформулировать и доказать теорему о необходимом условии существования условного экстремума функции 2-х переменных f(x, y) при условии связи φ(x, y)=0.+++

Условный экстремум

Определение 14.1. Говорят, что функция $f(x)$, определенная в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, достигает в этой точке ***условного локального максимума*** (***минимума***) при условиях $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$, $\ldots$, $\varphi_m(x) = 0$, где $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, — некоторые функции нескольких переменных, определенные в окрестности точки a, если существует такая *проколотая окрестность* $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$ *точки* a, что для всех точек $x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\delta)$, удовлетворяющих условиям $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, верно неравенство

$$f(x) \leqslant f(a) \quad (f(x) \geqslant f(a)). \tag{14.2}$$

Понятия условного локального максимума и минимума объединяют под общим названием ***условный экстремум функции***. Если в определении 14.1 неравенства строгие, то говорят о ***строгом условном экстремуме функции***.

Теорема о необходимом условии

Теорема 14.1 (***необходимое условие условного экстремума***). Пусть *функции* двух переменных $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ определены и *непрерывно дифференцируемы* в *окрестности точки* $P(a;b)$. Если функция $f(x,y)$ имеет в точке P *условный экстремум* при условии $\varphi(x,y) = 0$, причем $\operatorname{grad}\varphi(a,b) \neq 0$, то существует такое число λ, которое вместе с координатами a и b точки P удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases} \tag{14.5}$$

Доказательство

◄ Поскольку $\operatorname{grad}\varphi(a,b) \neq 0$, то одна из *частных производных первого порядка* функции $\varphi(x,y)$ в точке P отлична от нуля. Пусть, например, $\varphi'_y(a,b) \neq 0$. По *теореме 11.1 о неявной функции* в некотором прямоугольнике

$$U = \{(x,\ y)\colon |x-a| < \delta_1,\ \ |y-b| < \delta_2\}$$

с центром в точке $(a;b)$ уравнение $\varphi(x,y) = 0$ разрешимо относительно переменного y, т.е. задает *неявную функцию* $y = h(x)$, непрерывно дифференцируемую в окрестности точки a, причем

$$h'(x) = -\left.\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right|_{y=h(x)}. \tag{14.6}$$

В прямоугольнике U точки, удовлетворяющие условию $\varphi(x,y)=0$, имеют вид $(x;h(x))$, где $x \in (a-\delta_1,\, a+\delta_1)$. Значит, если функция $f(x,y)$ имеет в точке P условный экстремум при условии $\varphi(x,y)=0$, то функция $g(x)=f(x,h(x))$ одного переменного имеет в точке a *локальный экстремум*. Эта функция, как *композиция* дифференцируемых *функций*, является дифференцируемой в точке a. Следовательно, в силу необходимого условия локального экстремума верно соотношение $g'(a)=0$. Согласно *правилу дифференцирования сложной функции* и равенству (14.6), находим

$$g'(a)=f'_x(a,b)+f'_y(a,b)h'(a)=f'_x(a,b)-f'_y(a,b)\frac{\varphi'_x(a,b)}{\varphi'_y(a,b)}=f'_x(a,b)-\frac{f'_y(a,b)}{\varphi'_y(a,b)}\,\varphi'_x(a,b)=0.$$

Введем обозначение $\lambda=-f'_y(a,b)/\varphi'_y(a,b)$. Тогда

$$\begin{cases} f'_x(a,b)+\lambda\varphi'_x(a,b)=0,\\ f'_y(a,b)+\lambda\varphi'_y(a,b)=0, \end{cases}$$

где первое из этих уравнений вытекает из условия $g'(a)=0$, а второе эквивалентно равенству, определяющему число λ. Добавив к этим уравнениям равенство $\varphi(a,b)=0$, которое должно выполняться в точке условного локального экстремума, получим систему уравнений (14.5).

Доказательство теоремы в случае, когда $\varphi'_x(a,b)\neq 0$, проводится аналогично. ▶

3. Сформулировать определения: скалярной функции нескольких переменных (СФНП), линии и поверхности уровня СФНП, предела и непрерывности СФНП в точке.+++

Функция нескольких переменных (ФНП)

Отображение, которое упорядоченному набору из n чисел ставит в соответствие число, т.е. отображение вида $f\colon A \to \mathbb{R}$, где $A \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, называют ***функцией нескольких переменных***.

Поверхность уровня и линия уровня

Пусть задана функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Множество $\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) = c\}$, где $c \in \mathbb{R}$ фиксированное, называют ***поверхностью уровня***, соответствующей значению c.

Отдавая дань традиции, мы будем называть множество $f^{-1}(c)$ ***линией уровня*** при $n = 2$ и поверхностью уровня во всех остальных случаях.

Предел ФНП

Определение 8.9. Пусть заданы функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, множество $A \subset D(f)$, включенное в область определения $D(f)$ функции f, и предельная точка a множества A. Точку $b \in \mathbb{R}$ называют ***пределом функции f в точке a по множеству*** A, если для любой ε-окрестности $\mathrm{U}(b, \varepsilon)$ точки b существует такая проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta)$ точки a, что $f(x) \in \mathrm{U}(b, \varepsilon)$ при $x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta) \cap A$, т.е.

$$\forall\, \mathrm{U}(b, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \;\; \exists\, \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta) \subset \mathbb{R}^n \;\; \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a, \delta) \cap A: \;\; f(x) \in \mathrm{U}(b, \varepsilon). \qquad (8.2)$$

В этом случае записывают $b = \lim\limits_{x \underset{A}{\to} a} f(x)$, или $f(x) \to b$ при $x \underset{A}{\to} a$ (запись $x \underset{A}{\to} a$ читают так: «x стремится к a по множеству A»).

Непрерывная в точке

Определение 8.11. Функцию нескольких переменных $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называют ***непрерывной в точке*** $a \in A$, предельной для множества A, если существует предел функции f при $x \underset{A}{\to} a$, равный значению функции в этой точке, т.е. если

$$\lim_{x \underset{A}{\to} a} f(x) = f(a). \qquad (8.5)$$

4. Сформулировать и доказать теорему о производной сложной (скалярной) ФНП.+++

Формулировка

Если функция нескольких переменных y=f(x): En->Em дифференцируема в (.), а функция z=g(y): Em->Ek дифференцируема в точке f(x), то сложная функция z=g(f): En->Ek дифференцируема в точке x.

Доказательство

Пусть функция y=f(x); z=g(y). Тогда по условию теоремы эти функции являются дифференцируемыми и, следовательно, по определеию дифференцируемости функции их полные приращения будут иметь следующий вид: Δy=f'(x)Δx+α|Δx|, где α->0 при Δx->0. Δz=g'(y)Δy+β|Δy|, где β->0, при Δy->0. Тогда в Δz выражение для Δ: получаем Δz=y'(y)*(f'(x)*Δx+α|x|)+β|f'(x)Δx+α|x||=g'(y)f'(x) Δx+j (*), где j=y'(y|α|Δx|+ β|f'(x)Δx+α|x||.

j->0 при Δx->0

Тогда (*) есть определение дифференцируемости функции z=g(f(x)).

5. Сформулировать теорему о формуле Тейлора для скалярной ФНП. Формула Маклорена.+++

Тейлор и Маклорен

Теорема 10.2 (*теорема Тейлора*). Пусть функция нескольких переменных f определена в некоторой *окрестности* U *точки* $a \in \mathbb{R}^n$, причем $f \in C^{m+1}(U)$. Если отрезок, соединяющий точки $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $a + \Delta x = (a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n)$, содержится в U, то для функции $f(x)$ имеет место ***формула Тейлора***

$$f(a + \Delta x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{d^k f(a)}{k!} + \frac{d^{m+1} f(a + \vartheta \Delta x)}{(m+1)!}, \tag{10.15}$$

где $\vartheta \in (0, 1)$ — некоторое число, а $d^0 f(a) = f(a)$ по определению.

Как и в случае функций одного переменного, при $a = 0$ формулу Тейлора (10.15) часто называют ***формулой Маклорена***. Число m, определяющее количество слагаемых в формуле

Тейлора, называют ***порядком формулы Тейлора***. Последнее слагаемое в формуле Тейлора (10.15) называют ***остаточным членом в форме Лагранжа***. Остаточный член можно также записать в виде

$$o(|\Delta x|^m) \tag{10.17}$$

(читается: «о малое от $|\Delta x|^m$»), и тогда его называют ***остаточным членом в форме Пеано***. Таким образом, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеет вид

$$f(x + \Delta x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{d^k f(x)}{k!} + o(|\Delta x|^m). \tag{10.18}$$

6. Сформулировать определение локального экстремума скалярной ФНП. Сформулировать и доказать теорему о необходимом условии существования локального экстремума.+++

Экстремум

Определение 13.1. Говорят, что *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенная в некоторой *окрестности точки* $a \in \mathbb{R}^n$, имеет в этой точке ***локальный максимум*** (***минимум***), если существует такая *проколотая окрестность* $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\varepsilon)$ точки a, что для любой точки $x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\varepsilon)$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(a)$, $(f(x) \geqslant f(a))$. Понятия локального минимума и локального максимума функции объединяют под общим названием ***экстремум функции***.

Если неравенства в определении 13.1 являются строгими, то говорят о ***строгом экстремуме функции***.

Теорема о необходимом условии

Теорема 13.1 (***необходимое условие экстремума функции***). Пусть функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в точке $a \in \mathbb{R}^n$ экстремум. Если функция $f(x)$ $(x = (x_1, \ldots, x_n))$ имеет в точке a *частную производную первого порядка* по переменному x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то эта частная производная равна нулю: $f'_{x_i}(a) = 0$.

Доказательство

◄ Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Рассмотрим действительную функцию

$$g(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

одного действительного переменного t, которая получается, если у функции $f(x)$ зафиксированы все переменные, кроме i-го, равного t. Функция $g(t)$ в точке $t = a_i$ имеет *локальный экстремум*. В самом деле, пусть, например, $f(x)$ имеет в точке a локальный максимум. Тогда существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon 0 < |x - a| < \varepsilon\}$ точки a, что $f(x) \leqslant f(a)$ при $x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\varepsilon)$. Но в таком случае $g(t) \leqslant g(a_i)$ при $0 < |t - a_i| < \varepsilon$, что соответствует определению локального максимума функции одного переменного.

Функция $g(t)$ дифференцируема в точке $t = a_i$, так как функция $f(x)$ имеет в точке a частную производную по переменному x_i. При этом $g'(a_i) = f'_{x_i}(a)$. Согласно необходимому условию локального экстремума для функции действительного переменного, выполнено равенство $g'(a_i) = 0$. Следовательно, $f'_{x_i}(a) = 0$. ►

7. Сформулировать определение локального экстремума скалярной ФНП. Сформулировать достаточное условие существования строгого локального экстремума для скалярной ФНП.+++

Экстремум

Определение 13.1. Говорят, что *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенная в некоторой *окрестности точки* $a \in \mathbb{R}^n$, имеет в этой точке ***локальный максимум*** (***минимум***), если существует такая *проколотая окрестность* $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\varepsilon)$ точки a, что для любой точки $x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\varepsilon)$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(a)$, $(f(x) \geqslant f(a))$. Понятия локального минимума и локального максимума функции объединяют под общим названием ***экстремум функции***.

Если неравенства в определении 13.1 являются строгими, то говорят о ***строгом экстремуме функции***.

Достаточные условия

Теорема 13.2 (***достаточное условие экстремума функции***)**.** Пусть функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в *окрестности* $U(a)$ *точки* a, дважды *непрерывно дифференцируема* в $U(a)$ и $df(a) = 0$. Тогда:

1) если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a положительно определенная, то в этой точке функция $f(x)$ имеет *строгий локальный минимум*;

2) если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a отрицательно определенная, то в этой точке функция $f(x)$ имеет *строгий локальный максимум*;

3) если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a знакопеременная, то в этой точке функция $f(x)$ не имеет *экстремума*.

8. Сформулировать теорему о дифференцируемости сложной (скалярной) ФНП. Сформулировать и доказать свойство инвариантности формы первого дифференциала.+++

Формулировка теоремы о диффиренцируемости

Теорема 10.1. Если функции $g_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, дифференцируемы в точке $a \in \mathbb{R}$, а функция $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ дифференцируема в точке $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, где $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1, n}$, то в некоторой окрестности точки a определена сложная функция $F(t) = f\big(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\big)$, дифференцируемая в точке a, причем

$$\frac{dF(a)}{dt} = \frac{\partial f(b)}{\partial u_1}\frac{dg_1(a)}{dt} + \frac{\partial f(b)}{\partial u_2}\frac{dg_2(a)}{dt} + \dots + \frac{\partial f(b)}{\partial u_n}\frac{dg_n(a)}{dt}. \tag{10.4}$$

Инвариантность

Дифференциал функции нескольких переменных, как и функции одного действительного переменного, имеет свойство, которое называют ***инвариантностью формы записи дифференциала***. Фактически это свойство есть простая и удобная форма представления правила дифференцирования сложной функции.

Пусть функции $g_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, дифференцируемы в точке $a \in \mathbb{R}^m$, а функция $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, где $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1, n}$. Согласно следствию 10.1, сложная функция $F(x) = f\big(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)\big)$ дифференцируема в точке a, а ее дифференциал в точке a в соответствии с определением дифференциала и правилом дифференцирования сложной функции имеет вид

$$dF(a) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F(a)}{\partial x_j}dx_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(b)}{\partial u_i}\frac{dg_i(a)}{dx_j}dx_j = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(b)}{\partial u_i}\sum_{j=1}^{m}\frac{dg_i(a)}{dx_j}dx_j = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(b)}{\partial u_i}du_i.$$

где

$$du_i = \sum_{j=1}^{m}\frac{dg_i(a)}{dx_j}dx_j$$

дифференциал функции g_i в точка a. Таким образом,

$$dF(a) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(b)}{\partial u_i}du_i.$$

Мы видим, что дифференциал dz сложной функции $z = f\big(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)\big)$ выражается через дифференциалы $du_1, du_2, \dots, du_n$ промежуточных переменных так же, как и в случае, когда эти переменные являются независимыми. Другими словами, если $z = f(u)$, то $dz = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f(u)}{\partial u_i}du_i$ и эта формула не зависит от того, каковы переменные $du_1, du_2, \dots, du_n$, промежуточные или независимые. Это свойство дифференциала и называют инвариантностью его формы записи.

Следствие для ознакомления (встречается в доказательстве)

Следствие 10.1. Если функции $g_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $i = \overline{1, n}$, дифференцируемы в точке $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1, n}$, и функция $f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ дифференцируема в точке $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, то в некоторой окрестности точки a определена сложная функция $F(x) = f\big(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)\big)$, где $x = (x_1, x_2, x_m)$, эта функция дифференцируема в точке a, причем

$$\frac{\partial F(a)}{\partial x_k} = \frac{\partial f(b)}{\partial u_1}\frac{\partial g_1(a)}{\partial x_k} + \frac{\partial f(b)}{\partial u_2}\frac{\partial g_2(a)}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f(b)}{\partial u_n}\frac{\partial g_n(a)}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1, m}. \tag{10.8}$$

9. Сформулировать определение условного экстремума скалярной ФНП. Сформулировать необходимое и достаточное условие существования условного экстремума функции f(x_1, ..., x_n, y_1, ... , y_m) при m условиях связи φ_1(x_1, ... , x_n, y_1, ... , y_m)=0, ... , φ_1(x_1, ... , x_n, y_1, ... , y_m)=0, где m<n.+++

Условный экстремум

Определение 14.1. Говорят, что функция $f(x)$, определенная в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, достигает в этой точке ***условного локального максимума*** (***минимума***) при условиях $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$, ..., $\varphi_m(x) = 0$, где $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, — некоторые функции нескольких

переменных, определенные в окрестности точки a, если существует такая *проколотая окрестность* $\mathring{U}(a, \delta)$ *точки* a, что для всех точек $x \in \mathring{U}(a, \delta)$, удовлетворяющих условиям $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, верно неравенство

$$f(x) \leqslant f(a) \quad (f(x) \geqslant f(a)). \tag{14.2}$$

Понятия условного локального максимума и минимума объединяют под общим названием ***условный экстремум функции***. Если в определении 14.1 неравенства строгие, то говорят о ***строгом условном экстремуме функции***.

Необходимые условия

Теорема 14.2. Пусть функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $i = \overline{1, m}$, определены и непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, причем ранг матрицы $\left(\dfrac{\partial \varphi_i(a)}{\partial x_j}\right)$ частных производных фунций φ_i в точке a равен m. Если в точке a функция $f(x)$ имеет условный локальный экстремум при условиях $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, то существуют такие числа λ_1, λ_2, ..., λ_m, которые вместе с координатами точки a удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_n} = 0, \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_m} = 0. \end{cases} \tag{14.10}$$

Достаточные условия

Теорема 14.3. Пусть *функции* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, *дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $a \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(a) = 0$, $\operatorname{Rg}\left(\dfrac{\partial \varphi_i(a)}{\partial x_j}\right) = m$ и координаты точки a вместе с координатами некоторого вектора λ_a удовлетворяют системе уравнений (14.10). Тогда:

1) если квадратичная форма $d^2L(a)_H$ положительно определенная, то функция $f(x)$ имеет в точке a *строгий условный локальный минимум* при условии $\varphi(x) = 0$;

2) если квадратичная форма $d^2L(a)_H$ отрицательно определенная, то функция $f(x)$ имеет в точке a *строгий условный локальный максимум* при условии $\varphi(x) = 0$;

3) если квадратичная форма $d^2L(a)_H$ знакопеременная, то функция $f(x)$ в точке a не имеет условного экстремума. #

10. Сформулировать определения касательной плоскости и нормали к поверхности. Выписать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, в случаях, когда она задана уравнением z=f(x, y) и уравнением F(x, y, z)=0. Пояснить геометрический смысл дифференциала функции f(x, y).+++

Определения

Рассмотрим некоторую поверхность* S в пространстве. Пусть точка M принадлежит поверхности S и существует такая плоскость π, проходящая через точку M, которая содержит *касательные*, построенные в точке M ко всем кривым, лежащим на поверхности S и проходящим через точку M. Плоскость π называют ***касательной плоскостью*** к поверхности S в точке M (рис. 12.1). Прямую L, проходящую через точку M и перпендикулярную плоскости π, называют ***нормалью к поверхности*** S в точке M.

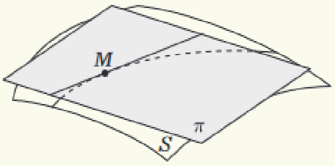

Рис. 12.1

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S в точке M на этой поверхности найдем в предположении, что в пространстве задана прямоугольная система координат $Oxyz$ и выполнены следующие четыре условия.

1°. Поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$.
2°. Известны координаты a, b, c точки $M \in S$.
3°. *Функция* $F(x, y, z)$ *дифференцируема* в точке M.
4°. *Градиент функции* $F(x, y, z)$ в точке M отличен от нуля, т.е. $\operatorname{grad} F(a, b, c) \neq 0$.

Для z=f(x, y) в точке M(a, b)

Касательная плоскость

$$f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) - (z - c) = 0. \qquad (12.5)$$

Нормаль

$$\frac{x - a}{f'_x(a, b)} = \frac{y - b}{f'_y(a, b)} = \frac{z - c}{-1}. \qquad (12.6)$$

Уравнения для F(x,y,z)=0

Зная координаты a, b, c точки M, через которую проходит плоскость π, и координаты нормального вектора $\operatorname{grad} F(a, b, c)$ этой плоскости, можем записать *общее уравнение плоскости* π:

$$F'_x(a, b, c)(x - a) + F'_y(a, b, c)(y - b) + F'_z(a, b, c)(z - c) = 0. \qquad (12.3)$$

Нормаль в точке M поверхности S определяется той же точкой M и тем же вектором $\operatorname{grad} F(a, b, c)$, который является *направляющим вектором* этой *прямой*. По этим данным можно записать уравнения нормали к поверхности S в точке M как *канонические уравнения прямой*:

$$\frac{x - a}{F'_x(a, b, c)} = \frac{y - b}{F'_y(a, b, c)} = \frac{z - c}{F'_z(a, b, c)}. \qquad (12.4)$$

Пояснение геометрического смысла дифференциала f(x, y)

Понятие касательной плоскости позволяет дать геометрическую интерпретацию *дифференциалу функции нескольких переменных.* Пусть функция $z = f(x, y)$ двух переменных дифференцируема в точке $(a,\ b)$. Тогда ее дифференциал dz в этой точке равен

$$dz = f'_x(a, b)\, dx + f'_y(a, b)\, dy. \tag{12.7}$$

В то же время уравнение $z = f(x, y)$, рассматриваемое в прямоугольной системе координат Oxyz, задает поверхность в пространстве, и эта поверхность в точке $(a; b; f(a, b))$ имеет *касательную плоскость*, уравнение (12.5) которой можно записать в виде

$$z - c = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Обозначив $x - a = \Delta x$, $y - b = \Delta y$, $z - c = \Delta z$, перепишем это уравнение в виде

$$\Delta z = f'_x(a, b)\, \Delta x + f'_y(a, b)\, \Delta y. \tag{12.8}$$

Сравнивая (12.7) и (12.8), заключаем, что дифференциал dz совпадает с Δz, так как приращения Δx и Δy независимых переменных x и y в точке $(a; b)$ в то же самое время являются дифференциалами этих переменных. Другими словами, дифференциал функции двух переменных есть приращение в точке M *аппликаты* точки на касательной плоскости, соответствующее приращениям dx, dy независимых переменных (рис. 12.2).

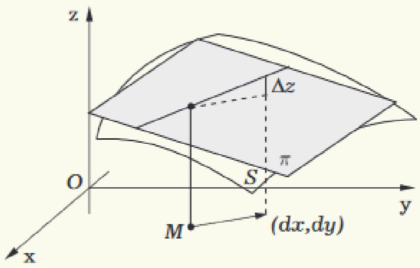

Рис. 12.2

11. Сформулировать определение: дифференцируемости векторной ФНП, матрицы Якоби, якобиана.+++

Дифференцируемость ВФНП

Определение 16.2. Функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определенную в некоторой окрестности точки x, называют ***дифференцируемой в точке*** x, если ее полное приращение в окрестности этой точки можно представить в виде

$$\Delta f(x) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)|\Delta x|, \tag{16.5}$$

где A — матрица типа $m \times n$, элементы которой не зависят от Δx, а функция $\alpha(\Delta x)$ является *бесконечно малой* при $\Delta x \to 0$.

Функцию f называют ***дифференцируемой в области*** $X \subset \mathbb{R}^n$, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

При $m = 1$ функция f скалярная, и в равенстве (16.5) матрица A является строкой длины n, т.е. $A = (a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n)$, а функция $\alpha(\Delta x)$ — это бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ скалярная функция. Поэтому в данном случае равенство (16.5) сводится к равенству (9.2).

Следующая теорема сводит исследование дифференцируемости *векторной функции* к скалярному случаю.

Матрица Якоби

Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$ имеет частные производные по всем независимым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то из этих производных (а точнее, из частных производных координатных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ векторной функции $f(x)$) можно составить матрицу $\left(\dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right)$ типа $m \times n$, где i соответствует номеру строки матрицы, а j — номеру столбца. Эту матрицу называют ***матрицей Якоби*** функции f в точке a и обозначают

$$f'(x) = \frac{\partial f(a)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{16.2}$$

Часто используют запись матрицы Якоби в виде блочной матрицы-строки

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{16.3}$$

или блочной матрицы-столбца

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x} \end{pmatrix}. \tag{16.4}$$

В последнем случае каждый блок представляет собой матрицу Якоби соответствующей координатной функции.

Якобиан

Поставим вопрос: при каких условиях система $F(x,y)=0$ разрешима относительно переменных $y=(y_1,\ y_2,\ \ \dots,\ y_m)$ в окрестности данной точки $(a,\ b)\in\mathbb{R}^{n+m}$? Через $F'_x(x,y)=\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ и $F'_y(x,y)=\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ будем обозначать соответственно матрицы Якоби функции F по части переменных x и по части переменных y, т.е.

$$F'_x(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m(x,y)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(x,y)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_m(x,y)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

и

$$F'_y(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m(x,y)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_m(x,y)}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_m(x,y)}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица $F'_y(x,y)$ является квадратной порядка m, а матрица Якоби $F'(x,y)$ по всей совокупности переменных может быть записана как блочная матрица $\big(F'_x(x,y)\ \ F'_y(x,y)\big)$. Отметим также, что определитель квадратной матрицы Якоби (по части переменных или по всем переменным — неважно) называют ***якобианом***.

12. Сформулировать теорему о существовании дифференцируемой неявно заданной ФНП. Вывести формулу вычисления частных производных неявно заданной функции.+++

Теорема о существовании и дифференцируемости (возможно только 1-ая теорема)

Теорема 11.1 (***теорема о неявной функции***). Пусть уравнение $f(x,y)=0$, $x,\ y\in\mathbb{R}$, удовлетворяет следующим трем условиям:

1) координаты точки $(a,\ b)$ удовлетворяют уравнению, т.е. $f(a,b)=0$;

2) *функция* $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности U точки $(a,\ b)$ и *непрерывно дифференцируема* в U, т.е. $f\in C^1(U)$;

3) *частная производная функции* $f(x,y)$ в точке $(a,\ b)$ по переменному y отлична от нуля, т.е. $f'_y(a,b)\neq 0$.

Тогда на плоскости существует прямоугольник P, определяемый неравенствами $|x-a|<\delta_x$, $|y-b|<\delta_y$, имеющий центр симметрии в точке $(a,\ b)$, такой, что в P уравнение $f(x,y)=0$ разрешимо относительно переменного y и тем самым задает функцию $y=\varphi(x)$, $x\in T=(a-\delta_x,\ a+\delta_x)$. При этом функция $y=\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на T, а ее производная может быть вычислена по формуле

$$\varphi'(x)=-\left.\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}\right|_{y=\varphi(x)}. \quad \# \tag{11.2}$$

Теорема 11.2. Пусть в *окрестности* V *точки* $(a,\ b)$, $a\in\mathbb{R}^n$, $b\in\mathbb{R}$, задана функция $f(x,y)$ от $n+1$ переменных ($x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}$), удовлетворяющая условиям:

а) $f(a,b)=0$;

б) *функция* $f(x,y)$ *непрерывно дифференцируема* в V;

в) $f'_y(a,b)\neq 0$.

Тогда точка $(a,\ b)$ имеет окрестность вида

$$\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^{n+1}\colon\ |x-a|<\delta_x,\ |y-b|<\delta_y\right\},$$

в которой уравнение $f(x,y)=0$ разрешимо относительно y, т.е. в окрестности $U(a,\delta_x)=\{x\in\mathbb{R}^n\colon\ |x-a|<\delta_x\}$ определена функция нескольких переменных $\varphi(x)$, удовлетворяющая тождеству $f\big(x,\varphi(x)\big)\equiv 0$. При этом функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема в $U(a,\delta_x)$, а ее частные производные в $U(a,\delta_x)$ могут быть вычислены по формулам

$$\varphi'_{x_k}(x_k)=-\left.\frac{f'_{x_k}(x,y)}{f'_y(x,y)}\right|_{y=\varphi(x)},\quad k=\overline{1,\ n}. \quad \# \tag{11.3}$$

Вывод формулы

Теоремы 11.1 и 11.3 не только дают формулы для вычисления производных неявных функций, но и дают достаточные условия дифференцируемости неявной функции. Покажем, что формулы дифференцирования неявной функции могут быть получены, если использовать предположение о дифференцируемости неявной функции и правило дифференцирования сложной функции. Пусть функция $\varphi(x)$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, определена неявно уравнением $f(x, y) = 0$. Тогда в области G имеем $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$. Считая, что функции $y = \varphi(x)$ и $z = f(x, y)$ дифференцируемы в соответствующих точках, причем $f'_y(x, y) \neq 0$, по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_k} = 0, \quad x \in G.$$

Из этого уравнения находим

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x_k}}{\frac{\partial z}{\partial y}},$$

что представляет собой иную запись формулы (11.3).

13. Сформулировать определение полного дифференциала скалярной ФНП. Сформулировать свойства инвариантности формы первого дифференциала.+++

Полный дифференциал

Пусть *векторная функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определена в *окрестности точки* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и *дифференцируема* в этой точке. Тогда, согласно следствию 16.1, *полное приращение* этой *функции* в точке x в зависимости от приращения $\Delta x = (\Delta x_1 \ \ldots \ \Delta x_n)^{\mathrm{T}}$ независимых переменных можно представить в виде

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)|\Delta x|,$$

где $f'(x)$ — *матрица Якоби* функции $f(x)$, а функция $\alpha(\Delta x)$ является *бесконечно малой функцией* при $\Delta x \to 0$. Как и в случае скалярных функций, можно ввести следующее понятие.

Определение 16.3. Линейную относительно Δx часть $f'(x)\Delta x$ полного приращения функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x, называют ***(полным) дифференциалом функции*** f и обозначают через $df(x)$.

Инвариантность

Дифференциал функции нескольких переменных, как и функции одного действительного переменного, имеет свойство, которое называют ***инвариантностью формы записи дифференциала***. Фактически это свойство есть простая и удобная форма представления правила дифференцирования сложной функции.

Пусть функции $g_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, дифференцируемы в точке $a \in \mathbb{R}^m$, а функция $f\colon \mathbb{R}^m \to \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1, n}$. Согласно следствию 10.1, сложная функция $F(x) = f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\big)$ дифференцируема в точке a, а ее дифференциал в точке a в соответствии с определением дифференциала и правилом дифференцирования сложной функции имеет вид

$$dF(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F(a)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} \frac{dg_i(a)}{dx_j} dx_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} \sum_{j=1}^{m} \frac{dg_i(a)}{dx_j} dx_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} du_i.$$

где

$$du_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{dg_i(a)}{dx_j} dx_j \quad —$$

дифференциал функции g_i в точка a. Таким образом,

$$dF(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} du_i.$$

Мы видим, что дифференциал dz сложной функции $z = f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\big)$ выражается через дифференциалы du_1, du_2, $\ldots$, du_n промежуточных переменных так же, как и в случае, когда эти переменные являются независимыми. Другими словами, если $z = f(u)$, то $dz = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f(u)}{\partial u_i} du_i$ и эта формула не зависит от того, каковы переменные du_1, du_2, $\ldots$, du_n, промежуточные или независимые. Это свойство дифференциала и называют инвариантностью его формы записи.

14. Сформулировать определения и свойства градиента скалярной ФНП. Вывести формулу вычисления производной по направлению.+++

Градиент (определение и формула для вычисления)

Определение 11.2. Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке x имеет все *частные производные первого порядка*. Вектор

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(f'_{x_1}(x),\ \ldots,\ f'_{x_n}(x)\right),$$

составленный из частных производных первого порядка функции $f(x)$ в точке x, называют ***градиентом функции*** f в точке x.

Понятие градиента позволяет упростить запись формулы (11.5) для вычисления производной по направлению вектора $\boldsymbol{n}$ *дифференцируемой* в точке x *функции*. Используя стандартное скалярное умножение в $\mathbb{R}^n$, формулу (11.5) можно записать в виде

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = (\operatorname{grad} f(x),\ \boldsymbol{n}^\circ)\,. \qquad (11.6)$$

Свойства градиента

Свойство 11.1. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = \text{пр}_{\boldsymbol{n}} \operatorname{grad} f(x), \qquad (11.7)$$

где $\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$ — проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\boldsymbol{b}$.

Свойство 11.2. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и $\operatorname{grad} f(x) \neq \mathbf{0}$, то при $\boldsymbol{n} = \operatorname{grad} f(x)$ имеем

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{n}} = |\operatorname{grad} f(x)|.$$

Свойство 11.3. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке вектор $\operatorname{grad} f(x)$ указывает направление наибольшего роста функции $f(x)$.

Формула вычисления производной по направлению

Теорема 11.3. Если *функция* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема* в точке $a \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке она имеет производную по направлению любого ненулевого вектора $\boldsymbol{n}$, причем

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \nu_i, \tag{11.5}$$

где $\boldsymbol{n}^\circ = (\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n) = \boldsymbol{n}/|\boldsymbol{n}|$.

◀ Рассмотрим функцию $g(s) = f(a + s\boldsymbol{n}^\circ)$ одного действительного переменного s. Поскольку функция нескольких переменных $f(x)$ дифференцируема в точке $a = (a_1,\ \ldots,\ a_n)$, то *сложная функция* $g(s) = f(x(s))$, где $x(s) = a + s\boldsymbol{n}^\circ$, дифференцируема в точке $s = 0$ и

$$\left.\frac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{df(a_1 + s\nu_1, \ldots, a_n + s\nu_n)}{ds}\right|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f(a_1 + s\nu_1, \ldots, a_n + s\nu_n)}{\partial x_i}\,\nu_i\right|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\,\nu_i.$$

В то же время, согласно определению производной функции действительного переменного, имеем

$$\left.\frac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} = \lim_{s\to 0} \frac{g(s) - g(0)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{f(a + s\boldsymbol{n}^\circ) - f(a)}{s}.$$

Из существования последнего предела вытекает и существование равного ему одностороннего предела при $s \to +0$. Поэтому

$$\left.\frac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} = \lim_{s\to +0} \frac{f(a + s\boldsymbol{n}^\circ) - f(a)}{s} = \frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

Приравнивая правые части полученных равенств, получаем утверждение теоремы. ▶

15. Сформулировать определение неявно заданной ФНП. Сформулировать теорему о существовании дифференцируемой неявно заданной ФНП.+++

Неявные ФНП

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0, \end{cases} \tag{11.1}$$

где функции $f_1(x)$, $\ldots$, $f_m(x)$ определены в некоторой *области* $X \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Предположим, что эта система разрешима относительно части переменных, например x_{n+1}, $\ldots$, x_{n+m}. Разрешимость системы в данном случае следует понимать в широком смысле как существование для любых значений x_1, $\ldots$, x_n единственного решения системы относительно переменных x_{n+1}, $\ldots$, x_{n+m}. Тогда определена *функция нескольких переменных* $y = h(x)$, которая точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие точку $y = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^m$ так, что в совокупности переменные $x_1, \ldots, x_{n+m}$ составляют решение рассматриваемой системы. В этом случае о функции $h(x)$ говорят как о ***неявной функции***, или ***неявно заданной функции***. Отметим, что термин «неявная функция» относится не к виду или структуре функции, а лишь к способу ее задания.

Теорема о существовании и дифференцируемости (возможно только 1-ая теорема)

Теорема 11.1 (***теорема о неявной функции***). Пусть уравнение $f(x,y) = 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, удовлетворяет следующим трем условиям:

1) координаты точки $(a,\ b)$ удовлетворяют уравнению, т.е. $f(a,b) = 0$;

2) *функция* $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности U точки $(a,\ b)$ и *непрерывно дифференцируема* в U, т.е. $f \in C^1(U)$;

3) *частная производная функции* $f(x,y)$ в точке $(a,\ b)$ по переменному y отлична от нуля, т.е. $f'_y(a,b) \neq 0$.

Тогда на плоскости существует прямоугольник P, определяемый неравенствами $|x-a| < \delta_x$, $|y-b| < \delta_y$, имеющий центр симметрии в точке $(a,\ b)$, такой, что в P уравнение $f(x,y) = 0$ разрешимо относительно переменного y и тем самым задает функцию $y = \varphi(x)$, $x \in T = (a-\delta_x,\ a+\delta_x)$. При этом функция $y = \varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на T, а ее производная может быть вычислена по формуле

$$\varphi'(x) = -\left.\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}\right|_{y=\varphi(x)}. \quad \# \tag{11.2}$$

Теорема 11.2. Пусть в *окрестности* V *точки* $(a,\ b)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, задана функция $f(x,y)$ от $n+1$ переменных ($x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$), удовлетворяющая условиям:

а) $f(a,b) = 0$;

б) *функция* $f(x,y)$ *непрерывно дифференцируема* в V;

в) $f'_y(a,b) \neq 0$.

Тогда точка $(a,\ b)$ имеет окрестность вида

$$\left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon |x-a| < \delta_x,\ |y-b| < \delta_y\right\},$$

в которой уравнение $f(x,y) = 0$ разрешимо относительно y, т.е. в окрестности $U(a,\delta_x) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x-a| < \delta_x\}$ определена функция нескольких переменных $\varphi(x)$, удовлетворяющая тождеству $f\bigl(x, \varphi(x)\bigr) \equiv 0$. При этом функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема в $U(a, \delta_x)$, а ее частные производные в $U(a, \delta_x)$ могут быть вычислены по формулам

$$\varphi'_{x_k}(x_k) = -\frac{f'_{x_k}(x, y)}{f'_y(x, y)}\bigg|_{y=\varphi(x)}, \quad k = \overline{1,\, n}. \quad \# \tag{11.3}$$

16. Сформулировать определение дифференциала k-го порядка скалярной ФНП. Вывести формулу вычисления дифференциала 2-го порядка для функции n переменных.+++

Дифференциал k-го порядка

Дифференциал n-го порядка — это дифференциал 1-го порядка от дифференциала (n-1)-го порядка функции f:

$$d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x))$$

Вывод формулы

Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема* в *окрестности точки* x. Тогда ее *дифференциал*

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\, dx_i$$

как функция от переменных $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ может оказаться дифференцируемой функцией в точке x. В этом случае выражение

$$d(df(x)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial df(x)}{\partial x_j}\, dx_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_i\, dx_j, \tag{10.12}$$

представляющее собой дифференциал от дифференциала функции $f(x)$, называют ***дифференциалом второго порядка*** функции $f(x)$ в точке x и обозначают $d^2 f(x)$. В этой связи дифференциал $df(x)$ называют ***дифференциалом первого порядка*** функции f.

Из теоремы 9.1 следует, что для существования в точке x дифференциала второго порядка функции f необходимо существование всех *частных производных второго порядка* этой функции в точке x. Достаточным же условием существования дифференциала является условие, что указанные производные являются *непрерывными функциями в точке* x (см. теорему 9.3).

Если дифференциал первого порядка является *линейной функцией* переменных dx_1, dx_2, ..., dx_n, то дифференциал второго порядка, согласно представлению (10.12), является квадратичной формой относительно этих переменных. В матричной записи дифференциал второго порядка имеет вид

$$d^2 f(x) = dx^{\mathrm{T}} f''(x)\, dx,$$

где $f''(x)$ — *матрица Гессе* функции f.

Итак, если $f \in C^2(U)$, где U — некоторая окрестность точки $x \in \mathbb{R}^n$, то в этой окрестности существуют непрерывные частные производные первого и второго порядка, а значит, в U существуют как дифференциал первого порядка df, так и дифференциал второго порядка $d^2 f$.

17. Сформулировать определение частных производных высшего порядка скалярной ФНП. Сформулировать теорему о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования.+++

Определение частных производных высших порядков

Частные производные высшего порядка вводятся так же, как и *частные производные второго порядка*. Частную производную k-го порядка ($k > 1$) *функции нескольких переменных* определяют как *частную производную первого порядка* от некоторой частной производной $(k-1)$-го порядка этой функции.

Например, для функции $f = f(x, y)$ двух переменных могут существовать следующие частные производные третьего порядка: $f'''_{xxx} \equiv f'''_{x^3}$, $f'''_{xxy} \equiv f'''_{x^2y}$, f'''_{xyx}, $f'''_{yxx} \equiv f'''_{yx^2}$, $f'''_{yyx} \equiv f'''_{y^2x}$ и т.д., всего восемь частных производных.

Порядок производной в верхнем индексе указывают соответствующим количеством штрихов, если он невелик (не выше трех-четырех), а в общем случае натуральным числом. При этом используют как римские обозначения натуральных чисел, так и арабские (в круглых скобках). Например, $f'''_{xxy} \equiv f^{(3)}_{x^2y}$, $f''''_{xxyy} \equiv f^{(4)}_{x^2y^2} \equiv f^{\mathrm{IV}}_{x^2y^2}$.

Теорема

Теорема 9.4 (***теорема о смешанных частных производных***). Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n > 1)$ в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ имеет частные производные первого порядка f'_{x_i} и f'_{x_j}, $i \neq j$, а также смешанные производные $f''_{x_ix_j}$ и $f''_{x_jx_i}$. Если эти смешанные производные являются *непрерывными в точке a функциями по части переменных x_i* и x_j, то в этой точке их значения совпадают, т.е. $f''_{x_ix_j}(a) = f''_{x_jx_i}(a)$.

18. Сформулировать определение дифференцируемости ФНП в точке. Сформулировать и доказать теорему о необходимом условии дифференцируемости скалярной ФНП в точке.+++

Дифференцируемость ФНП

Определение 9.1. Функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенную в некоторой окрестности точки x, называют ***дифференцируемой в точке*** x, если ее полное приращение в окрестности этой точки можно представить в виде

$$\Delta f(x) = a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + \ldots + a_n\Delta x_n + \alpha(\Delta x)|\Delta x|, \tag{9.2}$$

где коэффициенты a_1, a_2, ..., a_n не зависят от приращений Δx, а функция $\alpha(\Delta x)$ является *бесконечно малой* при $\Delta x \to 0$.

Функцию f называют ***дифференцируемой в области*** $X \subset \mathbb{R}^n$, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Теорема

Теорема 9.1 (*необходимое условие дифференцируемости*). Если функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x, то у этой функции в точке x существуют все (*конечные*) *частные производные* $f'_{x_i}(x)$, $i = \overline{1, n}$, причем коэффициенты a_i в представлении (9.2) равны значениям соответствующих частных производных в точке x:

$$a_i = f'_{x_i}(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Доказательство

◄ Для дифференцируемой в точке x функции f представление (9.2) верно для любого приращения Δx. В частности, это представление верно, если приращение Δx имеет вид

$$\Delta x = (0 \ \ \ldots \ \ 0 \ \ \Delta x_i \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0)^{\mathrm{T}}, \quad \Delta x_i \neq 0,$$

где номер i выбран произвольным образом и зафиксирован. В этом случае $|\Delta x| = |\Delta x_i|$, соответствующее *полное приращение* $\Delta f(x)$ *функции* $f(x)$ сводится к ее i-му *частному приращению* $\Delta_i f(x)$, а равенство (9.2) принимает вид

$$\Delta f(x) = \Delta_i f(x) = a_i\Delta x_i + \alpha(\Delta x)|\Delta x_i|.$$

Разделив последнее равенство на Δx_i и перейдя к пределу при $\Delta x_i \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x_i\to 0} \frac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i} = a_i + \lim_{\Delta x_i \to 0}\left(\alpha(\Delta x)\frac{|\Delta x_i|}{\Delta x_i}\right) = a_i,$$

поскольку *функция* $\alpha(\Delta x)$ *бесконечно малая* при $\Delta x_i \to 0$, а отношение $\dfrac{|\Delta x_i|}{\Delta x_i} = \pm 1$ ограничено, так что последний предел равен нулю (см. **8.3**, свойство 9 предела функции нескольких переменных). Следовательно, производная $f'_{x_i}(x)$ в точке x существует и равна a_i. ►

19. Сформулировать определение дифференцируемости скалярной ФНП. Сформулировать теорему о достаточном условии дифференцируемости скалярной ФНП.+++

Дифференцируемость ФНП

Определение 9.1. Функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенную в некоторой окрестности точки x, называют ***дифференцируемой в точке*** x, если ее полное приращение в окрестности этой точки можно представить в виде

$$\Delta f(x) = a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + \ldots + a_n\Delta x_n + \alpha(\Delta x)|\Delta x|, \tag{9.2}$$

где коэффициенты a_1, a_2, $\ldots$, a_n не зависят от приращений Δx, а функция $\alpha(\Delta x)$ является *бесконечно малой* при $\Delta x \to 0$.

Функцию f называют ***дифференцируемой в области*** $X \subset \mathbb{R}^n$, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Теорема

Теорема 9.3 (***достаточное условие дифференцируемости***). Если функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в некоторой окрестности точки a определена и имеет частные производные по всем переменным, причем все производные непрерывны в самой точке a, то функция f дифференцируема в точке a.

20. Сформулировать определение производной по направлению скалярной ФНП. Вывести формулу для вычисления производной по направлению.+++

Определение производной по направлению

Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой *окрестности точки* $a \in \mathbb{R}^n$ и задан вектор $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$. Обозначим через $\boldsymbol{n}^\circ$ *единичный вектор*, имеющий то же направление, что и вектор $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n}^\circ = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = (\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n).$$

Определение 11.1. ***Производной*** функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$ ***по направлению вектора*** $\boldsymbol{n}$ называют число

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}} = \lim_{s\to+0} \frac{f(a+s\boldsymbol{n}^\circ) - f(a)}{s}, \tag{11.4}$$

если этот предел существует.

Из этого определения и содержащегося в нем соотношения (11.4) легко сделать вывод о том, что производная по направлению вектора представляет собой скорость изменения значений функции f в точке a в направлении вектора $\boldsymbol{n}$.

Вывод формулы

Теорема 11.3. Если *функция* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема* в точке $a \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке она имеет производную по направлению любого ненулевого вектора $\boldsymbol{n}$, причем

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\nu_i, \tag{11.5}$$

где $\boldsymbol{n}^\circ = (\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n) = \boldsymbol{n}/|\boldsymbol{n}|$.

◄ Рассмотрим функцию $g(s) = f(a + s\boldsymbol{n}^\circ)$ одного действительного переменного s. Поскольку функция нескольких переменных $f(x)$ дифференцируема в точке $a = (a_1,\ \ldots,\ a_n)$, то *сложная функция* $g(s) = f(x(s))$, где $x(s) = a + s\boldsymbol{n}^\circ$, дифференцируема в точке $s = 0$ и

$$\frac{dg(s)}{ds}\bigg|_{s=0} = \frac{df(a_1+s\nu_1,\ldots,a_n+s\nu_n)}{ds}\bigg|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a_1+s\nu_1,\ldots,a_n+s\nu_n)}{\partial x_i}\,\nu_i\bigg|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\,\nu_i.$$

В то же время, согласно определению производной функции действительного переменного, имеем

$$\frac{dg(s)}{ds}\bigg|_{s=0} = \lim_{s\to0} \frac{g(s)-g(0)}{s} = \lim_{s\to0} \frac{f(a+s\boldsymbol{n}^\circ)-f(a)}{s}.$$

Из существования последнего предела вытекает и существование равного ему одностороннего предела при $s \to +0$. Поэтому

$$\frac{dg(s)}{ds}\bigg|_{s=0} = \lim_{s\to+0} \frac{f(a+s\boldsymbol{n}^\circ)-f(a)}{s} = \frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

Приравнивая правые части полученных равенств, получаем утверждение теоремы. ►

Теоремы с доказательством

Сформулировать и доказать теорему о необходимом условии существования условного экстремума функции 2-х переменных f(x, y) при условии связи φ(x, y)=0.+++

Теорема о необходимом условии

Теорема 14.1 (***необходимое условие условного экстремума***). Пусть *функции* двух переменных $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ определены и *непрерывно дифференцируемы* в *окрестности точки* $P(a;b)$. Если функция $f(x,y)$ имеет в точке P *условный экстремум* при условии $\varphi(x,y)=0$, причем $\operatorname{grad}\varphi(a,b)\neq 0$, то существует такое число λ, которое вместе с координатами a и b точки P удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \tag{14.5}$$

Доказательство

◀ Поскольку $\operatorname{grad}\varphi(a,b)\neq 0$, то одна из *частных производных первого порядка* функции $\varphi(x,y)$ в точке P отлична от нуля. Пусть, например, $\varphi'_y(a,b)\neq 0$. По *теореме 11.1 о неявной функции* в некотором прямоугольнике

$$U=\{(x,\ y)\colon |x-a|<\delta_1,\ \ |y-b|<\delta_2\}$$

с центром в точке $(a;b)$ уравнение $\varphi(x,y)=0$ разрешимо относительно переменного y, т.е. задает *неявную функцию* $y=h(x)$, непрерывно дифференцируемую в окрестности точки a, причем

$$h'(x)=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\bigg|_{y=h(x)}. \tag{14.6}$$

В прямоугольнике U точки, удовлетворяющие условию $\varphi(x,y)=0$, имеют вид $(x;h(x))$, где $x\in(a-\delta_1,\ a+\delta_1)$. Значит, если функция $f(x,y)$ имеет в точке P условный экстремум при условии $\varphi(x,y)=0$, то функция $g(x)=f(x,h(x))$ одного переменного имеет в точке a *локальный экстремум*. Эта функция, как *композиция* дифференцируемых *функций*, является дифференцируемой в точке a. Следовательно, в силу необходимого условия локального экстремума верно соотношение $g'(a)=0$. Согласно *правилу дифференцирования сложной функции* и равенству (14.6), находим

$$g'(a)=f'_x(a,b)+f'_y(a,b)h'(a)=f'_x(a,b)-f'_y(a,b)\frac{\varphi'_x(a,b)}{\varphi'_y(a,b)}=f'_x(a,b)-\frac{f'_y(a,b)}{\varphi'_y(a,b)}\,\varphi'_x(a,b)=0.$$

Введем обозначение $\lambda=-f'_y(a,b)/\varphi'_y(a,b)$. Тогда

$$\begin{cases} f'_x(a,b)+\lambda\varphi'_x(a,b)=0, \\ f'_y(a,b)+\lambda\varphi'_y(a,b)=0, \end{cases}$$

где первое из этих уравнений вытекает из условия $g'(a)=0$, а второе эквивалентно равенству, определяющему число λ. Добавив к этим уравнениям равенство $\varphi(a,b)=0$, которое должно выполняться в точке условного локального экстремума, получим систему уравнений (14.5).

Доказательство теоремы в случае, когда $\varphi'_x(a,b)\neq 0$, проводится аналогично. ▶

Сформулировать и доказать теорему о производной сложной (скалярной) ФНП.+++

Формулировка

Теорема 10.1. Если функции $g_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, дифференцируемы в точке $a \in \mathbb{R}$, а функция $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ дифференцируема в точке $b = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$, где $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1, n}$, то в некоторой окрестности точки a определена сложная функция $F(t) = f\big(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)\big)$, дифференцируемая в точке a, причем

$$\frac{dF(a)}{dt} = \frac{\partial f(b)}{\partial u_1}\frac{dg_1(a)}{dt} + \frac{\partial f(b)}{\partial u_2}\frac{dg_2(a)}{dt} + \ldots + \frac{\partial f(b)}{\partial u_n}\frac{dg_n(a)}{dt}. \tag{10.4}$$

Доказательство

◄ Условие дифференцируемости функции f в точке b предполагает, что эта функция определена в некоторой окрестности $\mathrm{U}(b, \sigma)$ точки b. Так как функции g_i дифференцируемы в точке a, они определены в некоторой окрестности этой точки и являются *непрерывными функциями в точке* a. Значит, согласно определению непрерывности, существует такая окрестность $\mathrm{U}(a, \delta)$, в которой определены все функции g_i, $i = \overline{1, n}$, и выполняются неравенства $|g_i(t) - g_i(a)| < \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Тогда для любого $t \in \mathrm{U}(a, \delta)$ точка $u = (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)$, где $u_i = g_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, попадает в окрестность $\mathrm{U}(b, \sigma)$, поскольку $|u - b| < \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n} \cdot n} = \sigma$. Следовательно, в окрестности $\mathrm{U}(a, \delta)$ определена сложная функция $F(t) = f\big(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)\big)$.

Пусть $t \in \mathrm{U}(a, \delta)$ — произвольная точка, $u_i = g_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $z = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Обозначим $\Delta t = t - a$, $\Delta u_i = u_i - b_i$, $\Delta z = z - c$, где $c = f(b)$. В силу дифференцируемости функций g_i в точке a имеем представление

$$\Delta u_i = g_i(t) - g_i(a) = g_i'(a)\Delta t + \alpha_i(\Delta t)|\Delta t|, \tag{10.5}$$

где $\Delta u = u - b$, $\alpha_i(\Delta t) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. В силу дифференцируемости f в точке b имеем аналогичное представление

$$\Delta z = f(u) - f(b) = \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i}(b)\Delta u_i + \beta(\Delta u)|\Delta u|, \tag{10.6}$$

где $\beta(\Delta u) \to 0$ при $\Delta u \to 0$. Подставив (10.5) в (10.6), получим

$$\Delta F(a) = \Delta z = \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i}(b_i)\big(g_i'(a)\Delta t + \alpha_i(\Delta t)|\Delta t|\big) + \beta\big(\Delta u\big)|\Delta u| =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} f'_{u_i}(b_i)g_i'(a)\Big)\Delta t + \gamma(\Delta t)|\Delta t|, \tag{10.7}$$

где

$$\gamma(\Delta t) = \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i}(b)\alpha_i(\Delta t) + \beta\big(\Delta g_1(a), \Delta g_2(a), \ldots, \Delta g_m(a)\big)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big(g_i'(a)\nu(\Delta t) + \alpha_i(\Delta t)\Big)^2},$$

и $\nu(\Delta t) = \dfrac{\Delta t}{|\Delta t|}$.

Функция $\beta(\Delta u)$ *бесконечно малая* при $\Delta u \to 0$, причем на представление (10.6) не влияет значение этой функции при $\Delta u = 0$. Поэтому можно считать, что $\beta(0) = 0$ и что функция $\beta(\Delta u)$ непрерывна при $\Delta u = 0$. Но тогда функция $\beta\big(\Delta g_1(a), \Delta g_2(a), \ldots, \Delta g_m(a)\big)$ непрерывна при $\Delta t = 0$, как *композиция* непрерывных *функций*. Значит, она является бесконечно малой при $\Delta t \to 0$. Функция $\nu(\Delta t)$ является ограниченной: $|\nu(\Delta t)| = 1$. Отсюда вытекает, что функция $\eta(\Delta t) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(g_i'(a)\nu(\Delta t) + \alpha_i(\Delta t)\Big)^2}$ ограничена при $\Delta t \to 0$. Следовательно, произведение $\beta\big(\Delta g_1(a), \Delta g_2(a), \ldots, \Delta g_m(a)\big)\eta(\Delta t)$ есть бесконечно малая функция при $\Delta t \to 0$, так как представляет собой произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию. Таким образом, функция $\gamma(\Delta t)$, как сумма бесконечно малых функций, является бесконечно малой функцией при $\Delta t \to 0$. Согласно определению 9.1, представление (10.7) означает, что функция F дифференцируема в точке a. При этом сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f'_{x_i}(b_i)g_i'(a)$ является, согласно (10.7), линейной частью приращения функции F, т.е. имеет место равенство (10.4). ►

Сформулировать и доказать теорему о необходимом условии существования локального экстремума.+++

Теорема о необходимом условии

Теорема 13.1 (***необходимое условие экстремума функции***). Пусть функция нескольких переменных $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в точке $a \in \mathbb{R}^n$ экстремум. Если функция $f(x)$ ($x = (x_1, \ldots, x_n)$) имеет в точке a *частную производную первого порядка* по переменному x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то эта частная производная равна нулю: $f'_{x_i}(a) = 0$.

Доказательство

◀ Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Рассмотрим действительную функцию

$$g(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

одного действительного переменного t, которая получается, если у функции $f(x)$ зафиксированы все переменные, кроме i-го, равного t. Функция $g(t)$ в точке $t = a_i$ имеет *локальный экстремум*. В самом деле, пусть, например, $f(x)$ имеет в точке a локальный максимум. Тогда существует такая проколотая окрестность $\mathring{\mathrm{U}}(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon 0 < |x - a| < \varepsilon\}$ точки a, что $f(x) \leqslant f(a)$ при $x \in \mathring{\mathrm{U}}(a, \varepsilon)$. Но в таком случае $g(t) \leqslant g(a_i)$ при $0 < |t - a_i| < \varepsilon$, что соответствует определению локального максимума функции одного переменного.

Функция $g(t)$ дифференцируема в точке $t = a_i$, так как функция $f(x)$ имеет в точке a частную производную по переменному x_i. При этом $g'(a_i) = f'_{x_i}(a)$. Согласно необходимому условию локального экстремума для функции действительного переменного, выполнено равенство $g'(a_i) = 0$. Следовательно, $f'_{x_i}(a) = 0$. ▶

Сформулировать и доказать свойство инвариантности формы первого дифференциала.+++

Инвариантность

Дифференциал функции нескольких переменных, как и функции одного действительного переменного, имеет свойство, которое называют ***инвариантностью формы записи дифференциала***. Фактически это свойство есть простая и удобная форма представления правила дифференцирования сложной функции.

Пусть функции $g_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,\, n}$, дифференцируемы в точке $a \in \mathbb{R}^m$, а функция $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $b = (b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n)$, где $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1,\, n}$. Согласно следствию 10.1, сложная функция $F(x) = f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\big)$ дифференцируема в точке a, а ее дифференциал в точке a в соответствии с определением дифференциала и правилом дифференцирования сложной функции имеет вид

$$dF(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F(a)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} \frac{dg_i(a)}{dx_j} dx_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} \sum_{j=1}^{m} \frac{dg_i(a)}{dx_j} dx_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} du_i.$$

где

$$du_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{dg_i(a)}{dx_j} dx_j$$

дифференциал функции g_i в точка a. Таким образом,

$$dF(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(b)}{\partial u_i} du_i.$$

Мы видим, что дифференциал dz сложной функции $z = f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\big)$ выражается через дифференциалы du_1, du_2, $\ldots$, du_n промежуточных переменных так же, как и в случае, когда эти переменные являются независимыми. Другими словами, если $z = f(u)$, то $dz = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(u)}{\partial u_i} du_i$ и эта формула не зависит от того, каковы переменные du_1, du_2, $\ldots$, du_n, промежуточные или независимые. Это свойство дифференциала и называют инвариантностью его формы записи.

Следствие для ознакомления (встречается в доказательстве)

Следствие 10.1. Если функции $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $i = \overline{1,\, n}$, дифференцируемы в точке $a = (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_m) \in \mathbb{R}^m$, $b_i = g_i(a)$, $i = \overline{1,\, n}$, и функция $f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ дифференцируема в точке $b = (b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n)$, то в некоторой окрестности точки a определена сложная функция $F(x) = f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\big)$, где $x = (x_1,\, x_2,\, x_m)$, эта функция дифференцируема в точке a, причем

$$\frac{\partial F(a)}{\partial x_k} = \frac{\partial f(b)}{\partial u_1} \frac{\partial g_1(a)}{\partial x_k} + \frac{\partial f(b)}{\partial u_2} \frac{\partial g_2(a)}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f(b)}{\partial u_n} \frac{\partial g_n(a)}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1,\, m}. \qquad (10.8)$$

Вывести формулу вычисления частных производных неявно заданной функции.+++

Вывод формулы

Теоремы 11.1 и 11.3 не только дают формулы для вычисления производных неявных функций, но и дают достаточные условия дифференцируемости неявной функции. Покажем, что формулы дифференцирования неявной функции могут быть получены, если использовать предположение о дифференцируемости неявной функции и правило дифференцирования сложной функции. Пусть функция $\varphi(x)$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, определена неявно уравнением $f(x, y) = 0$. Тогда в области G имеем $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$. Считая, что функции $y = \varphi(x)$ и $z = f(x, y)$ дифференцируемы в соответствующих точках, причем $f'_y(x, y) \neq 0$, по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_k} = 0, \quad x \in G.$$

Из этого уравнения находим

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}},$$

что представляет собой иную запись формулы (11.3).

Вывести формулу вычисления производной по направлению.+++

Формула вычисления производной по направлению

Теорема 11.3. Если *функция* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема* в точке $a \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке она имеет производную по направлению любого ненулевого вектора $\boldsymbol{n}$, причем

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\nu_i, \tag{11.5}$$

где $\boldsymbol{n}^\circ = (\nu_1, \ldots, \nu_n) = \boldsymbol{n}/|\boldsymbol{n}|$.

◀ Рассмотрим функцию $g(s) = f(a + s\boldsymbol{n}^\circ)$ одного действительного переменного s. Поскольку функция нескольких переменных $f(x)$ дифференцируема в точке $a = (a_1, \ldots, a_n)$, то *сложная функция* $g(s) = f(x(s))$, где $x(s) = a + s\boldsymbol{n}^\circ$, дифференцируема в точке $s = 0$ и

$$\left.\frac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{df(a_1 + s\nu_1, \ldots, a_n + s\nu_n)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a_1 + s\nu_1, \ldots, a_n + s\nu_n)}{\partial x_i}\,\nu_i\right|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\,\nu_i.$$

В то же время, согласно определению производной функции действительного переменного, имеем

$$\left.\frac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} = \lim_{s\to 0}\frac{g(s) - g(0)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{f(a + s\boldsymbol{n}^\circ) - f(a)}{s}.$$

Из существования последнего предела вытекает и существование равного ему одностороннего предела при $s \to +0$. Поэтому

$$\left.\frac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} = \lim_{s\to +0}\frac{f(a + s\boldsymbol{n}^\circ) - f(a)}{s} = \frac{\partial f(a)}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

Приравнивая правые части полученных равенств, получаем утверждение теоремы. ▶

Вывести формулу вычисления дифференциала 2-го порядка для функции n переменных.+++

Вывод формулы

Пусть *функция нескольких переменных* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема* в *окрестности точки* x. Тогда ее *дифференциал*

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\, dx_i$$

как функция от переменных $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ может оказаться дифференцируемой функцией в точке x. В этом случае выражение

$$d(df(x)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial df(x)}{\partial x_j}\, dx_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_i\, dx_j, \tag{10.12}$$

представляющее собой дифференциал от дифференциала функции $f(x)$, называют ***дифференциалом второго порядка*** функции $f(x)$ в точке x и обозначают $d^2 f(x)$. В этой связи дифференциал $df(x)$ называют ***дифференциалом первого порядка*** функции f.

Из теоремы 9.1 следует, что для существования в точке x дифференциала второго порядка функции f необходимо существование всех *частных производных второго порядка* этой функции в точке x. Достаточным же условием существования дифференциала является условие, что указанные производные являются *непрерывными функциями в точке* x (см. теорему 9.3).

Если дифференциал первого порядка является *линейной функцией* переменных dx_1, dx_2, $\ldots$, dx_n, то дифференциал второго порядка, согласно представлению (10.12), является квадратичной формой относительно этих переменных. В матричной записи дифференциал второго порядка имеет вид

$$d^2 f(x) = dx^{\mathrm{T}} f''(x)\, dx,$$

где $f''(x)$ — *матрица Гессе* функции f.

Итак, если $f \in C^2(U)$, где U — некоторая окрестность точки $x \in \mathbb{R}^n$, то в этой окрестности существуют непрерывные частные производные первого и второго порядка, а значит, в U существуют как дифференциал первого порядка df, так и дифференциал второго порядка $d^2 f$.

Практика

Номер 1+++

Разобран в теории (чисто теория)

Номер 2+++

Разобран в теории (чисто теория)

Номер 3+++

Исследуйте на экстремум функцию z=…

1) Найдите стационарные точки. Для этого составьте систему уравнений вида:

$$\begin{cases} {z'}_x = \cdots \\ {z'}_y = \cdots \end{cases}$$

2) Проверьте в точках достаточное условие. Для этого найдите

$$d^2z = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}(dy)^2$$

Далее составьте матрицу:

$$\begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{pmatrix}$$

Перепишите эту матрицу для каждой стационарной точки и примените критерий Сильвестра.

Критерий Сильвестра

Теорема 6.5 (***критерий Сильвестра***). Для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, …, $\Delta_n > 0$.

В данной ситуации он выглядит так:

$$z''_{xx} > 0 \text{ и } \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} > 0 - \text{знакопостоянен, положительно определён, точка минимума}$$

$$z''_{xx} < 0 \text{ и } \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} > 0 - \text{знакопостоянен отрицательно определён, точка максимума}$$

$$z''_{xx} > 0 \text{ и } \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} < 0 - \text{знакопеременен, не экстремум}$$

$$z''_{xx} < 0 \text{ и } \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} < 0 - \text{знакопеременен, не экстремум}$$

Всё.

Номер 4+++

Исследуйте на экстремум функцию z=… при условии …=…

1) Найдите стационарные точки. Для этого составьте систему уравнений вида:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda * \varphi(x, y), \text{где } \varphi(x, y) = 0 - \text{условие}.$$

Далее получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \cdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \cdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \cdots - \text{это должно быть равно условию!} \end{cases}$$

При решении системы выражаем x и y через λ, затем находим несколько значений λ и подставив из в x и y находим искомые точки.

2) Проверьте в точках достаточное условие. Для этого найдите

$$d^2z = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}(dy)^2$$

Далее составьте матрицу:

$$\begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{pmatrix}$$

Перепишите эту матрицу для каждой стационарной точки и примените критерий Сильвестра.

Критерий Сильвестра

Теорема 6.5 (***критерий Сильвестра***). Для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\ldots$, $\Delta_n > 0$.

В данной ситуации он выглядит так:

$$z''_{xx} > 0 \text{ и } \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} > 0 - \text{знакопостоянен, положительно определён, точка минимума}$$

$$z''_{xx} < 0 \text{ и } \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} > 0 - \text{знакопостоянен отрицательно определён, точка максимума}$$

$$z''_{xx} > 0 \text{ и } \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} < 0 - \text{знакопеременен, не экстремум}$$

$$z''_{xx} < 0 \text{ и } \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} < 0 - \text{знакопеременен, не экстремум}$$

Всё.