СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

2

Под редакцией А. В. Ефимова и А. С. Поспелова

Москва
Издательство
Физико-математической литературы
2001

ББК 22.1
С 23
УДК 51(075.8)

Коллектив авторов:

А. В. ЕФИМОВ, А. Ф. КАРАКУЛИН, С. М. КОГАН,
А. С. ПОСПЕЛОВ, Р. Я. ШОСТАК

Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 2: Учебное пособие для втузов / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — 4-е изд. перераб. и доп. —М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.—432 с.—ISBN 5-94052-035-9 (Ч. 2).

Содержит задачи по основам математического анализа, а также дифференциальному и интегральному исчислениям функций одной и нескольких переменных, дифференциальным уравнениям и кратным интегралам. Краткие теоретические сведения, снабженные большим количеством разобранных примеров, позволяют использовать сборник для всех видов обучения. Для студентов высших технических учебных заведений.

Учебное издание

ЕФИМОВ Александр Васильевич, КАРАКУЛИН Анатолий Федорович, КОГАН Сергей Михайлович, ПОСПЕЛОВ Алексей Сегеевич, ШОСТАК Родион Яковлевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВТУЗОВ

Часть 2

Редактор *Л. А. Панюшкина*
Корректор *Т. С. Вайсберг*
Компьютерная графика *М. В. Ивановский*
Компьютерный набор и верстка *Г. М. Красникова*

ИД № 01389 от 30.03.2000
Гигиеническое заключение № 77.99.02.953.Д.003724.07.01
от 05.07.2001

Подписано в печать 05.11.2001. Формат 60×88/16.
Печать офсетная с готовых диапозитивов.
Усл. печ. л. 27. Уч.-изд. л. 30,5. Тираж 7000 экз.
Заказ № 486

Издательство Физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в типографии ОАО «Внешторгиздат»
127576 Москва, Илимская улица, 7

ISBN 5-94052-035-9 (Ч. 2)
ISBN 5-94052-033-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ТИТУЛЬНЫХ РЕДАКТОРОВ

Настоящее издание «Сборника задач по математике для втузов» подверглось значительной перестановке глав и их распределению по томам. В результате первый том содержит алгебраические разделы курса высшей математики, в том числе векторную алгебру и аналитическую геометрию, определители и матрицы, системы линейных уравнений, линейную алгебру и новый раздел — общую алгебру.

Второй том полностью посвящен изложению основ математического анализа, дифференциальному и интегральному исчислениям функций одной и нескольких переменных, а также дифференциальным уравнениям.

В третьем томе собраны специальные разделы математического анализа, которые в различных наборах и объемах изучаются в технических вузах и университетах. Сюда относятся такие разделы, как векторный анализ, элементы теории функций комплексной переменной, ряды и их применение, операционное исчисление, методы оптимизации, уравнения в частных производных, а также интегральные уравнения.

Наконец, четвертый том содержит теоретические введения, типовые примеры и циклы задач по теории вероятностей и математической статистике.

Указанные выше изменения составляют лишь структурную переработку Сборника, никоим образом не затрагивая ни расположения материала внутри соответствующей главы, ни последовательности нумерации примеров и задач.

В смысловом отношении авторы внесли только следующие изменения. Во всех разделах Сборника исключены теоретические введения и циклы задач, связанные с численными методами. Дело в том, что в настоящее время существует целый ряд программных оболочек, каждая из которых реализует достаточно полный набор стандартных методов приближенного решения задач, а основные навыки работы с компьютером можно приобрести уже в школе. Авторы посчитали также необходимым добавить один новый раздел «Основы общей алгебры» и предложить цикл задач по тензорной алгебре в разделе «Линейная алгебра» в первый, «алгебраический» том Сборника. Это связано с тем, что круг идей и методов общей алгебры все глубже проникает в наукоемкие отрасли промышленности и, следовательно, становится необходимой частью образования и подготовки специалистов по инженерным специальностям.

Кроме отмеченного выше, авторами выполнена стандартная техническая работа по исправлению ошибок, описок и других неточностей, учтены также все замечания, возникавшие в процессе работы с предыдущими изданиями Сборника.

А. В. Ефимов, А. С. Поспелов

Глава 5
ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Действительные числа. Множества. Логическая символика

1. Понятие действительного числа. Из курса математики средней школы известно, что всякое неотрицательное *действительное число* x представляется бесконечной десятичной дробью

$$[x],x_1x_2\ldots, \tag{1}$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x и называемое *целой частью* числа x, $x_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

При этом дроби, у которых $x_n = 9$ для всех $n \geqslant n_0$ (n_0 — некоторое натуральное число), обычно исключаются из рассмотрения в силу следующих равенств:

$$[x],999\ldots = [x]+1,$$
$$[x],x_1x_2\ldots x_{n_0-1}999\ldots = [x],x_1x_2\ldots(x_{n_0-1}+1)\ (n_0>1,\ x_{n_0-1}\neq 9).$$

Действительное число x *рационально*, т.е. представимо в виде отношения $\dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, в том и только в том случае, когда дробь (1) периодическая. В противном случае число x *иррационально*.

Абсолютной величиной или *модулем* действительного числа x называется неотрицательное число

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Предполагается, что правила сравнения действительных чисел, а также арифметические операции над ними известны из курса математики средней школы.

5.1. Доказать, что число

$$0{,}1010010001\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\ldots$$

иррационально. Выписать по три первых члена из последовательностей конечных десятичных дробей, приближающих это число с недостатком и с избытком.

5.2. Следующие числа представить в виде правильных рациональных дробей:

а) 1,(2); б) 3,00(3); в) 0,110(25).

5.3. Доказать, что число $\lg 5$ иррационально.

◁ Предположим, что $\lg 5$ — рациональное число, т. е.

$$\lg 5 = \frac{m}{n}; \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда:

$$10^{m/n} = 5, \quad 10^m = 5^n, \quad 2^m \cdot 5^m = 5^n.$$

Но последнее равенство невозможно: число 2 входит в разложение левой части на простые множители, но не входит в аналогичное разложение для правой части, что противоречит единственности разложения целых чисел на простые множители. Поэтому исходное предположение неверно, и, следовательно, число $\lg 5$ иррационально. ▷

Доказать, что следующие числа иррациональны:

5.4. $\sqrt{3}$. **5.5.** $\sqrt[n]{p}$, p — простое число, $n > 1$.

5.6. $2+\sqrt{3}$. **5.7.** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

5.8. $\log_3 p$, p — простое число.

5.9. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, если известно, что π иррационально.

В задачах 5.10–5.13 сравнить указанные числа.

5.10. $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}-2$.

◁ Предположим, что верно неравенство

$$\sqrt{2}-\sqrt{5} < \sqrt{3}-2. \tag{2}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}+2 &< \sqrt{5}+\sqrt{3}, \\ 6+4\sqrt{2} &< 8+2\sqrt{15}, \\ 2\sqrt{2} &< 1+\sqrt{15}, \\ 8 &< 16+2\sqrt{15}. \end{aligned}$$

Так как последнее неравенство верно, то в силу обратимости выполненных преобразований верно и исходное неравенство (2). ▷

5.11. $\log_{1/2}\dfrac{1}{3}$ и $\log_{1/3}\dfrac{1}{2}$. **5.12.** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\lg(1/7)}$ и $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\lg(1/5)}$.

5.13. $\log_{\log_3 2}\dfrac{1}{2}$ и 1.

Не пользуясь таблицами, доказать следующие числовые неравенства:

5.14. $\log_3 10 + 4\lg 3 > 4$. **5.15.** $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

5.16. $\log_4 26 > \log_6 17$.

5.17. Доказать, что модуль действительного числа обладает следующими свойствами:

а) $|x| = \max\{x, -x\}$;

б) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ и $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;

в) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ и $|x - y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$ (*неравенства треугольника*);

г) $\sqrt{x^2} = |x|$.

Решить уравнения:

5.18. $|3x - 4| = 1/2$. **5.19.** $\sqrt{x^2} + x^3 = 0$.

5.20. $|-x^2 + 2x - 3| = 1$. **5.21.** $\left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right| = 1$.

5.22. $\sqrt{(x-2)^2} = -x + 2$.

Решить неравенства:

5.23. $|x - 2| \geqslant 1$. **5.24.** $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$.

5.25. $x^2 + 2\sqrt{(x+3)^2} - 10 \leqslant 0$. **5.26.** $\dfrac{1}{|x-1|} < 4 - x$.

5.27. $\sqrt{(x+1)^2} \leqslant -x - 1$.

2. Множества и операции над ними. Под *множеством* понимается любая совокупность объектов, называемых элементами множества.

Запись $a \in A$ означает, что объект a есть элемент множества A (принадлежит множеству A); в противном случае пишут $a \notin A$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Запись $A \subset B$ (A содержится в B) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B; в этом случае множество A называется *подмножеством* множества B. Множества A и B называют *равными* ($A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Существуют два основных способа описания множеств.

а) Множество A определяется непосредственным перечислением всех своих элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, т. е. записывается в виде

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

б) Множество A определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества T, которые обладают общим свойством α. В этом случае используется обозначение

$$A = \{x \in T \mid \alpha(x)\},$$

где запись $\alpha(x)$ означает, что элемент x обладает свойством α.

Пример 1. Описать перечислением элементов множество

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x-3)(x^2-1) = 0 \text{ и } x \geqslant 0\}.$$

$\lhd$ A есть множество всех целых неотрицательных корней уравнения $(x-3)(x^2-1) = 0$. Следовательно, $A = \{1, 3\}$. $\rhd$

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Если, в частности, A — подмножество некоторого универсального множества T, то разность $T \backslash A$ обозначается символом $\overline{A}$ и называется *дополнением* множества A (до множества T).

5.28. Установить, какая из двух записей верна:

а) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;

б) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$.

В задачах 5.29–5.34 указанные множества задать перечислением всех своих элементов.

5.29. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$.

5.30. $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x + \dfrac{1}{x} \leqslant 2 \text{ и } x > 0\right\}$.

5.31. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x - 4 \leqslant 0\}$.

5.32. $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{1}{4} \leqslant 2^x < 5\right\}$.

5.33. $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \log_{1/2} \dfrac{1}{x} < 2\right\}$.

5.34. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos^2 2x = 1 \text{ и } 0 < x \leqslant 2\pi\}$.

Изобразить на координатной плоскости следующие множества:

5.35. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 2 = 0\}$.

5.36. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$.

5.37. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 1)(y + 2) = 0\}$.

5.38. $\left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > \sqrt{2x+1} \text{ и } 2x+1 \geqslant 0\right\}$.

5.39. $\left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 > 2x+1\right\}$.

5.40. $\left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2^{x+1} = y^2+4 \text{ и } 2^{x-1} \leqslant y\right\}$.

5.41. $\left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \cos 2x = \cos 2y\right\}$.

5.42. $\left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y},\ x \neq 0,\ y \neq 0\right\}$.

5.43. Описать перечислением всех элементов множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + x - 20 = 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - x + 12 = 0\}.$$

Запись $m \,|\, n$, где $m,\, n \in \mathbb{Z}$, означает, что число m есть делитель числа n. Описать следующие множества:

5.44. $\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \,|\, 8 \text{ и } x \neq 1\}$. **5.45.** $\{x \in \mathbb{Z} \,|\, 8 \,|\, x\}$.

5.46. $\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \,|\, 12\} \cap \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \,|\, 8\}$.

5.47. $\{x \in \mathbb{N} \,|\, 12 \,|\, x\} \cap \{x \in \mathbb{N} \,|\, 8 \,|\, x\}$.

5.48. Доказать, что:

а) равенство $A \cap B = B$ верно в том и только том случае, когда $B \subset A$;

б) равенство $A \cup B = B$ верно в том и только том случае, когда $A \subset B$.

5.49. Пусть $A = (-1,\, 2]$ и $B = [1,\, 4)$. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ и изобразить их на числовой оси.

Приняв отрезок $T = [0,\, 1]$ за универсальное множество, найти и изобразить на числовой оси дополнения следующих множеств:

5.50. $\{0,\, 1\}$. **5.51.** $(1/4,\, 1/2)$. **5.52.** $(0,\, 1/2]$.

5.53. $\{1/4\} \cup [3/4,\, 1)$.

5.54. Доказать, что операция взятия дополнения обладает свойством *рефлексивности*:

$$\overline{(\overline{A})} = A,$$

а также связана с отношением включения $\subset$ и операциями $\cup$ и $\cap$ следующими *законами двойственности*:

$$\text{если} \quad A \subset B, \quad \text{то} \quad \overline{A} \supset \overline{B};$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{и} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

5.55. Доказать, что операции $\cup$ и $\cap$ связаны *законами дистрибутивности*:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Используя результаты задач 5.54 и 5.55, доказать следующие равенства:

5.56. $\overline{A\backslash B} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A}$.

◁ Так как $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, то левая часть доказываемого равенства принимает вид

$$(\overline{A\backslash B}) \cap (\overline{A \cap B}) = \overline{(A\backslash B) \cup (A \cup B)} = \overline{A}. \ \triangleright$$

5.57. $A\backslash B = A \cap \overline{B}$. **5.58.** $\overline{A\backslash B} = \overline{A} \cup B$.

5.59. $A \cap (\overline{A\backslash B}) = A \cap B$.

Операции $\cup$ и $\cap$ естественным образом обобщаются на случай произвольного (конечного или бесконечного) семейства множеств. Пусть, например, задано семейство множеств A_n, $n \in \mathbb{N}$. *Объединение* множеств этого семейства обозначается символом $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ и определяется как множество всех тех элементов, каждый из которых принадлежит по меньшей мере одному из множеств A_n. *Пересечение* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ определяется как множество всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A_n.

Для заданных семейств множеств A_n, $n \in \mathbb{N}$, найти $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ и $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$:

5.60. $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leqslant x \leqslant n\}$.

5.61. $A_n = \{3n-2,\ 3n-1\}$. **5.62.** $A_n = \left\{1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \ldots,\ \dfrac{1}{n}\right\}$.

5.63. Пусть A — множество всех точек плоскости, образующих стороны некоторого треугольника, вписанного в заданную окружность. Описать (словесно) объединение и пересечение всех таких множеств, если:

а) треугольники произвольные;

б) треугольники правильные;

в) треугольники прямоугольные.

Множество X называется *счетным*, если может быть установлено взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и элементами множества $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел.

Пример 2. Показать, что множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел счетно.

◁ Установим взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и натуральными числами, например, упорядочив множество $\mathbb{Z}$ следующим образом:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots,$$

а затем всякому целому числу поставив в соответствие его порядковый номер в этой последовательности. ▷

Доказать, что следующие множества счетны:

5.64. $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

5.65. $\{n \in \mathbb{N} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{N}\}$.

5.66. $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

5.67. Доказать, что если множество X счетно и $A \subset X$ — его бесконечное подмножество, то множество A также счетно. Используя этот результат, доказать, что множество

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n = k^2 - k + 1,\ k \in \mathbb{N}\}$$

счетно.

5.68. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — счетные множества. Доказать, что их объединение $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ — счетное множество.

Указание. Пусть $X_n = \{x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,1}, \ldots\}$. Тогда элементы множества $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ можно записать в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{ccccc}
x_{1,1}, & x_{1,2}, & \ldots, & x_{1,l}, & \ldots, \\
x_{2,1}, & x_{2,2}, & \ldots, & x_{2,l}, & \ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_{n,1}, & x_{n,2}, & \ldots, & x_{n,l}, & \ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Для того чтобы доказать счетность множества $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$, достаточно теперь занумеровать каким-либо образом все элементы этой таблицы.

Используя результат задачи 5.68, доказать, что следующие множества счетны:

5.69. $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{m}{n} \text{ для некоторых } m,\ n \neq 0 \text{ из } \mathbb{Z}\right\}$ — множество всех рациональных чисел.

5.70. Множество всех точек плоскости с рациональными координатами.

5.71. Множество всех многочленов с рациональными коэффициентами.

3. Верхние и нижние грани. Пусть X — произвольное непустое множество действительных чисел. Число $M = \max X$ называется *наибольшим* (*максимальным*) элементом множества X, если $M \in X$ и для всякого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant M$. Аналогично определяется понятие *наименьшего* (*минимального*) элемента $m = \min X$ множества X.

Множество X называется *ограниченным сверху*, если существует действительное число a такое, что $x \leqslant a$ для всех $x \in X$. Всякое число, обладающее этим свойством, называется *верхней гранью* множества X. Для заданного ограниченного сверху множества X множество всех его верхних граней имеет наименьший элемент, который называется *точной верхней гранью* множества X и обозначается символом $\sup X$. Очевидно, $\sup X = \max X$ тогда и только тогда, когда $\sup X \in X$.

Аналогично определяются понятия *ограниченного снизу* множества, *нижней грани* и *точной нижней грани* множества X; последняя обозначается символом $\inf X$.

Множество X, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным.*

Пример 3. Найти точные верхнюю и нижнюю грани множества $[0, 1)$.

$\lhd$ Это множество не имеет наибольшего элемента, так как для всякого $x \in [0, 1)$ найдется $y \in [0, 1)$ такое, что $y > x$. Множество верхних граней для полуинтервала $[0, 1)$ — это множество $[1, +\infty)$ с наименьшим элементом, равным 1. Поэтому

$$\sup [0, 1) = 1,$$

причем $1 \notin [0, 1)$.

С другой стороны, наименьший элемент для рассматриваемого множества $[0, 1)$ существует и равен 0. Множество нижних граней — это множество $(-\infty, 0]$ с наибольшим элементом, равным нулю, который и является точной нижней гранью полуинтервала $[0, 1)$. Таким образом, $\min [0, 1) = \inf [0, 1) = 0$. $\rhd$

5.72. Доказать, что приведенное выше определение точной верхней грани эквивалентно следующему:

Число M есть точная верхняя грань множества X в том и только том случае, если:

1) $x \leqslant M$ для всех $x \in X$;

2) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x \in X$ такой, что $x > M - \varepsilon$.

5.73. Пусть $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

а) Указать наименьший и наибольший элементы этого множества, если они существуют.

б) Каковы множества верхних и нижних граней для множества X? Найти $\sup X$ и $\inf X$.

Для следующих множеств найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$ и $\inf X$, если они существуют:

5.74. $x = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. **5.75.** $X = [-1, 1]$.

5.76. $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x < 0\}$. **5.77.** $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

5.78. $X = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{N} \text{ и } m < n\right\}$.

5.79. Пусть X — множество всех рациональных чисел, удовлетворяющих условию $r^2 \leqslant 2$. Показать, что множество X не имеет наибольшего элемента. Найти $\sup X$.

5.80. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — произвольное ограниченное множество. Доказать, что множество $-X = \{x \mid -x \in X\}$ также ограничено и справедливы равенства

$$\sup(-X) = -\inf X, \quad \inf(-X) = -\sup X.$$

5.81. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$ — произвольные ограниченные сверху множества. Доказать, что множество

$$X + Y = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x + y,\ x \in X,\ y \in Y\}$$

ограничено сверху и

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y.$$

5.82. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — ограниченное сверху и $Y \subset \mathbb{R}$ — ограниченное снизу множества. Доказать, что множество

$$X - Y = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\}$$

ограничено сверху и

$$\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y.$$

4. Логическая символика. При записи математических рассуждений целесообразно применять экономную символику, используемую в логике. Мы укажем здесь лишь несколько наиболее простых и употребительных символов.

Пусть α, β, ... — некоторые *высказывания* или *утверждения*, т. е. повествовательные предложения, относительно каждого из которых можно сказать истинно оно или ложно.

Запись $\overline{\alpha}$ означает «не α», т. е. *отрицание* утверждения α.

Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает: «из утверждения α следует утверждение β» ($\Rightarrow$ — символ *импликации*).

Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает: «утверждение α эквивалентно утверждению β», т. е. из α следует β и из β следует α ($\Leftrightarrow$ — символ *эквивалентности*).

Запись $\alpha \wedge \beta$ означает «α и β» ($\wedge$ — символ *конъюнкции*).

Запись $\alpha \vee \beta$ означает «α или β» ($\vee$ — символ *дизъюнкции*).

Запись

$$\forall x \in X\ \alpha(x)$$

означает: «для всякого элемента $x \in X$ истинно утверждение $\alpha(x)$» ($\forall$ — *квантор всеобщности*).

Запись

$$\exists x \in X\ \alpha(x)$$

означает: «существует элемент $x \in X$ такой, что для него истинно утверждение $\alpha(x)$» ($\exists$ — *квантор существования*).

Если элемент $x \in X$, для которого истинно утверждение $\alpha(x)$, не только существует, но и единствен, то пишут:

$$\exists!\, x \in X\ \alpha(x).$$

Пример 4. Используя логическую символику, записать утверждение: «число M есть точная верхняя грань множества X».

$\lhd$ Утверждение $M = \sup x$ означает, что выполнены условия:

а) $\forall x \in X \ (x \leqslant M)$ (т. е. M — верхняя грань множества X);

б) $\forall A \in \mathbb{R} \ (\forall x \in X \, (x \leqslant A) \Rightarrow A \geqslant M)$ (т. е. M — наименьшая из верхних граней множества X).

Условие б) может быть записано также в следующей эквивалентной форме (см. задачу 5.72):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \ \ (x > M - \varepsilon). \ \rhd$$

Пример 5. Используя логическую символику, сформулировать принцип математической индукции.

$\lhd$ Пусть α — некоторое утверждение, имеющее смысл для всех $n \in \mathbb{N}$. Введем множество

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \alpha(n)\},$$

т. е. множество всех тех натуральных чисел, для которых утверждение α истинно. Тогда принцип математической индукции можно сформулировать следующим образом:

$$\big((1 \in A) \wedge (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)\big) \Rightarrow A = \mathbb{N}. \tag{3}$$

Так как запись $\alpha(n)$ означает, что утверждение α истинно для числа $n \in \mathbb{N}$, то утверждение (3) можно записать и иначе:

$$\big(\alpha(1) \wedge (\alpha(n) \Rightarrow \alpha(n+1))\big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \alpha(n). \ \rhd$$

Пример 6. Записать отрицания высказываний: $\forall x \in X \, \alpha(x)$ и $\exists x \in X \ \alpha(x)$.

$\lhd$ Отрицание высказывания $\forall x \in X \ \alpha(x)$ имеет вид $\exists x \in X \ \overline{\alpha(x)}$ (существует элемент $x \in X$ такой, для которого утверждение $\alpha(x)$ ложно). Иначе говоря, для любого утверждения α истинно следующее высказывание:

$$\overline{\forall x \in X \ \alpha(x)} \Leftrightarrow \exists x \in X \ \overline{\alpha(x)}.$$

Аналогично

$$\overline{\exists x \in X \ \alpha(x)} \Leftrightarrow \forall x \in X \ \overline{\alpha(x)}. \ \rhd$$

Пример 7. Используя логические символы, записать утверждение: «функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, непрерывна в точке $a \in X$», а также его отрицание.

$\lhd$ Исходное утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \big(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$$

(для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого числа $x \in X$, удовлетворяющего условию $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$). Отрицание этого утверждения:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x \in X \ \ \big(|x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon\big)$$

(существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдется число $x \in X$, удовлетворяющее условиям $|x-a| < \delta$ и $|f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon$). $\rhd$

Прочитать приведенные ниже высказывания, выяснить их смысл и установить, истинны они или ложны (символами x, y, z, a, b, c всюду, где это специально не оговаривается, обозначены действительные числа).

5.83. а) $\forall x\, \exists y\, (x + y = 3)$; б) $\exists y\, \forall x\, (x + y = 3)$;
в) $\exists x, y\, (x + y = 3)$; г) $\forall x, y\, (x + y = 3)$.

5.84. $\exists x, y\, (x > y > 0 \wedge x + y = 0)$.

5.85. $\forall x, y\, (x < y) \Leftrightarrow \exists z\, (x < z < y)$.

5.86. $\forall x, y\, (x^2 \neq 2y^2)$.

5.87. $\forall x\, (x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0)$.

5.88. $\forall x\, (x > 2 \wedge \overline{x > 3} \Leftrightarrow 2 < x \leqslant 3)$.

5.89. $\exists x\, (\sqrt{x^2} < x)$.

5.90. а) $\forall a, b, c\, (\exists x\, (ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow b^2 - 4ac \geqslant 0)$;
б) $\forall a, b, c\, (\forall x\, (ax^2 + bx + c > 0) \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0 \wedge a > 0)$.

5.91. а) $\forall b\, \exists a\, \forall x\, (x^2 + ax + b > 0)$;
б) $\exists b\, \forall a\, \exists x\, (x^2 + ax + b = 0)$;
в) $\exists a\, \forall b\, \exists x\, (x^2 + ax + b = 0)$.

Установить точный смысл приведенных ниже высказываний и записать их с использованием логической символики, сформулировать и записать их отрицания.

5.92. а) Число x_0 есть решение уравнения $f(x) = 0$.
б) Число x_0 есть единственное решение уравнения $f(x) = 0$.
в) Уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное действительное решение.

5.93. а) Множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху.
б) Число m есть наименьший элемент множества X.
в) Множество X имеет наименьший элемент.

5.94. а) Число $m \in \mathbb{Z}$ является делителем числа $n \in \mathbb{Z}$, или в краткой записи: $m \mid n$.
б) Если число $n \in \mathbb{Z}$ делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.
в) Число $p \in \mathbb{N}$ простое.

§ 2. Функции действительной переменной

1. Понятие функции. Пусть D — произвольное множество действительных чисел. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $f(x)$, то говорят, что на множестве D определена *числовая функция* f. Множество D называется *областью определения*, а множество

$$E = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

— *множеством значений* числовой функции f. Символически функция записывается в виде $f\colon D \to E$ или $y = f(x)$.

Наиболее распространенным является аналитический способ задания функции. Он состоит в том, что с помощью формулы конкретно устанавливается алгоритм вычисления значений функции $y = f(x)$ для каждого из значений *аргумента* x. В этом случае область определения функции обычно не указывают, понимая под нею то множество значений аргумента x, для которого данная формула имеет смысл (*естественная* область определения функции).

Пример 1. Найти область определения и множество значений функции $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

◁ Естественной областью определения этой функции является множество $D = \{x \,|\, |x| < 1\} = (-1,\, 1)$, а множеством значений — множество $E = \{y \,|\, y \geqslant 1\} = [1,\, +\infty)$. ▷

Пусть функция $f\colon\ D \to E$ такова, что для любых $x_1, x_2 \in D$ из условия $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае всякому числу $y \in E$ может быть поставлено в соответствие некоторое вполне определенное число $x \in D$ такое, что $f(x) = y$; тем самым определена новая функция $f^{-1}\colon\ E \to D$, называемая *обратной* к заданной функции f.

Пусть заданы функции $f\colon\ X \to Y$ и $g\colon\ Y \to Z$. Их *композицией* (или *сложной функцией*, полученной последовательным применением функций f и g) называется функция $h = g \circ f\colon\ X \to Z$, определяемая равенством

$$h(x) = g\bigl(f(x)\bigr), \quad x \in X.$$

5.95. Найти функциональную зависимость радиуса R цилиндра от его высоты H при данном объеме $V = 1$.

5.96. Написать выражение для объема V конуса как функции его боковой поверхности S при данной образующей $l = 2$.

5.97. Написать выражение для площади S равнобочной трапеции с основаниями $a = 2$ и $b = 1$ как функции угла α при основании a.

5.98. С момента покоя t_0 тело движется с постоянным ускорением a. Найти зависимость скорости и пройденного пути от времени движения. Как связаны между собой пройденный путь и скорость в момент времени t?

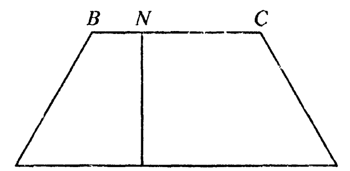


Рис. 1

5.99. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 1) с основаниями a и b и высотой h проведена прямая MN, перпендикулярная основаниям и отстоящая от вершины A на расстояние $|AM| = x$. Выразить площадь S фигуры $ABNM$ как функцию переменной x.

5.100. В шар радиуса R вписан цилиндр. Написать функциональную зависимость объема V цилиндра от его высоты H. Найти область определения этой функции.

5.101. В шар радиуса R вписан прямой круговой конус. Написать функциональную зависимость площади боковой поверхности S конуса:

а) от его образующей l;

б) от угла α при вершине конуса в его осевом сечении;

в) от угла β при основании конуса.

Найти области определения каждой из полученных функций.

5.102. Найти $f(-1)$, $f(-0{,}001)$, $f(100)$, если $f(x) = \lg x^2$.

5.103. Найти $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -\infty < x \leqslant 0, \\ 2^x, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

5.104. Найти $f(1)$, $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a-1)$, $2f(2a)$, если $f(x) = x^3 - 1$.

5.105. Найти $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{1}{f(x)}$, если $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

Найти естественную область определения D и множество значений E каждой из следующих функций:

5.106. $y = \ln(x+3)$.

5.107. $y = \sqrt{5-2x}$.

5.108. $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

5.109. $y = \arccos\dfrac{1-2x}{4}$.

5.110. $y = \ln(1 - 2\cos x)$.

5.111. $y = \sqrt{1-|x|}$.

5.112. $y = \lg(5x - x^2 - 6)$.

5.113. $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2}}$.

5.114. $y = 2^{\arccos(1-x)}$.

5.115. $y = e^{x^2-2}$.

Найти множество G, на которое данная функция отображает множество F:

5.116. $y = x^2$, $F = [-1, 2]$.

5.117. $y = |x|$, $F = \{x \mid 1 \leqslant |x| \leqslant 2\}$.

5.118. $y = \dfrac{x}{2x-1}$, $F = (0, 1)$.

5.119. $y = \sqrt{x - x^2}$, $F = (0, 1)$.

5.120. $y = \log_3 x$, $F = (3, 27)$.

5.121. $y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$, $F = [0, 1/2)$.

Найти *множество нулей* $D_0 = \{x \mid f(x) = 0\}$, *область положительности* $D_+ = \{x \mid f(x) > 0\}$ и *область отрицательности* $D_- = \{x \mid f(x) < 0\}$ для каждой из заданных функций:

5.122. $f(x) = 1 + x$. **5.123.** $f(x) = 2 + x - x^2$.

5.124. $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$. **5.125.** $f(x) = 1 - e^{1/x-1}$.

Показать, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет соответствующему функциональному уравнению:

5.126. $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 0,\ f(x) = kx + b$.

5.127. $f(x) + f(x+1) = f\big(x(x+1)\big),\ f(x) = \log_a x$.

5.128. $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2),\ f(x) = a^x$.

5.129. $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_1x_2}\right),\ f(x) = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$.

В задачах 5.130–5.133 определить функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую заданному условию.

5.130. $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$.

◁ Пусть $x + 1 = t$. Тогда $x = t - 1$ и $x^2 - 3x + 2 = t^2 - 5t + 6$. Поэтому

$$f(t) = f(x+1) = x^2 - 3x + 2 = t^2 - 5t + 6. \ \triangleright$$

5.131. $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2},\ x \neq 0$.

5.132. $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2},\ x > 0$.

5.133. $f(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$.

Функция $f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если ее область определения симметрична относительно точки $x = 0$ и $f(-x) = f(x)$ $\big(f(-x) = -f(x)\big)$.

Какие из указанных в задачах 5.134–5.139 функций четные, какие нечетные, а какие не являются ни четными, ни нечетными?

5.134. $f(x) = x^4 + 5x^2$. **5.135.** $f(x) = x^2 + x$.

5.136. $f(x) = \dfrac{x}{2^x - 1}$. **5.137.** $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

5.138. $f(x) = \sin x - \cos x$. **5.139.** $f(x) = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$.

5.140. Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной и нечетной — нечетная функция.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T (период функции) такое, что $\forall\, x \in D\ \big(f(x+T) = f(x)\big)$.

Выяснить, какие из заданных функций являются периодическими, и определить их наименьший период T:

5.141. $f(x) = 5\cos 7x$. **5.142.** $f(x) = \cos^2 2x$.

5.143. $f(x) = x\sin x$. **5.144.** $f(x) = \cos x + \sin(\sqrt{3}x)$.

5.145. $f(x) = \sin x^2$. **5.146.** $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$.

Установить, какие из указанных ниже функций имеют обратные, найти соответствующие обратные функции и их области определения:

5.147. $y = ax + b$. **5.148.** $y = (x-1)^3$. **5.149.** $y = \cos 2x$.

5.150. $y = \ln 2x$. **5.151.** $y = 2^{x/2}$. **5.152.** $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

5.153. $y = x^2 + 1$.

◁ Для функции $y = x^2 + 1$ естественная область определения есть вся числовая прямая $D = (-\infty, +\infty)$, а множество значений — луч $E = [1, +\infty)$. Так как для любого $a \in E$ уравнение $x^2 + 1 = a$ имеет два различных решения $x_1(a) = \sqrt{a-1}$ и $x_2(a) = -\sqrt{a-1}$, то данная функция не имеет обратной. Однако каждая из функций

$$y_1 = x^2 + 1, \quad D_1 = [0, +\infty), \quad \text{и} \quad y_2 = x^2 + 1, \quad D = (-\infty, 0],$$

имеет обратную, равную соответственно

$$x_1(y) = \sqrt{y-1} \quad \text{и} \quad x_2(y) = -\sqrt{y-1}. \ ▷$$

Найти обратную функцию и область ее определения, если исходная функция задана на указанном промежутке:

5.154. $y = x^2 - 1$: а) $x \in (-\infty; -1/2)$; б) $x \in [1/2, +\infty)$.

5.155. $y = \sin x$: а) $x \in [-\pi/2, \pi/2]$; б) $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

5.156. $y = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0], \\ 2x, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$

5.157. $y = \cos^2 x$:

а) $x \in [0; \pi/2]$; б) $x \in [\pi/2; \pi]$; в) $x \in [\pi; 3\pi/2]$.

Найти композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ следующих функций:

5.158. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

◁ Имеем:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

и

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|. \ ▷$$

5.159. $f(x) = 1 - x,\ g(x) = x^2$.

5.160. $f(x) = e^x,\ g(x) = \ln x$.

5.161. $f(x) = \sin x,\ x \in [-\pi, \pi],\ g(x) = \arcsin x$.

5.162. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ x, & x \in (0, +\infty), \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ -x^2, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$

5.163. Найти $f \circ f \circ f$, если:

а) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; б) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Элементарные функции и их графики. Следующие функции называются *основными элементарными*.

1. *Степенная* функция: $y = x^a,\ a \in \mathbb{R}$.
2. *Показательная* функция: $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$.
3. *Логарифмическая* функция: $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$.
4. *Тригонометрические* функции: $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x$.
5. *Обратные тригонометрические* функции: $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарной называется всякая функция, которая может быть получена из конечного числа основных элементарных функций с помощью арифметических операций и операции композиции.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D,\ y = f(x)\},$$

где $\mathbb{R}^2$ — множество всех точек плоскости.

На плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат Oxy график функции представляется множеством точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют соотношению $y = f(x)$ (графическое изображение функции).

При построении графиков часто используются следующие простые геометрические рассуждения. Если Γ — график функции $y = f(x)$, то:

1) график функции $y_1 = -f(x)$ есть зеркальное отображение Γ относительно оси Ox;

2) график функции $y_2 = f(-x)$ — зеркальное отображение Γ относительно оси Oy;

3) график функции $y_3 = f(x - a)$ — смещение Γ вдоль оси Ox на величину a;

4) график функции $y_4 = b + f(x)$ — смещение Γ вдоль оси Oy на величину b;

5) график функции $y_5 = f(ax),\ a > 0,\ a \neq 1,$ — сжатие в a раз (при $a > 1$) или растяжение в $1/a$ раз (при $a < 1$) Γ вдоль оси Ox;

6) график функции $y_6 = bf(x),\ b > 0,\ b \neq 1,$ — растяжение в b раз (при $b > 1$) или сжатие в $1/b$ раз (при $b < 1$) Γ вдоль оси Oy.

В некоторых случаях при построении графика функции целесообразно разбить ее область определения на несколько непересекающихся промежутков и последовательно строить график на каждом из них.

Пример 2. Построить график функции $y = |x| + |x^2 - 1|$.

◁ Раскрывая модули, можем записать:

$$y = \begin{cases} x^2 - x - 1, & x \in (-\infty, -1], \\ -x^2 - x + 1, & x \in (-1, 0], \\ -x^2 + x + 1, & x \in (0, 1], \\ x^2 + x - 1, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

График заданной функции есть объединение графиков (парабол), представляющих эту функцию на каждом из четырех промежутков (рис. 2). ▷

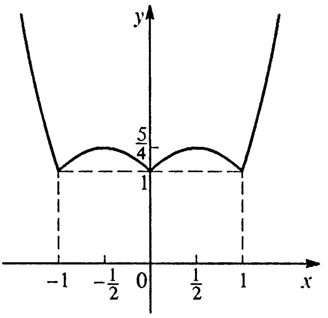


Рис. 2

Следующие элементарные функции записать в виде композиции основных элементарных функций:

5.164. $f(x) = |x|$. **5.165.** $f(x) = \sin(\cos\sqrt{x})$.

5.166. $f(x) = 2^{\sin x^2}$. **5.167.** $f(x) = \arcsin(e^{\sqrt[3]{x}})$.

5.168. $f(x) = \sin(2^{x^2})$. **5.169.** $f(x) = 1/\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \log_3 x}$.

Для каждой из следующих функций найти ее график:

5.170. $y = \sqrt{\ln \sin x}$.

◁ Естественная область определения заданной функции есть множество

$$D = \{x \mid \sin x = 1\} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Поэтому

$$\Gamma = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 0 \right) \middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}. \ ▷$$

5.171. $y = x + \sqrt{1 - |\operatorname{cosec} x|}$. **5.172.** $y = \sqrt{-|x^2 - 1|} + 2$.

5.173. $y = \sqrt{\cos x - 1} + \dfrac{x}{2}$.

5.174. $y = 1 + \sqrt{\sin x} + \sqrt{-\sin x}$.

Построить графики следующих элементарных функций:

5.175. $y = kx + b$, если:
а) $k = 2,\ b = 0$; б) $k = 0,\ b = -2$; в) $k = -1,\ b = -1/3$.

5.176. $y = y_0 + a(x - x_0)^2$, если:
а) $a = 1,\ x_0 = 0,\ y_0 = -1$;
б) $a = 2,\ x_0 = 1,\ y_0 = 0$;
в) $a = -1/2,\ x_0 = -2,\ y_0 = 3/2$.

5.177. $y = y_0 + \dfrac{k}{x - x_0}$, если:

а) $k = 1,\ x_0 = 1,\ y_0 = -1$; б) $k = -2,\ x_0 = -1,\ y_0 = -1/2$.

5.178. $y = a\sin(kx + \alpha)$, если:

а) $a = 1,\ k = 2,\ \alpha = \pi/3$; б) $a = -2,\ k = 1/2,\ \alpha = -\pi/3$.

5.179. $y = a\,\mathrm{tg}\,(kx + \alpha)$, если:

а) $a = 3,\ k = 1/3,\ \alpha = \pi/4$; б) $a = -1/2,\ k = 2,\ \alpha = 3\pi/2$.

5.180. $y = p\arcsin(x + q)$, если:

а) $p = 4,\ q = -1$; б) $p = -2/3,\ q = 1/2$.

5.181. $y = p\,\mathrm{arctg}\,(x + q)$, если:

а) $p = -3,\ q = 5/2$; б) $p = 2/5,\ q = -6$.

5.182. $y = a^{kx+b}$, если:

а) $a = 2,\ k = -1,\ b = 1$; б) $a = 1/2,\ k = 2,\ b = -2$.

5.183. $y = \log_a(kx + b)$, если:

а) $a = 10,\ k = 10,\ b = -1$; б) $a = 1/10,\ k = 1/2,\ b = 2$.

5.184. $y = |2 - x| + |2 + x|$. **5.185.** $y = x^2 + x - |x|$.

5.186. $y = x^2 - 6|x| + 9$. **5.187.** $y = |6x^2 + x| - 1$.

5.188. $y = (x^2 + 2x)\dfrac{|x - 1|}{x - 1}$. **5.189.** $y = x - 1 - \sqrt{(x - 1)^2}$.

5.190. $y = \left|\dfrac{2x - 3}{x + 2}\right|$. **5.191.** $y = \dfrac{|x| - 1}{|x + 2|}$.

5.192. $y = \mathrm{sgn}\,x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

5.193. $y = [x]$, где $[x]$ — целая часть x.

5.194. $y = \{x\}$, где $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть x.

5.195. $y = 2^{|x|} - 1$. **5.196.** $y = (1/3)^{|x+1|} + 2$.

5.197. $y = \log_{1/2}|x - 3|$. **5.198.** $y = |\log_2(x + 1)|$.

5.199. $y = \arcsin\left(\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

5.200. $y = \arccos(\cos 3x)$.

5.201. $y = \cos x + |\sin x|$. **5.202.** $y = |\mathrm{arctg}\,(x - 1)|$.

5.203. $y = x\,\mathrm{sgn}\,(\cos x)$. **5.204.** $y = \left|\mathrm{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$.

5.205. $y = \sin^2\dfrac{x}{2}$. **5.206.** $y = \sin\left(\arcsin\dfrac{x + 2}{5}\right)$.

На плоскости Oxy изобразить множества точек, координаты которых удовлетворяют заданным условиям:

5.207. $xy = 0$. **5.208.** $|y| = |x^2 - 2|x| - 3|$.

5.209. $|x| + |y| = 1$. **5.210.** $|x + y| + |x - y| = 1$.

5.211. $\big||x| - |y|\big| = 1$.

5.212. $|2y - 1| + |2y + 1| + \dfrac{4}{\sqrt{3}}|x| = 4$.

§ 3. Предел последовательности действительных чисел

1. Понятие последовательности. *Последовательностью* действительных чисел называется функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, определенная на множестве всех натуральных чисел. Число $f(n)$ называется n-м членом последовательности и обозначается символом x_n, а формула $x_n = f(n)$ называется *формулой общего члена* последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Написать первые пять членов последовательности:

5.213. $x_n = 1 + (-1)^n \dfrac{1}{n}$. **5.214.** $x_n = n(1 - (-1)^n)$.

5.215. $x_n = \dfrac{3n + 5}{2n - 3}$. **5.216.** $x_n = (-1)^n \arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$.

Написать формулу общего члена последовательности:

5.217. $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$ **5.218.** $0, 2, 0, 2, \ldots$

5.219. $2, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{7}, \ldots$

5.220. $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \ldots$

5.221. $-3, \dfrac{5}{3}, -\dfrac{7}{5}, \dfrac{9}{7}, -\dfrac{11}{9}, \ldots$

5.222. $0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots$

В задачах 5.223 5.228 требуется найти наибольший (наименьший) член ограниченной сверху (снизу) последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5.223. $x_n = 6n - n^2 - 5$. **5.224.** $x_n = e^{10n - n^2 - 24}$.

5.225. $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{9 + n}$. **5.226.** $x_n = 3n^2 - 10n - 14$.

5.227. $x_n = 2n + \dfrac{512}{n^2}$. **5.228.** $x_n = -\dfrac{n^2}{2^n}$.

2. Предел последовательности. Число a называется *пределом* последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. При этом сама последовательность называется *сходящейся.*

Критерий Коши. *Для того чтобы последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ для любого $p \in \mathbb{N}$.*

Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется *бесконечно малой,* если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется *бесконечно большой* (сходящейся к бесконечности), что формально записывается в виде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если для любого числа $E > 0$ существует номер $N(E)$ такой, что при $n > N(E)$ выполняется неравенство $|x_n| > E$. Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены последовательности положительны (отрицательны), то используем запись

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right).$$

Число a называется *предельной точкой* последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется бесконечное число членов этой последовательности, удовлетворяющих условию $|x_n - a| < \varepsilon$.

Принцип Больцано–Вейерштрасса. *Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.*

Наибольшая (наименьшая) из предельных точек последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется *верхним* (*нижним*) пределом этой последовательности и обозначается символом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ $\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\right)$.

5.229. Используя логическую символику, записать следующие высказывания, а также их отрицания:

а) последовательность ограничена;

б) последовательность монотонно возрастает;

в) число a есть предел последовательности;

г) последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ бесконечно большая;

д) число a есть предельная точка последовательности.

5.230. Найти $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и определить номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > N(\varepsilon)$, если:

а) $x_n = 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$, $\varepsilon = 0{,}001$; б) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $\varepsilon = 0{,}005$;

в) $x_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n}{2}$, $\varepsilon = 0{,}001$; г) $x_n = \dfrac{5n^2+1}{7n^2-3}$, $\varepsilon = 0{,}005$.

Вычислить пределы:

5.231. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{3n}$. **5.232.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+1}{7-9n}$.

5.233. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2n^3}$. **5.234.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$.

5.235. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{95n^3+39n}$.

5.236. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{5n+7} - \dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$.

5.237. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^4+3n+1}}{n-1}$. **5.238.** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$.

5.239. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-2})$. **5.240.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$.

5.241. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

5.242. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$. **5.243.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n^2)}{n-1}$.

5.244. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

5.245. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{5^n}\right)$.

5.246. Доказать, что если последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ бесконечно малая и $\forall n\in\mathbb{N}$ $(x_n\neq 0)$, то последовательность $(1/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ бесконечно большая.

Установить, какие из заданных последовательностей являются бесконечно большими:

5.247. $x_n = 2^{\sqrt{n}}$. **5.248.** $x_n = n^{(-1)^n}$.

5.249. $x_n = n\sin\dfrac{\pi n}{2}$. **5.250.** $x_n = \lg(\lg n)$, $n \geqslant 2$.

Найти все предельные точки последовательности:

5.251. $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2-(-1)^n}$. **5.252.** $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{4}$.

5.253. $x_n = \arcsin\dfrac{(-1)^n}{2}$.

5.254. Доказать:

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

Для каждой из следующих последовательностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$:

5.255. $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. **5.256.** $x_n = \dfrac{n+1}{n}\cos^2\dfrac{\pi n}{4}$.

5.257. $x_n = (-1)^n(2n+1)$.

5.258. $x_n = \dfrac{n+2}{n-2}\sin\dfrac{\pi n}{3}$, $n \geqslant 2$. **5.259.** $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2} - \dfrac{1}{n}$.

5.260. Доказать, что равенство $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ является необходимым и достаточным условием существования предела последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

§ 4. Предел функции. Непрерывность

1. Предел функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D. Число a называют *пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0* и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in D$ из условия $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Критерий Коши. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела предел в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, как только $|x' - x_0| < \delta(\varepsilon)$ и $|x'' - x_0| < \delta(\varepsilon)$.*

Говорят, что число a есть *предел функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $A(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - a| < \varepsilon$, как только $|x| > A(\varepsilon)$.

В дальнейшем используются следующие замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e, \tag{2}$$

где $e = 2{,}71828\ldots$ — основание натуральных логарифмов.

Наряду с введенным выше понятием предела функции используют также следующее понятие *одностороннего* предела. Число a называют *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *справа* (*слева*) и пишут $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a$ ($\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ ($-\delta(\varepsilon) < x - x_0 < 0$) следует $|f(x) - a| < \varepsilon$. Аналогично вводится понятие одностороннего предела на бесконечности ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$).

В задачах 5.261–5.263, пользуясь только определением предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, и заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$\delta(\varepsilon)$			

5.261. $f(x) = x^2,\ x_0 = 2,\ a = 4.$

5.262. $f(x) = 1/x,\ x_0 = 1,\ a = 1.$

5.263. $f(x) = \lg x,\ x_0 = 1,\ a = 0.$

Используя логическую символику, записать следующие утверждения:

5.264. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty.$ **5.265.** $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty.$

5.266. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$ **5.267.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

5.268. $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 0.$ **5.269.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2.$

5.270. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$ **5.271.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$

Вычислить пределы следующих рациональных выражений:

5.272. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2}{3x^2-5x+1}.$ **5.273.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+3}{x^2-3}.$

5.274. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x}{|x+3|}.$ **5.275.** $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{x^2-2}{x^4+x^2+1}.$

5.276. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \left(\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{3}{8-x^3}\right).$ **5.277.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}.$

5.278. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1};\ m, n \in \mathbb{N}.$ **5.279.** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}.$

5.280. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}.$ **5.281.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}.$

5.282. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1} - \dfrac{x^2}{2x+1}\right).$ **5.283.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}.$

5.284. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^5+(x+2)^5+\ldots+(x+n)^5}{x^5+n^5}$, $n\in\mathbb{N}$.

5.285. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$.

5.286. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right)$.

5.287. Доказать, что если $P_n(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$, $Q_m(x)=b_0x^m+\ldots+b_m$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0 & \text{при} \quad n<m,\\ a_0/b_0 & \text{при} \quad n=m,\\ \infty & \text{при} \quad n>m.\end{cases}$$

При вычислении пределов, содержащих иррациональные выражения, часто используются следующие приемы: а) введение новой переменной для получения рационального выражения; б) перевод иррациональности из знаменателя в числитель или наоборот.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$.

◁ Пусть $t=\sqrt[4]{x}$. Тогда

$$\lim_{x\to 81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}=\lim_{t\to 3}\frac{3-t}{9-t^2}=\lim_{t\to 3}\frac{1}{3+t}=\frac{1}{6}. \ \triangleright$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})$.

$$\triangleleft \ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7})}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=0. \ \triangleright$$

Вычислить пределы:

5.288. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}$. **5.289.** $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

5.290. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

5.291. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$, $x>0$.

5.292. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. **5.293.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sqrt{1+x}-1|}{x^2}$.

5.294. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}}$.

5.295. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$. **5.296.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$; $m, n \in \mathbb{N}$.

5.297. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$. **5.298.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$.

5.299. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x-a}-\sqrt{x})$.

5.300. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

5.301. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{4x^2-7x+4}-2x)$.

5.302. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{3/2}(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2})$.

Используя замечательный предел (1), вычислить:

5.303. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$. **5.304.** $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 3x}$.

5.305. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} \pi x$. **5.306.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\arcsin x}{4x}$.

5.307. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$. **5.308.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos \alpha x-\cos \beta x}{x^2}$, $\alpha \neq \beta$.

5.309. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg} x\right)$. **5.310.** $\lim\limits_{x\to \alpha} \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2\alpha} \sin \dfrac{x-\alpha}{2}$.

5.311. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$. **5.312.** $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) \operatorname{tg} x$.

5.313. $\lim\limits_{\alpha\to +0} \dfrac{\sin \alpha^n}{\sin^m \alpha}$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

5.314. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin 2\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha}{\alpha^3}$.

5.315. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}$. **5.316.** $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos 5x}{1-\cos 4x}$.

Доказать следующие соотношения:

5.317.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$.

5.318*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a.$ **5.319*.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a.$

При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$, используется замечательный предел (2).

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$.

◁ Имеем

$$\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}=\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{3x}=\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}\left(\frac{-2}{2+x}\cdot 3x\right)}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}}=\lim_{t=\frac{-2}{2+x}\to 0}(1+t)^{1/t}=e$$

и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{2+x}\cdot 3x=-6,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{2x}=e^{-6}$$

(здесь использована непрерывность композиции непрерывных функций). ▷

Используя замечательный предел (2), а также результаты задач 5.317–5.319, вычислить пределы:

5.320. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$. **5.321.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

5.322. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$. **5.323.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{3/x}$.

5.324. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(2+x)-\ln x)$. **5.325.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

5.326. $\lim\limits_{x\to\infty} x(a^{1/x}-1)$. **5.327.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^x-a}{x-1}$.

5.328. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\log_a x-1}{x-a}$. **5.329.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

5.330. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin x}$. **5.331.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

5.332. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{1/x}$. **5.333.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

5.334. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ в том и только том случае, когда для любой последовательности аргументов $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ значений функции сходится к a.

Используя результат задачи 5.334, доказать, что для следующих функций не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$:

5.335. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \infty$. **5.336.** $f(x) = \sin 1/x$, $x_0 = 0$.

5.337. $f(x) = x - [x]$, $x_0 = \infty$.

Найти односторонние пределы:

5.338. $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} \dfrac{x-3}{|x-3|}$. **5.339.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \dfrac{2+x}{4-x^2}$.

5.340. $\lim\limits_{x\to \pm 0} (2+x)^{1/x}$. **5.341.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} 7^{\frac{1}{2-x}}$.

5.342. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \operatorname{arctg} x$. **5.343.** $\lim\limits_{x\to \pm\infty} [1/x]$.

5.344. $\lim\limits_{x\to \pi/4\pm 0} \dfrac{|\operatorname{tg}(4x-\pi)|}{2x-\pi/2}$. **5.345.** $\lim\limits_{x\to 2\pi\pm 0} \dfrac{x^2}{\cos x - 1}$.

5.346. Доказать, что предел функции $y = f(x)$ во внутренней точке x_0 области ее определения существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы и они совпадают.

2. Бесконечно малые и бесконечно большие. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *сравнимыми*, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ или $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — сравнимые бесконечно малые при $x \to x_0$ и пусть, для определенности, существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$. Тогда:

а) Если $C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми *одного порядка*. В частности, при $C = 1$ бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* и пишут $\alpha \sim \beta$.

б) Если $C = 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более *высокого порядка*, чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha = o(\beta)$. Если при этом существует действительное число $r > 0$ такое, что $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x)^r)} \neq 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой *порядка* r относительно $\beta(x)$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \infty$. Подобно тому как это сделано выше для бесконечно малых, вводится понятие сравнимых бесконечно больших и их классификация.

5.347. Доказать, что если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, то найдется такое число $\delta > 0$ и константы C_1 и C_2, что

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow C_1\beta(x) \leqslant \alpha(x) \leqslant C_2\beta(x).$$

5.348. Доказать, что $\alpha \sim \beta$ в том и только том случае, когда $\alpha - \beta = o(\alpha)$ или $\alpha - \beta = o(\beta)$.

Определить порядок малости $\alpha(x)$ относительно $\beta(x) = x$ при $x \to 0$:

5.349. $\alpha(x) = \dfrac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$. **5.350.** $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$.

5.351. $\alpha(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$. **5.352.** $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$.

5.353. $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})$.

5.354. $\alpha(x) = 3\sin^3 x - x^4$.

5.355. $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1$.

5.356. $\alpha(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$.

5.357. $\alpha(x) = 3^{\sqrt{x}} - 1$. **5.358.** $\alpha(x) = 2^x - \cos x$.

5.359. Доказать, что $\alpha(x) - \beta(x)$ имеет 2-й порядок малости относительно x при $x \to 0$, если:

а) $\alpha(x) = 1/(1+x)$, $\beta(x) = 1 - x$;

б) $\alpha(x) = \sqrt{a^2 + x}$, $\beta(x) = a + \dfrac{1}{2a}x$ $(a \neq 0)$;

в) $\alpha(x) = (1+x)^n$, $\beta(x) = 1 + nx$ $(n \in \mathbb{N})$.

Приближенно вычислить следующие выражения:

5.360. $1/1{,}03$. **5.361.** $\sqrt{25{,}3}$.

5.362. $(1{,}03)^5$. **5.363.** $(0{,}97)^4$.

5.364. Доказать, что если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Используя результат задачи 5.364, вычислить пределы:

5.365. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x/\sqrt{1-x^2})}{\ln(1-x)}$.

◁ Так как $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sim\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\ln(1-x)\sim(-x)$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x/\sqrt{1-x^2})}{\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x/\sqrt{1-x^2}}{-x}=-1. \ \triangleright$$

5.366. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\lg x}$.

5.367. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$.

5.368. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}$.

5.369. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{\arcsin 3x\cdot\sin(x/2)}$.

5.370. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\sin^2 x+x\operatorname{tg} 7x}$.

5.371. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{2\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^3}{1-\sin 2x}$.

Определить порядок роста бесконечно большой $A(x)$ относительно $B(x)=x$ при $x\to\infty$:

5.372. $A(x)=x^3+150x+10$.

5.373. $A(x)=\sqrt{x^2+3x+5}+|x|$.

5.374. $A(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

5.375. $A(x)=\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$.

5.376. $A(x)=\dfrac{5x^6}{3x^4+x^3+2}$.

5.377. $A(x)=\dfrac{x^{5/2}}{x^{7/3}+1}$.

3. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва. Функция $y=f(x)$ с областью определения D называется *непрерывной* в точке x_0, если выполнены следующие три условия:

а) функция $y=f(x)$ определена в точке x_0, т. е. $x_0\in D$;

б) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если условие а) выполнено, то условия б) и в) эквивалентны следующему:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0,\Delta x)=0,$$

где

$$\Delta f(x_0,\Delta x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

— *приращение функции* $y=f(x)$ в точке x_0, соответствующее *приращению аргумента* $\Delta x=x-x_0$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий а)–в), то x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$. При этом различают следующие случаи:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует, но функция не определена в точке x_0 или нарушено условие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. В этом случае x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции.

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует. Если при этом существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ (очевидно, не равные друг другу), то x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода.*

в) В остальных случаях x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода.*

5.378. Используя логическую символику, записать на языке «ε-δ» следующие утверждения:

а) функция $y = f(x)$ с областью определения D непрерывна в точке $x_0 \in D$;

б) функция $y = f(x)$ не является непрерывной в точке $x_0 \in D$.

Доказать, что следующие функции непрерывны в каждой точке их естественной области определения:

5.379. $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$.

$\lhd$ Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = (x_0+\Delta x)^n - x_0^n = C_n^1 x_0^{n-1}\Delta x + C_n^2 x_0^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

Отсюда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = 0.$ $\rhd$

5.380. $f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$.

5.381. $f(x) = \log_a x;\ a > 0,\ a \neq 1$.

5.382. $f(x) = \sin x$. **5.383.** $f(x) = \arcsin x$.

Задана функция $f(x)$. При каком выборе параметров, входящих в ее определение, $f(x)$ будет непрерывной?

5.384. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1. \end{cases}$

5.385. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leqslant 1, \\ ax^2-2, & x > 1. \end{cases}$

5.386. $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \leqslant \pi/2, \\ \sin x + b, & x > \pi/2. \end{cases}$

Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности»:

5.387. $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$.

5.388. $f(x) = \dfrac{|3x-5|}{3x-5}$.

5.389. $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

5.390. $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin x$.

5.391. $f(x) = 1 - x\sin\dfrac{1}{x}$.

5.392. $f(x) = 3^{x/(4-x^2)}$.

5.393. $f(x) = (x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

5.394. $f(x) = \dfrac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

5.395. $f(x) = \dfrac{3^{1/(x-2)} - 1}{3^{1/(x-2)} + 1}$.

5.396. $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

5.397. $f(x) = \dfrac{1/x - 1/(x+1)}{1/(x-1) - 1/x}$.

5.398. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

5.399. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 \leqslant x < 1, \\ x-1, & 1 < x \leqslant 4, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

5.400. $f(x) = \dfrac{1}{2^{1/(1-x)} + 1}$.

5.401. $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 4-2x, & 1 < x < 2{,}5, \\ 2x-7, & 2{,}5 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$

5.402. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi/2 \leqslant x < \pi/4, \\ 1, & x = \pi/4, \\ x^2 - \dfrac{\pi^2}{16}, & \pi/4 < x \leqslant \pi. \end{cases}$

5.403. Доказать, что все точки разрыва ограниченной монотонной функции являются точками разрыва 1-го рода.

4. Непрерывность на множестве. Равномерная непрерывность. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке $x \in D$. Она называется *равномерно непрерывной на множестве* D, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых x', $x'' \in D$ из неравенства $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ следует $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема Кантора. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

5.404. Доказать, что если $y = f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, то она:

а) ограничена на $[a, b]$;

б) достигает на $[a, b]$ своих верхней и нижней граней (теорема Вейерштрасса);

в) принимает на любом интервале $(a', b') \subset [a, b]$ все промежуточные значения между $f(a')$ и $f(b')$ (теорема Коши).

5.405. Доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то эта функция ограничена на $[a, +\infty)$.

5.406. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

принимает на любом отрезке $[0, a]$ все промежуточные значения между $f(0)$ и $f(a)$, однако не является непрерывной на $[0, a]$.

5.407. Доказать, что всякий многочлен нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень.

5.408. На языке «ε-δ» сформулировать утверждение: функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве D, но не является равномерно непрерывной на этом множестве. В качестве примера рассмотреть следующие функции:

а) $f(x) = 1/x$, $D = (0, 1]$;

б) $f(x) = \lg x$, $D = (0, 10]$;

в) $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$, $D = (0, 1]$.

5.409. Доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то эта функция равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

5.410. Показать, что неограниченная функция $f(x) = x + \sin x$ равномерно непрерывна на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

Следующие функции исследовать на равномерную непрерывность на заданных множествах:

5.411. $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$, $D = [-1, 1]$.

5.412. $f(x) = \ln x$, $D = (0, 1]$.

5.413. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $D = (0, \pi]$.

5.414. $f(x) = e^x \cos\dfrac{1}{x}$, $D = (0, 1]$.

5.415. $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ D = \mathbb{R}$.

5.416. $f(x) = \sqrt{x},\ D = [0,\ +\infty)$.

5.417. $f(x) = x \sin x,\ D = [0,\ +\infty)$.

§ 5. Комплексные числа

1. Алгебраические операции над комплексными числами. *Комплексными числами* называются всевозможные упорядоченные пары $z = (x, y)$ действительных чисел, для которых следующим образом определены операции сложения и умножения:

$$(x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2), \tag{1}$$

$$(x_1,\ y_1)(x_2,\ y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1). \tag{2}$$

Множество всех комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

Действительные числа x и y называются *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа $z = (x,\ y)$ и обозначаются символами $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ соответственно.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1,\ y_1)$ и $z_2 = (x_2,\ y_2)$ называются *равными* только в том случае, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Из определений (1) и (2) следует, что всякое комплексное число $(x,\ y)$ может быть записано следующим образом:

$$(x,\ y) = (x,\ 0) + (0,\ 1)(y,\ 0). \tag{3}$$

Если теперь комплексные числа вида $(x,\ 0)$ отождествить [1]) с действительными числами x, а число $(0,\ 1)$ обозначить символом i, то равенство (3) принимает вид

$$z = x + iy$$

и называется алгебраической формой комплексного числа $z = (x,\ y)$.

5.418. Доказать, что операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (*коммутативность сложения*);

б) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (*ассоциативность сложения*);

в) $z_1z_2 = z_2z_1$ (*коммутативность умножения*);

г) $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (*ассоциативность умножения*);

д) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (*закон дистрибутивности*).

---

[1]) То есть установить взаимно однозначное соответствие $(x,\ 0) \leftrightarrow x$ между множествами $\{(x,\ 0)\,|\,x \in \mathbb{R}\}$ и $\mathbb{R}$. Из (1) и (2) следует, что это соответствие «сохраняет операции»:

$$(x_1,\ 0) + (x_2,\ 0) = (x_1 + x_2,\ 0) \leftrightarrow x_1 + x_2,$$

$$(x_1,\ 0) \cdot (x_2,\ 0) = (x_1x_2,\ 0) \leftrightarrow x_1x_2.$$

5.419. Доказать что:

а) $\forall z_1,\ z_2 \neq 0\, \exists z\, (z_2 z = z_1)$

$\Bigl($число z называется *частным* от деления z_1 на z_2 и обозначается символом $\dfrac{z_1}{z_2}\Bigr)$;

б) если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

В задачах 5.420–5.429 выполнить указанные операции, представив результат в алгебраической форме.

5.420. $(1 - 2i)(2 + i)^2 + 5i$.

◁ Задача состоит в том, чтобы заданное комплексное число представить в форме $x + iy$. Для этого можно воспользоваться непосредственно формулами (1) и (2), однако этот же результат можно получить следующим образом. Как показывают свойства операций, перечисленные в задаче 5.418, при сложении и умножении комплексных чисел, представленных в алгебраической форме, с ними можно обращаться как с биномами вида $a + ib$, учитывая дополнительно, что $i^2 = (0,\ 1)\ (0,\ 1) = (-1,\ 0) = -1$. Поэтому

$$(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i,$$

$$(1 - 2i)(2 + i)^2 = (1 - 2i)(3 + 4i) = 3 - 2i - 8i^2 = 11 - 2i,$$

откуда окончательно получаем

$$(1 - 2i)(2 + i)^2 + 5i = 11 - 2i + 5i = 11 + 3i. \ ▷$$

5.421. $(2 + 3i)(3 - i)$. **5.422.** $(1 + 2i)^2$.

5.423. $(1 - i)^3 - (1 + i)^3$. **5.424.** $(2i - i^2)^2 + (1 - 3i)^3$.

5.425. $\dfrac{2 - i}{1 + i}$.

◁ Результат может быть получен непосредственно по формуле из задачи 5.419. Заметим, однако, что $(1+i)(1-i) = 2$ есть действительное число. Поэтому, умножая числитель и знаменатель заданной дроби на $1 - i$, находим:

$$\frac{2 - i}{1 + i} = \frac{(2 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - 3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i. \ ▷$$

5.426. $\dfrac{1}{1 + 4i} + \dfrac{1}{4 - i}$. **5.427.** $\left(\dfrac{1 - i}{1 + i}\right)^3$.

5.428. $\dfrac{(1 + i)(3 + i)}{3 - i} - \dfrac{(1 - i)(3 - i)}{3 + i}$. **5.429.** $\left(\dfrac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2$.

Найти действительные решения следующих уравнений:

5.430. $(1+i)x + (-2+5i)y = -4+17i$.

5.431. $12\big((2x+i)(1+i) + (x+y)(3-2i)\big) = 17+6i$.

Решить следующие системы линейных уравнений:

5.432. $(3-i)z_1 + (4+2i)z_2 = 1+3i$.
$(4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 7$.

5.433. $(2+i)z_1 + (2-i)z_2 = 6$.
$(3+2i)z_1 + (3-2i)z_2 = 8$.

5.434. $iz_1 + z_2 = i$.
$(i+1)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i$.

Если на плоскости введена декартова прямоугольная система координат Oxy, то всякому комплексному числу $z = x+iy$ может быть поставлена в соответствие некоторая точка $M(x, y)$ с абсциссой x и ординатой y. При этом говорят, что точка $M(x, y)$ *изображает* комплексное число $z = x+iy$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*, ось Ox — *действительной осью*, а ось Oy — *мнимой осью*.

Число $r = \sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x+iy$ и обозначается символом $|z|$. Модуль числа z равен расстоянию точки M, изображающей это число, от начала координат.

Всякое решение φ системы уравнений

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{4}$$

называется *аргументом* комплексного числа $z = x+iy \neq 0$. Все аргументы числа z различаются на целые кратные 2π и обозначаются единым символом $\operatorname{Arg} z$. Каждое значение аргумента совпадает с величиной φ некоторого угла, на который следует повернуть ось Ox до совпадения с радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ точки M (при этом $\varphi > 0$, если поворот совершается против часовой стрелки, и $\varphi < 0$ в противном случае). Значение $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \operatorname{Arg} z < 2\pi$, называется *главным значением* аргумента и обозначается символом $\arg z$.

В некоторых случаях главным значением аргумента называется значение $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$.

Из соотношений (4) следует, что для всякого комплексного числа z справедливо равенство

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

называемое *тригонометрической формой* числа z.

Пример 1. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = -2+2i\sqrt{3}$.

◁ Имеем

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4, \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

поэтому главное значение аргумента равно $\arg z = 2\pi/3$ и, следовательно, $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. ▷

Следующие комплексные числа представить в тригонометрической форме и изобразить точками на комплексной плоскости:

5.435. $-i$. **5.436.** $1 - i\sqrt{3}$. **5.437.** $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.438. $\frac{1-i}{1+i}$. **5.439*.** $-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

5.440. $\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$. **5.441.** $1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$ и обозначается символом $\overline{z}$.

Доказать следующие равенства:

5.442. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ и $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$.

5.443. $\overline{(\overline{z})} = z$. **5.444.** $|\overline{z}| = |z|$. **5.445.** $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.

5.446. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$ и $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$. **5.447.** $z\overline{z} = |z|^2$.

5.448. Вычислить:

а) $z_1\overline{z}_2$ и $\left(\frac{\overline{z}_1}{z_2}\right)^2$, если $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$;

б) $z_1\overline{z}_2$ и $\frac{\overline{z}_1^2}{z_2}$, если $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 2i$.

5.449. Пусть $p(z)$ — произвольный многочлен с действительными коэффициентами. Доказать, что для любого $z \in \mathbb{C}$ верно равенство $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$.

Решить следующие уравнения:

5.450. $|z| - z = 1 + 2i$. **5.451.** $|z| + z = 2 + i$.

5.452. Доказать равенства и выяснить их геометрический смысл:

а) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;

б) $\mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2 = \mathrm{Arg}\,(z_1 z_2)$, $\mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{Arg}\,z_2 = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

(равенства б) понимаются в смысле равенства множеств — см. с. 9).

Выяснить геометрический смысл следующих преобразований комплексной плоскости:

5.453. $z \to z - 2$. **5.454.** $z \to z + (3 - i)$. **5.455.** $z \to iz$.

5.456. $z \to \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)z$. **5.457.** $z \to -z$. **5.458.** $z \to 2z$.

5.459. $z \to \dfrac{z}{1-i}$. **5.460.** $z \to \overline{z}$.

5.461. Доказать, что:

а) величина $|z_1 - z_2|$ равна расстоянию на комплексной плоскости между точками M_1 и M_2, изображающими комплексные числа z_1 и z_2;

б) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ и $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$ (неравенства треугольника). Каков геометрический смысл этих неравенств?

5.462. Доказать тождества:

а) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (каков его геометрический смысл?);

б)* $|z_1| + |z_2| = \left|\dfrac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{z_1 z_2}\right| + \left|\dfrac{z_1 + z_2}{2} - \sqrt{z_1 z_2}\right|$.

В задачах 5.463–5.473 дать геометрическое описание множеств всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

5.463. $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. **5.464.** $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1$. **5.465.** $|\operatorname{Im} z| \leqslant 2$.

5.466. $|z| < 1$. **5.467.** $|z + i| = 2$.

5.468. $1 < |z + 2| \leqslant 2$. **5.469.** $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$.

5.470. $|z - i| = |z + 2|$. **5.471.** $0 < \arg z \leqslant \pi/4$.

5.472. $|\pi - \arg z| < \pi/4$. **5.473.** $z = \overline{z}$.

5.474. Пусть $z \neq -1$. Доказать, что $\operatorname{Re} \dfrac{z-1}{z+1} = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$.

Пусть φ — произвольное действительное число. Символом $e^{i\varphi}$ обозначается комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$. С помощью этого обозначения всякое комплексное число $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ может быть записано в *показательной форме*

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

Представить в показательной форме следующие комплексные числа:

5.475. $\dfrac{7 + 24i}{5}$. **5.476.** $5 - 12i$. **5.477.** $-3 - 4i$.

5.478. $-2 + i$. **5.479.** $\sin\alpha - i\cos\alpha$.

5.480. $\sin\alpha + i(1 - \cos\alpha)$.

5.481. Доказать, что символ $e^{i\varphi}$ обладает следующими свойствами:

а) $e^{i2\pi n} = 1$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$; б) $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$;

в) $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ и $\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

5.482. Данные числа z_1 и z_2 представить в показательной форме и выполнить указанные действия над ними:

а) $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1^2}{z_2}$, если $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$;

б) $z_1^2 \overline{z}_2$, $\dfrac{\overline{z}_2}{z_1}$, если $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$.

5.483. Доказать *формулы Эйлера*

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

5.484. Доказать *формулу Муавра*: если $z = re^{i\varphi}$, то

$$z^n = r^n e^{in\varphi},$$

или, в тригонометрической форме,

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Используя формулу Муавра, вычислить следующие выражения:

5.485. $(1+i)^{10}$. **5.486.** $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

5.487. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$. **5.488.** $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$.

5.489. Доказать равенства:

а) $(1+i)^n = 2^{n/2}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$;

б) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} - i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

5.490. Используя формулы Эйлера, выразить через косинусы и синусы кратных дуг функции:

а) $\cos^3\varphi$; б) $\sin^3\varphi$.

Используя формулу Муавра, выразить через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ следующие функции:

5.491. $\cos 3\varphi$. **5.492.** $\sin 3\varphi$.

5.493. $\cos 4\varphi$. **5.494.** $\sin 4\varphi$.

Пусть $a = re^{i\varphi}$, $a \neq 0$, — фиксированное комплексное число. Тогда уравнение $z^n = a$, $n \in \mathbb{N}$, имеет в точности n различных решений z_0, $z_1, \ldots, z_{n-1}$, причем эти решения даются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(здесь $\sqrt[n]{r}$ — действительное положительное число). Числа z_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, называются *корнями n-й степени* из комплексного числа a и обозначаются символом $\sqrt[n]{a}$.

Пример 2. Найти все корни 3-й степени из числа $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.

◁ Так как $a = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, то

$$(\sqrt[3]{a})_k = \sqrt[3]{4}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}k\right)} = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right)\right),$$

где $k = 0, 1, 2$.

При $k = 0$: $(\sqrt[3]{a})_0 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$.

При $k = 1$: $(\sqrt[3]{a})_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$.

При $k = 2$: $(\sqrt[3]{a})_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$. ▷

5.495. Найти и изобразить на комплексной плоскости все корни 2-й, 3-й и 4-й степени из единицы.

Найти все значения корней:

5.496. $\sqrt{i}$. **5.497.** $\sqrt[4]{-1}$. **5.498.** $\sqrt[9]{-9}$.

5.499. $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$. **5.500.** $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$.

5.501. $\sqrt[5]{-1-i}$. **5.502.** $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$.

5.503. $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$.

5.504. Доказать, что квадратные корни из комплексного числ могут быть найдены по формуле

$$\sqrt{z} = \sqrt{x+iy} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i\,\mathrm{sgn}\,y\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right).$$

Использование показательной формы комплексных чисел во многих случаях значительно упрощает вычисления.

Пример 3. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$S(\varphi) = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi, \quad \varphi \neq 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

◁ Так как $\sin\varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}$, то, используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем:

$$S(\varphi) = \operatorname{Im} e^{i\varphi} + \operatorname{Im} e^{i2\varphi} + \ldots + \operatorname{Im} e^{in\varphi} = \operatorname{Im}(e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \ldots + e^{in\varphi}) =$$

$$= \operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi}(1 - e^{in\varphi})}{1 - e^{i\varphi}} = \operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi + i\frac{n}{2}\varphi}(e^{-i\frac{n}{2}\varphi} - e^{i\frac{n}{2}\varphi})}{e^{i\frac{\varphi}{2}}(e^{-i\frac{\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}})} =$$

$$= \frac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}\operatorname{Im} e^{i\frac{n+1}{2}\varphi} = \frac{\sin(n\varphi/2)\sin((n+1)/2)\varphi}{\sin(\varphi/2)}. \ ▷$$

Привести к виду, удобному для логарифмирования:

5.505. $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi$.

5.506. $\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \ldots + \cos(2n-1)\varphi$.

5.507. $\sin\varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + \ldots + \sin(2n-1)\varphi$.

2. Многочлены и алгебраические уравнения. *Многочленом* (*полиномом* или *целой рациональной функцией*) n-й степени называется функция вида

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \tag{5}$$

где $z \in \mathbb{C}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты (вообще говоря, комплексные), причем $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Уравнение

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0, \tag{6}$$

называется *алгебраическим уравнением* n-й степени. Число z_0, для которого $p_n(z_0) = 0$, называется *корнем* многочлена (5) или уравнения (6).

Теорема Гаусса (основная теорема алгебры). *Всякий многочлен ненулевой степени имеет по крайней мере один корень* (вообще говоря, комплексный).

Число z_0 является корнем многочлена $p_n(z)$ в том и только в том случае, когда $p_n(z)$ делится без остатка на бином $z - z_0$, т. е.

$$p_n(z) = (z - z_0)q_{n-1}(z),$$

где $q_{n-1}(z)$ — многочлен $(n-1)$-й степени. Если $p_n(z)$ делится без остатка на $(z-z_0)^k$, $k \geqslant 1$, но не делится на $(z-z_0)^{k+1}$, то z_0 называется *корнем кратности* k многочлена $p_n(z)$; при этом

$$p_n(z) = (z - z_0)^k q_{n-k}(z),$$

где $q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

Теорема Гаусса может быть уточнена следующим образом: *многочлен n-й степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Если коэффициенты многочлена (5) — действительные числа и $z_0 = x_0 + iy_0$ — его комплексный корень, то сопряженное число $\overline{z}_0 = x_0 - iy_0$ — также корень этого многочлена, причем корни z_0 и $\overline{z}_0$ имеют одинаковую кратность (см. задачу 5.449).

Пусть многочлен $p_n(z)$ имеет корни $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ($m \leqslant n$) кратностей соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ($k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$). Тогда его можно разложить на линейные множители, т.е. справедливо тождество

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m}.$$

Если при этом коэффициенты многочлена — действительные числа, то, объединяя скобки, соответствующие комплексно сопряженным корням, можно разложить этот многочлен в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

Пример 4. Найти корни многочлена $z^6 + 2z^3 + 1$ и разложить его на множители.

◁ Так как $z^6+2z^3+1 = (z^3+1)^2$, то корнями этого многочлена являются корни 3-й степени из -1:

$$z_1 = -1;$$
$$z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$z_3 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При этом каждый корень имеет кратность $k = 2$. Разложение этого многочлена на линейные множители имеет вид

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z+1)^2\left(z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2\left(z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2.$$

Объединяя последние две скобки в один сомножитель, получим разложение на множители с действительными коэффициентами

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z+1)^2(z^2 - z + 1)^2. \ \triangleright$$

Решить квадратные уравнения:

5.508. $z^2 + 2z + 5 = 0.$ **5.509.** $4z^2 - 2z + 1 = 0.$

5.510. $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0.$

5.511. $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0.$

Решить двучленные уравнения:

5.512. $z^3 - 1 = 0.$ **5.513.** $z^3 + 1 = 0.$

5.514. $(z+1)^4 - 16 = 0.$ **5.515.** $(z+1)^4 + 16 = 0.$

Решить биквадратные уравнения:

5.516. $z^4 + 18z^2 + 81 = 0.$ **5.517.** $z^4 + 4z^2 + 3 = 0.$

5.518. $z^4 + 9z^2 + 20 = 0.$

5.519. $z^4 - (1+i)z^2 + 2(1+i) = 0.$

Решить трехчленные уравнения:

5.520. $z^6 + 4z^3 + 3 = 0.$ **5.521.** $z^8 + 15z^4 - 16 = 0.$

5.522*. Показать, что все корни уравнения

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{(1+ia)}{(1-ia)} \quad (a \in \mathbb{R})$$

действительны и различны.

Следующие многочлены разложить на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами:

5.523. $z^4 - 1.$ **5.524.** $z^4 + 1.$ **5.525.** $z^4 + z^2 + 1.$

5.526. $z^4+4z^3+11z^2+14z+10$; известен один корень $z_1 = -1+i$.

5.527. $z^5 + z^4 + z^3 - z^2 - z - 1$; известен двукратный корень $z_1 = z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5.528. $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100$; известен корень $z_1 = 1 + 2i$.

3. Предел последовательности комплексных чисел. Число a называют *пределом* последовательности комплексных чисел $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называют *сходящейся к бесконечности* и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, если для любого $E > 0$ существует номер $N(E)$ такой, что при $n > N(E)$ выполняется неравенство $|z_n| > E$.

5.529. Пусть $x_n = \operatorname{Re} z_n$ и $y_n = \operatorname{Im} z_n$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Re} a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \operatorname{Im} a$.

5.530. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b \neq \infty$. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = a + b$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = ab$.

5.531. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b \neq 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{a}{b}$.

Вычислить пределы:

5.532. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-i+\dfrac{1}{n}(1+i)\right)$. **5.533.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-in}{1+in}$.

5.534. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{3n+2}\cdot\dfrac{in^2}{n^2+n-4i}$. **5.535.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2i)(3+7in)}{(2-i)n^2+1}$.

5.536. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{i^n}{n}\right)$. **5.537.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}e^{in\frac{\pi}{4}}$.

5.538. $\lim\limits_{n\to\infty}(2i)^n$. **5.539.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n+i\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

5.540. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5i}-\dfrac{1}{25}+\ldots+\dfrac{1}{(5i)^n}\right)$.

5.541. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{i^k}{3^k}$. **5.542.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}+i\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$.

5.543. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(2-3i)^k}$. **5.544.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3+2i}{n}\right)^n$.

Доказать, что следующие последовательности ограничены, но расходятся:

5.545. $z_n=i^n$. **5.546.** $z_n=(-1)^n+i\dfrac{2-n}{2+n}$.

5.547. $z_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)e^{i\frac{n\pi}{2}}$. **5.548.** $z_n=\dfrac{1}{2}(i^n+(-1)^n)$.

Показать, что следующие последовательности неограничены, но не сходятся к бесконечности:

5.549. $z_n=n(1+i^n)$. **5.550.** $z_n=(e^{i\frac{\pi n}{2}}-i)\ln n$.

5.551. Пусть $r_n=|z_n|$ и $\varphi_n=\arg z_n$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$ $(0<|a|<\infty)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=|a|$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\arg a$ (при надлежащем выборе области главных значений аргументов).

Результат задачи 5.551 часто используется при вычислении пределов комплексных последовательностей.

Пример 5. Пусть φ — действительное число ($\varphi\neq 0$). Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}.$$

◁ Рассмотрим две действительные последовательности:

$$r_n = \left|\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{n/2},$$

$$\varphi_n = \arg\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = n\arg\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right) = n\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n}.$$

Вычислим их пределы:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{n^2/\varphi^2}\right)^{\varphi^2/(2n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi^2}{2n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{n\to\infty} n\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n} = \varphi\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\varphi/n)}{\varphi/n} = \varphi.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = 1\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{i\varphi}. \ \triangleright$$

5.552. Пусть $z = x+iy$. Доказать (см. пример 5), что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy} = e^z.$$

Доказать сходимость следующих последовательностей и найти их пределы:

5.553. $z_n = z^n$, $|z|<1$. **5.554.** $z_n = nz^n$, $|z|<1$.

5.555. $z_n = 1+z+\ldots+z^n$, $|z|<1$.

5.556. $z_n = \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$, $|z|>1$.

5.557. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+z_1+\ldots+z_1^n}{1+z_2+\ldots+z_2^n}$, если $|z_1|<1$ и $|z_2|<1$.

5.558. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n} = a.$$

Глава 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная

1. Определение производной. Дифференцирование явно заданных функций. Пусть $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — *приращение функции* $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее *приращению аргумента* Δx. *Производной* 1-го порядка (или *первой производной*) функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Числа

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

и

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

называются соответственно *левой* и *правой производными* функции $y = f(x)$ в точке x_0. Для существования производной $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы ее левая и правая производные в этой точке существовали и совпадали, т. е.

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Пример 1. Найти $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$ для функции $f(x) = |x|$.

◁ Имеем по определению

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

и

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Заметим, что функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x_0 = 0$. ▷

Производная функции $f(x)$, рассматриваемая на множестве тех точек, где она существует, сама является функцией. Процесс нахождения производной называют также *дифференцированием.*

Таблица производных основных элементарных функций:

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$, $a \neq 0$.
2. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$; $(e^x)' = e^x$.
3. $(\log_a x)' = \log_a e \cdot \dfrac{1}{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
4. $(\sin x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\sin x$.
6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
8. $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования функций:

I. Пусть C — постоянная и $f(x)$, $g(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда:

1. $(C)' = 0$.
2. $(f+g)' = f' + g'$.
3. $(Cf)' = Cf'$.
4. $(fg)' = f'g + fg'$.
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$, $g \neq 0$.

II. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $z = g\big(f(x)\big)$ в точке x_0 имеет производную, равную

$$z'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) \tag{2}$$

(*правило дифференцирования сложной функции*).

Пример 2. Найти производную функции $z = \log_3(\arcsin x)$.

◁ Полагая $z = \log_3 y$ и $y = \arcsin x$, имеем

$$z'(y) = \log_3 e \cdot \frac{1}{y} \quad \text{и} \quad y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда, согласно (2), получаем

$$z'(x) = \frac{\log_3 e}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \ \triangleright$$

Найти $\Delta f(x_0, \Delta x)$, если:

6.1. $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

6.2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}25$.

6.3. $f(x) = \lg x$, $x_0 = 100$, $\Delta x = -90$.

Найти $\Delta f(x_0, \Delta x)$ как функцию Δx, если:

6.4. $f(x) = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

◁ Имеем

$$\Delta f\left(\frac{\pi}{2}, \Delta x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - \sin\frac{\pi}{2} = \\ = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta x}{2}\right) = -2\sin^2\frac{\Delta x}{2}.\ ▷$$

6.5. $f(x) = x^2$, $x_0 = -1$.

6.6. $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$.

6.7. $f(x) = \log_2(x)$, $x_0 = 1$.

Пользуясь только определением производной, найти $f'(x)$:

6.8. $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

◁ Имеем:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin(-\Delta x)}{\Delta x \sin x \sin(x + \Delta x)} = \\ = -\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\sin x \sin(x + \Delta x)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.\ ▷$$

6.9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. **6.10.** $f(x) = \sqrt{x}$.

6.11. $f(x) = 2^x$. **6.12.** $f(x) = \log_2 x$.

6.13. Известно, что $f(0) = 0$ и существует предел $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. Доказать, что этот предел равен $f'(0)$.

6.14*. Доказать, что если $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.

Для заданной $f(x)$ найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$:

6.15. $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$, $x_0 = \pm 1$.

6.16. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 1, \\ -x^2 + 2x, & x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$.

◁ Имеем

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

и

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} -\frac{x^2+2x-1}{x-1} = -\lim_{x\to 1+0}(x-1) = 0. \ \triangleright$$

6.17. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^2 \ln x, & x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

6.18. $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$, $x_0 = 0$.

6.19. $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

6.20*. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывна при $x = 0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производной.

Найти производные следующих функций:

6.21. $y = 3 - 2x + \dfrac{2}{3}x^4$.

6.22. $y = -\dfrac{5x^5}{a^2}$.

6.23. $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$.

6.24. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

6.25. $y = \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$.

6.26. $y = (x^2-1)(x^2-4)(x^2+9)$.

6.27. $y = \dfrac{1+3x^2}{\sqrt{2\pi}}$.

6.28. $y = \dfrac{1}{x^3+3x-1}$.

6.29. $y = \dfrac{a}{\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{b}$.

6.30. $y = \dfrac{a+bx}{c+dx}$.

6.31. $y = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{1}{x}$.

6.32. $y = \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

6.33. $y = (\sqrt{x}-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right)$.

6.34. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[4]{x^3}$.

6.35. $y = \left(3\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[3]{x}\right)\sqrt[3]{x^4}$.

6.36. $y = \dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$.

6.37. $y = x^3 \operatorname{ctg} x$.

6.38. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{x^2}}$.

6.39. $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$.

6.40. $y = \sqrt{x} \sin x$.

6.41. $y = x\sqrt[3]{x^2}(2\ln x - 3^x)$.

6.42. $y = 3x^3 \log_2 x + \dfrac{x^2}{e^x}$.

6.43. $y = 2\sin x - 3\operatorname{tg} x$.

6.44. $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

6.45. $y = x^{3/2}\sqrt[3]{x^5 + a}$.

6.46. $y = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}}$.

6.47. $y = \sin \dfrac{3x}{2}$.

6.48. $y = 6\cos \dfrac{2x}{3}$.

6.49. $y = (1 + 4x^2)^3$.

6.50. $y = \sqrt[4]{(1 + 3x^2)^3}$.

6.51. $y = \sin^2 \dfrac{x}{2}$.

6.52. $y = \sqrt{1 + \sin 4x} - \sqrt{1 - \sin 4x}$.

6.53. $y = x \arcsin \ln x$.

6.54. $y = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$.

6.55. $y = \sqrt[4]{(1 + \sin^2 x)^3}$.

6.56. $y = x^2 e^{-2x}$.

6.57. $y = e^{x/3} \cos^2 \dfrac{x}{3}$.

6.58. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \dfrac{a}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$.

6.59. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$.

6.60. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}$.

6.61. $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} \dfrac{x}{2}}$.

6.62. $y = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}$.

6.63. $y = \cos^2\left(\sin \dfrac{x}{3}\right)$.

6.64. $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

6.65. $y = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$.

6.66. $y = \arccos \dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$.

6.67. $y = \sqrt{x}e^{x/2}$.

6.68. $y = \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$.

6.69. $y = 2^{x/\ln x}$.

6.70. $y = 2^{\sqrt{\sin^2 x}}$.

6.71. $y = 3^{2^x}$.

6.72. $y = \ln x \cdot \lg x - \ln a \cdot \log_a x$

6.73. $y = \log_2 \ln 2x$. **6.74.** $y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

6.75. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$. **6.76.** $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$.

Найти производные *гиперболических функций*:

6.77. $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (*гиперболический синус*),

6.78. $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (*гиперболический косинус*),

6.79. $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (*гиперболический тангенс*),

6.80. $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (*гиперболический котангенс*).

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е.

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Применение предварительного логарифмирования часто упрощает вычисление производной.

Пример 3. Найти производную функции $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$.

◁ Так как функция определена при $x \in [0,\ 1] \cup (2,\ +\infty)$, то

$$\ln y = \frac{1}{2}\bigl(\ln x + \ln|x-1| - \ln|x-2|\bigr).$$

Отсюда (см. пример 6.117)

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right),$$

т. е.

$$y' = (\ln y)' \cdot y = \frac{x^2 - 4x + 2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}. \ ▷$$

Пример 4. Найти производную *сложно-показательной* функции $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

◁ Логарифмируя, получим $\left(\text{так как } 1 + \dfrac{1}{x} > 0\right)$

$$\ln y = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Отсюда находим производные левой и правой частей

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}.$$

Следовательно,

$$y' = (\ln y)' \cdot y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right). \ \triangleright$$

Используя предварительное логарифмирование, найти производные следующих функций:

6.81. $y = \dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$.

6.82. $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$.

6.83. $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$.

6.84. $y = x^3\sqrt{\dfrac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}$.

6.85. $y = x^x$.

6.86. $y = x^{2^x}$.

6.87. $y = \sqrt{x\sqrt[3]{x}}$.

6.88. $y = (\ln x)^{1/x}$.

6.89. $y = (\sin x)^{\arcsin x}$.

6.90. $y = x^{x^x}$.

6.91. $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$.

6.92*. $y = x^{x^2} + x^{2^x} + 2^{x^x}$.

Вводя промежуточные переменные, вычислить производные заданных функций:

6.93*. $y = \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^2 x}\right)$.

6.94. $y = (\arccos x)^2 \ln(\arccos x)$.

6.95. $y = \dfrac{e^{-x^2}\arcsin\left(e^{-x^2}\right)}{\sqrt{1 - e^{-2x^2}}}$.

6.96. $y = \dfrac{1 - a^{2x}}{1 + a^{2x}}\operatorname{arctg} a^{-x}$.

6.97*. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leqslant 0, \\ ax + b, & x > 0. \end{cases}$$

Найти коэффициенты a и b так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и дифференцируема в любой точке.

6.98. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & |x| \geqslant 1, \\ ax^2 + b, & |x| < 1. \end{cases}$$

Найти коэффициенты a и b так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и дифференцируема в любой точке.

Найти производные следующих функций:

6.99. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$. **6.100.** $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

6.101. $y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

6.102. $y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$. **6.103.** $y = \dfrac{1}{\cos^n mx}$.

6.104. $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \left(\dfrac{x}{a}\right)^b$, $a,\ b > 0$.

6.105. $y = \ln(\ln^n mx)$. **6.106.** $y = \dfrac{1}{2\sqrt{6}} \ln \dfrac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

6.107. $y = \log_2 \sin\left(2\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. **6.108.** $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

6.109. $y = \log_x e$. **6.110.** $y = (\sin x)^{\cos x}$.

6.111. $y = \sqrt{x}^{\sin^2 x}$. **6.112.** $y = \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}}$.

6.113. $y = \ln(\operatorname{sh} x) + \dfrac{1}{2\operatorname{sh} x}$. **6.114.** $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.

6.115. $y = e^{-x}\operatorname{sh} ax$. **6.116.** $y = \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

6.117. $y = \ln|x|$.

◁ Функция $y = \ln|x|$ определена $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, и

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ \ln(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x < 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \ ▷$$

6.118. $y = \arcsin\dfrac{1}{|x|}$. **6.119.** $y = |\sin x|$.

6.120. $y = |\operatorname{arctg} x|$.

6.121. $y = [x]x$, где $[x]$ — целая часть числа x.

◁ Функция $y = [x]x$ определена $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Если $k \in \mathbb{Z}$, то $y = kx$ при $x \in [k,\ k+1)$. Поэтому

$$y' = k, \quad x \in (k,\ k+1),$$

а в точках $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$f'_-(k) = k - 1, \quad f'_+(k) = k. \ ▷$$

6.122. $y = \begin{cases} 1-x, & x \leqslant 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$ **6.123.** $y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geqslant 0. \end{cases}$

6.124. $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$

6.125. $y = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$.

6.126. $y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}$.

6.127. $y = a^{x^a}$. **6.128.** $y = (\log_x a)^x$.

6.129. $y = \sin\big(\sin(\sin x)\big)$. **6.130.** $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}$.

6.131. $y = \dfrac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}$.

6.132. $y = 3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$.

6.133. Доказать, что производная четной функции — функция нечетная, а производная нечетной функции — функция четная.

6.134. Доказать, что производная периодической функции есть функция также периодическая.

6.135*. Найти $f'(x_0)$, если $f(x) = (x-x_0)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемые функции. Найти производные следующих сложных функций:

6.136. $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$. **6.137.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

6.138. $y = \psi(x)^{\varphi(x)}$, $\psi(x) > 0$.

6.139. $y = \log_{\varphi(x)}\psi(x)$, $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) > 0$, $\varphi(x) \neq 1$.

$\lhd$ Перейдем к натуральным логарифмам:

$$y = \log_{\varphi(x)}\psi(x) = \frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}.$$

Отсюда находим

$$y' = \frac{\big(\psi'(x)/\psi(x)\big)\ln\varphi(x) - \big(\varphi'(x)/\varphi(x)\big)\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)} =$$

$$= \frac{1}{\ln\varphi(x)}\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - y\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right). \ \rhd$$

Пусть $f(x)$ — произвольная дифференцируемая функция. Найти y:

6.140. $y = f(\ln x)$. **6.141.** $y = \ln\big(f(x)\big)$.

6.142. $y = f(e^x)e^{f(x)}$.

$\triangleleft$ Имеем

$$y' = f'(e^x)e^x e^{f(x)} + f(e^x)e^{f(x)}f'(x) = e^{f(x)}\big(e^x f'(e^x) + f'(x)f(e^x)\big). \ \triangleright$$

6.143. $y = f\big(f(x)\big)$.

2. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически. Говорят, что функция $y = f(x)$, $x \in (a,\, b)$, *неявно задана* уравнением $F(x,\, y) = 0$, если для всех $x \in (a,\, b)$

$$F\big(x,\, f(x)\big) = 0. \tag{3}$$

Для вычисления производной функции $y = f(x)$ следует тождество (3) продифференцировать по x (рассматривая левую часть как сложную функцию x), а затем полученное уравнение разрешить относительно $f'(x)$.

Пример 5. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ неявно определяет на интервале $(-1,\, 1)$ две функции:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{1 - x^2}, \\ y_2(x) &= -\sqrt{1 - x^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Найти их производные, не используя явных выражений (4).

$\triangleleft$ Пусть $y(x)$ — любая из этих функций. Тогда, дифференцируя по x тождество

$$x^2 + y^2(x) = 1,$$

получим

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0.$$

Отсюда

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)},$$

т. е.

$$y_1'(x) = -\frac{x}{y_1(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y_2'(x) = -\frac{x}{y_2(x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \ \triangleright$$

Пример 6. Вывести правило дифференцирования обратной функции.

$\triangleleft$ Если $x = f^{-1}(y)$, $y \in E$, — функция, обратная к $y = f(x)$, $x \in D$, то для всех $y \in E$ выполнено равенство

$$f\big(f^{-1}(y)\big) - y = 0.$$

Иначе говоря, обратная функция $x = f^{-1}(y)$ есть функция, заданная неявно уравнением

$$f(x) - y = 0. \tag{5}$$

Для вычисления производной функции $x = f^{-1}(y)$ дифференцируем (5) по y:

$$f'\big(x(y)\big)x'(y) - 1 = 0,$$

откуда

$$x'(y) = \frac{1}{f'\big(x(y)\big)}. \ \triangleright$$

При неявном задании функций, а также для сложных функций будем для производной использовать также обозначения типа y'_x там, где необходимо уточнить, по какой переменной ведется дифференцирование.

6.144. Найти значение y'_x в точке $x = 1$, если

$$x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0, \quad y(1) = 1.$$

6.145. Найти y'_x в точке $(0,\ 1)$, если $e^y + xy = e$.

Найти y'_x для следующих функций, заданных неявно:

6.146. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ **6.147.** $x^4 + y^4 = x^2y^2.$

6.148. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ a > 0.$ **6.149.** $2y\ln y = x.$

6.150. $e^x\sin y - e^y\cos x = 0.$ **6.151.** $\sin(xy) + \cos(xy) = 0.$

6.152. $2^x + 2^y = 2^{x+y}.$ **6.153.** $x - y = \arcsin x - \arcsin y.$

6.154. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}.$ **6.155.** $xy = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}.$

6.156. $x^y = y^x.$ **6.157.** $a^{x/y} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^a.$

6.158. Доказать, что функция y, определенная уравнением $xy - \ln y = 1$, удовлетворяет также уравнению $y^2 + (xy-1)y' = 0$.

Найти производные функций, обратных к заданным:

6.159. $y = \operatorname{sh} x$.

$\triangleleft$ Имеем по определению $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Так как $(\operatorname{sh} x)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то функция $\operatorname{sh} x$ монотонно возрастает на всей действительной оси и, следовательно, имеет обратную, обозначаемую $\operatorname{arsh} x$. По правилу дифференцирования обратной функции получаем

$$x'_y = (\operatorname{arsh} y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Следовательно, переходя к обычным обозначениям, имеем

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \ \triangleright$$

6.160*. $y = \operatorname{ch} x$. **6.161.** $y = \arcsin 2^x$.

6.162. $y = 2x^2 - x,\ x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Пусть $y = \alpha(x)$ — функция, обратная к заданной $y = f(x)$. Выразить $\alpha'(x)$ через x и $\alpha(x)$, если:

6.163. $y = x^x$.

◁ Учитывая, что

$$(x^x)' = x^x \ln(x+1),$$

получаем:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{x^x(\ln x + 1)} = \frac{1}{y(\ln\alpha(y)+1)},$$

так как $x = \alpha(y)$. В обычных обозначениях

$$\alpha'(x) = \frac{1}{x(\ln\alpha(x)+1)}. \ \triangleright$$

6.164. $y = x + e^x$. **6.165.** $y = \frac{1}{2}x + x^3$.

6.166. $y = x + \log_2 x$. **6.167.** $y = x\ln x$.

Пусть заданы функции

$$x = \varphi, \quad y = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{6}$$

Если при этом $x = \varphi(t)$ на интервале (α, β) имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, то определена новая функция

$$y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)), \tag{7}$$

называемая функцией, *заданной параметрически* соотношениями (6). Дифференцируя (7) по x и используя правило дифференцирования обратной функции (пример 6), получаем

$$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{8}$$

Пример 7. Найти y'_x, если

$$x = \cos^2 t, \quad y = \sin t, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

◁ Так как $\varphi'_t = -2\cos t \sin t$, $\psi'_t = \cos t$, то по формуле (8) находим

$$y'_x = -\frac{1}{2\sin t}. \ \triangleright$$

Для функций, заданных параметрически, найти y'_x:

6.168. $x = 2t,\ y = 3t^2 - 5t,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

6.169. $x = t^3 + 2,\ y = 0{,}5t^2,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

6.170. $x = \dfrac{1}{t+1},\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2,\ t \neq -1$.

6.171. $x = 2^{-t},\ y = 2^{2t},\ t \in (-\infty, +\infty)$.

6.172. $x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi,\ \varphi \in (0, \pi)$.

6.173. $x = \operatorname{tg} t,\ y = \sin 2t + 2\cos 2t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6.174. $x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ y = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ t \in (0, +\infty)$.

6.175. $x = \ln(1+t^2),\ y = t - \operatorname{arctg} t,\ t \in (0, +\infty)$.

6.176. $x = 3\log_2 \operatorname{ctg} t,\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t,\ t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6.177. $x = \arcsin(t^2 - 1),\ y = \arccos\dfrac{t}{2},\ t \in (0, \sqrt{2})$.

6.178. $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}},\ y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}},\ t \in (1, +\infty)$.

6.179. $x = a\operatorname{sh} t,\ y = b\operatorname{ch} t,\ t \in (0, +\infty)$.

Найти y'_x в указанных точках:

6.180. $x = t\ln t,\ y = \dfrac{\ln t}{t},\ t = 1$.

6.181. $x = t(t\cos t - 2\sin t),\ y = t(t\sin t + 2\cos t),\ t = \dfrac{\pi}{4}$.

6.182. $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ t = \dfrac{\pi}{6}$.

6.183. $x = \dfrac{3at}{1+t^2},\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2},\ t = 2$.

3. Производные высших порядков. *Производной 2-го порядка* от функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, т. е.

$$y''(x) = \big(y'(x)\big)'.$$

Вообще *производной n-го порядка* (или *n-й производной*) называется производная от производной порядка $n-1$, т. е.

$$y^{(n)}(x) = \big(y^{(n-1)}(x)\big)', \quad n = 2, 3, \ldots$$

Для производной n-го порядка используется также обозначение $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Пример 8. Найти y'', если $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

◁ Имеем $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Следовательно,

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}. \ \triangleright$$

Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

6.184. $y = \cos^2 x$. **6.185.** $y = \operatorname{arctg} x^2$.

6.186. $y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^2}$. **6.187.** $y = e^{-x^2}$.

6.188. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **6.189*.** $y = x^{\sqrt{x}}$.

6.190. Найти $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, если $y(x) = e^{2x}\sin 3x$.

6.191. Найти $y'''(2)$, если $y = \ln(x-1)$.

6.192. Найти $y^{\mathrm{IV}}(1)$, если $y = x^3 \ln x$.

6.193. Найти $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, если $y = 2^{\sin x}\cos(\sin x)$.

Пусть $f(u)$ — дважды дифференцируемая функция. Найти y' и y'', если:

6.194. $y = f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. **6.195.** $y = \ln f(e^x)$.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дважды дифференцируемые функции. Найти y', y'', если:

6.196. $y = u^v$ $(u > 0)$.

◁ Имеем $\ln y = v \ln u$. Отсюда находим

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + \frac{v'}{u}u',$$

т. е.

$$y' = y\left(v'\ln u + \frac{v}{u}u'\right) = u^v\left(v'\ln u + \frac{v}{u}u'\right),$$

$$y'' = y'\left(v'\ln u + \frac{v}{u}u'\right) + y\left(v''\ln u + \frac{v'}{u}u' + \frac{v'u'u + vu''u - vu'^2}{u^2}\right) =$$

$$= u^v\left(\left(v\frac{u'}{u} + v'\ln u\right)^2 + v\frac{uu'' - u'^2}{u^2} + \frac{2u'v'}{u} + v''\ln u\right). \;\triangleright$$

6.197. $y = \sqrt{u^2 + v^2}$. **6.198.** $y = \ln\dfrac{u}{v}$.

Найти формулу для n-й производной заданных функций:

6.199. $y = x^m$, $m \in \mathbb{N}$. **6.200.** $y = a^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$.

6.201*. $y = \sin x$. **6.202.** $y = \ln x$.

6.203*. $y = \cos^2 x$. **6.204.** $y = \dfrac{1+x}{1-x}$.

Разлагая в линейную комбинацию более простых функций, найти указанные производные от заданных функций:

6.205. $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$, найти $y^{(n)}$.

$\triangleleft$ Преобразуем выражение к виду

$$y = \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

Так как

$$\left(\frac{1}{x \pm 1}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\frac{1}{(x \pm 1)^{n+1}}$$

(докажите!), то

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right). \;\triangleright$$

6.206. $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$, найти $y^{(50)}$.

6.207*. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, найти $y^{(20)}$.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные до n-го порядка включительно. Тогда для производной n-го порядка их произведения $u(x)v(x)$ справедлива **формула Лейбница**

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ и $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты (по определению $0! = 1$).

Применяя формулу Лейбница, найти производные указанных порядков от заданных функций:

6.208. $y = (x^2+x+1)\sin x$, найти $y^{(15)}$.

6.209. $y = (x^2-x)e^x$, найти $y^{(20)}$.

6.210. $y = \sin x \cdot e^{-x}$, найти $y^{(5)}$.

6.211. $y = x\log_2 x$, найти $y^{(10)}$.

6.212. $y = x\operatorname{sh} x$, найти $y^{(100)}$.

6.213*. Показать, что $(e^{ax}\cos bx)^{(n)} = r^n e^{ax}\cos(bx+n\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$.

6.214. Доказать, что $(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)} = (-1)^n \dfrac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.

6.215. Вычислить значение n-й производной функции $y = \dfrac{3x+2}{x^2-2x+5}$ в точке $x=0$.

◁ По условию имеем

$$y(x)(x^2-2x+5) = 3x+2.$$

Продифференцируем это тождество n раз, применяя формулу Лейбница. Тогда (для $n \geqslant 2$) получим

$$y^{(n)}(x)(x^2-2x+5) + ny^{(n-1)}(2x-2) + \frac{n(n-1)}{2}y^{(n-2)}(x)\cdot 2 = 0,$$

откуда при $x=0$

$$5y^{(n)}(0) - 2ny^{(n-1)}(0) + n(n-1)y^{(n-2)}(0) = 0,$$

или

$$y^{(n)}(0) = \frac{2}{5}ny^{(n-1)}(0) - \frac{n(n-1)}{5}y^{(n-2)}(0).$$

Мы получили рекуррентную формулу для определения n-й производной в точке $x = 0$ ($n \geqslant 2$). Значения $y(0)$ и $y'(0)$ найдем непосредственно:

$$y(0) = \frac{2}{5}, \quad y'(0) = \left.\frac{-3x^2 - 4x + 19}{(x^2 - 2x + 5)^2}\right|_{x=0} = \frac{19}{25}.$$

Затем, полагая последовательно $n = 2, 3, 4, \ldots$, с помощью рекуррентной формулы получим значения производных высших порядков.

Например,

$$y''(0) = \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot \frac{19}{25} - \frac{2 \cdot 1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{56}{125},$$

$$y'''(0) = \frac{2}{5} \cdot 3 \cdot \frac{56}{125} - \frac{3 \cdot 2}{5} \cdot \frac{19}{25} = -\frac{234}{625}. \ \triangleright$$

Применяя метод, описанный в задаче 6.215, найти производную 4-го порядка в точке $x = 0$ от заданной функции:

6.216. $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, $c \neq 0$. **6.217.** $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

6.218. Показать, что функция $y = \arcsin x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1 - x^2)y'' = xy'$.

6.219. Показать, что функция $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

6.220. Показать, что функция $y = e^{-x}\cos x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y^{(\mathrm{IV})} + 4y = 0$.

6.221. Показать, что функция $y = x^n\big(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\big)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x^2y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0$.

В задачах 6.222–6.226 найти производные 2-го порядка от функций, заданных неявно:

6.222. $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$, $a > 0$.

$\triangleleft$ Дифференцируя уравнение, определяющее функцию $y(x)$, получаем

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2 + y^2} = \frac{y'x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Отсюда

$$x + yy' = xy' - y \tag{9}$$

и, следовательно,

$$y' = \frac{x+y}{x-y}. \tag{10}$$

Дифференцируя (9) и используя найденное для y' выражение (10), получаем $y'' = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. ▷

6.223. $y^2 = 2px$. **6.224.** $y = 1 + xe^y$.

6.225. $y = \operatorname{tg}(x+y)$. **6.226.** $e^{x-y} = xy$.

6.227. Вывести формулу для второй производной функции, обратной к заданной функции $y = f(x)$.

6.228. Доказать, что если $(a+bx)e^{y/x} = x$, то $x^3y'' = (xy'-y)^2$.

Найти производные 2-го порядка следующих функций, заданных параметрически:

6.229. $x = \ln t,\ y = t^3,\ t \in (0, +\infty)$.

◁ Имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = 3t^3 \quad \text{и} \quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{9t^2}{1/t} = 9t^3.$$

Заметим, что в данном случае параметр t легко исключить из заданных уравнений, полагая $t = e^x$. Следовательно, выражение для y''_{xx} как функции от x имеет вид $y''_{xx} = 9e^{3x}$. ▷

В общем случае, если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то y''_{xx} вычисляется по формуле

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\big(\varphi'(t)\big)^3} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) \\ \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix}}{\big(\varphi'(t)\big)^3}.$$

6.230. $x = \sec t,\ y = \operatorname{tg} t,\ t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6.231. $x = \arcsin t,\ y = \ln(1-t^2),\ t \in (-1, 1)$.

6.232. $x = \operatorname{arctg} t,\ y = \ln(1+t^2),\ t \in (-\infty, +\infty)$.

6.233. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6.234. Показать, что функция $y(x)$, заданная параметрически уравнениями $x = \sin t$, $y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, при любых постоянных a и b удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1-x^2)y''_{xx} - xy'_x = 2y$.

4. Геометрические и механические приложения производной. Значение производной $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту $k = \operatorname{tg}\varphi$ касательной TT' к графику этой функции, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$ (рис. 3) (геометрический смысл производной).

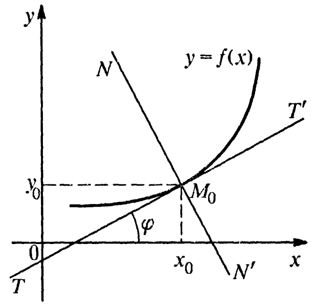


Рис. 3

Уравнение *касательной* TT' к графику функции $y = f(x)$ в его точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая NN', проходящая через точку касания M_0 перпендикулярно к касательной, называется *нормалью* к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. Уравнение нормали

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, если:

6.235. $y = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = -1$.

6.236. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $x_0 = -2$.

6.237. $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

6.238. $y = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = 0$.

6.239. $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

6.240. $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = -1$.

6.241. Написать уравнения касательной и нормали в точке $M_0(2, 2)$ к кривой $x = \dfrac{1+t}{t^3}$, $y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t}$, $t \neq 0$.

6.242. Написать уравнения касательных к кривой

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

в начале координат и в точке $t = \pi/4$.

6.243. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке с ординатой $y_0 = 3$.

6.244. Написать уравнение касательной к кривой $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ в точке $M_0(1, 1)$.

6.245. Под каким углом график функции $y = e^{x/2}$ пересекает прямую $x = 2$?

6.246. В какой точке M_0 кривой $y^2 = 2x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $4x - 3y + 2 = 0$?

6.247. Найти коэффициенты b и c в уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$, касающейся прямой $y = x$ в точке $M_0(1, 1)$.

6.248. Показать, что касательные к гиперболе $y = \dfrac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат параллельны между собой.

6.249. Составить уравнение нормали к графику функции $y = -\sqrt{x}+2$ в точке пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

6.250. Составить уравнение такой нормали к параболе $y = x^2 - 6x+6$, которая перпендикулярна к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

6.251. В точках пересечения прямой $x - y + 1 = 0$ и параболы $y = x^2 - 4x + 5$ проведены нормали к параболе. Найти площадь треугольника, образованного нормалями и хордой, стягивающей указанные точки пересечения.

6.252. Показать, что нормали к развертке окружности $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ являются касательными к окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

Углом ω *между кривыми* $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в их общей точке $M_0(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0.

6.253. Доказать, что $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0)}$.

Найти углы, под которыми пересекаются заданные кривые:

6.254. $y = x^2$ и $y = x^3$.

6.255. $y = (x-2)^2$ и $y = 4x - x^2 + 4$.

6.256. $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $x \in [0,\ 2\pi]$.

6.257. $x^2 + y^2 = 8ax$ и $y^2 = \dfrac{x}{2a-x}$.

6.258. Доказать, что сумма отрезков, отсекаемых касательной к кривой $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ на осях координат, для всех ее точек равна a.

6.259. Показать, что отрезок касательной к астроиде $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, заключенный между осями координат, имеет постоянную длину, равную a.

6.260. Найти расстояние от начала координат до нормали к линии $y = e^{2x} + x^2$, проведенной в точке с абсциссой $x = 0$.

6.261. Доказать, что отрезок касательной к *трактрисе*

$$y = \frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2-x^2},$$

заключенный между осью ординат и точкой касания, имеет постоянную длину.

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, то угол θ, образованный касательной TT' и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ точки касания M (рис. 4), определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r(\varphi)}{r'_\varphi}. \qquad (11)$$

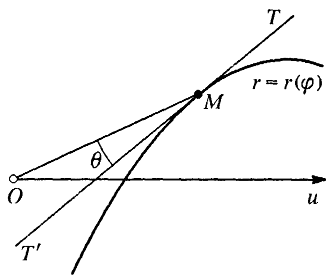


Рис. 4

6.262.** Вывести формулу (11).

6.263. Найти угол θ между касательной и радиус-вектором точки касания для логарифмической спирали $r = ae^{k\varphi}$.

6.264. Найти угол θ между касательной и радиус-вектором точки касания для лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Если $x = x(t)$ — функция, описывающая закон движения материальной точки, то первая производная $\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$ есть скорость, а вторая производная $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ — ускорение этой точки в момент времени t (механический смысл первой и второй производных).

6.265. Закон движения материальной точки по прямой имеет вид $x = (1/4)t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

а) В какие моменты времени точка находится в начале координат?

б) В какие моменты времени направление ее движения совпадает с положительным направлением оси Ox?

в) В какие моменты времени ее ускорение равно нулю?

6.266. Найти скорость гармонического колебания с амплитудой a, частотой ω и начальной фазой $\varphi = 0$.

6.267. Тело массой 4 движется прямолинейно по закону $x = t^2 + t + 1$. Определить кинетическую энергию тела в момент времени $t = 5$.

6.268. В какой момент $t \in [0, 2\pi]$ надо устранить действие сил, чтобы точка, участвующая в гармоническом колебании $x = \cos 3t$, продолжала двигаться равномерно со скоростью $v = 3/2$.

6.269. Точка движется по логарифмической спирали $r = e^{a\varphi}$. Найти скорость изменения полярного радиуса, если известно, что он вращается с постоянной скоростью ω.

6.270. Точка движется по окружности $r = 2a\cos\varphi$. Найти скорости изменения абсциссы и ординаты точки, если полярный радиус вращается с угловой скоростью ω.

6.271. В какой точке эллипса $16x^2+9y^2 = 400$ ордината убывает с той же скоростью, с какой абсцисса возрастает?

6.272. Радиус шара изменяется со скоростью v. С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?

6.273. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за время $T = 8$ с. Найти угловую скорость ω в момент времени $t = 32$ с после начала движения.

§ 2. Дифференциал

1. Дифференциал 1-го порядка. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение $\Delta y(x_0,\, \Delta x)$ может быть представлено в виде

$$\Delta y(x_0,\, \Delta x) = A\Delta x + o(\Delta x). \tag{1}$$

Главная линейная часть $A\Delta x$ приращения Δy называется *дифференциалом* этой функции в точке x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается символом $dy(x_0,\, \Delta x)$.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $f'(x_0)$; при этом справедливо равенство $A = f'(x_0)$.

Это утверждение позволяет называть дифференцируемой всякую функцию, имеющую производную. Именно в таком смысле мы и употребляли это выражение в § 1.

Выражение для дифференциала имеет вид

$$dy(x_0,\, dx) = f'(x_0)\, dx,$$

где принято обозначение $dx = \Delta x$. Из формулы (1) следует, что если $f'(x_0) \neq 0$, то при $\Delta x \to 0$ приращение функции и ее дифференциал dy в фиксированной точке являются эквивалентными бесконечно малыми, что позволяет записать приближенное равенство:

$$\Delta y \approx dy \quad \text{при} \quad |\Delta x| \ll 1. \tag{2}$$

Пример 1. Найти приближенно значение объема V шара радиуса $r = 1{,}02$ м.

◁ Так как $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, то, полагая $r_0 = 1$, $\Delta r = 0{,}02$ и используя формулу (2), получаем:

$$V(1{,}02) = V(1) + \Delta V(1,\, 0{,}02) \approx V(1) + V'(1)\cdot 0{,}02 =$$
$$= \frac{4}{3}\pi + 4\pi\cdot 0{,}02 \approx 4{,}43 \text{ м}^3. \ ▷$$

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал $dy(x_0, \Delta x)$ равен приращению ординаты касательной TT' к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ при приращении аргумента, равном Δx (рис. 5).

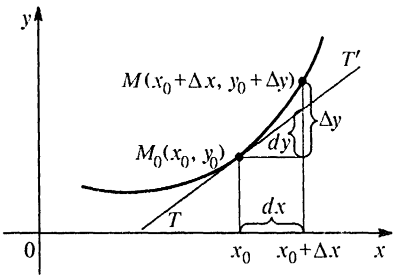


Рис. 5

6.274. Используя формулу $dy = y'dx$ и правила вычисления производных (см. § 1, п. 1), доказать следующие свойства дифференциала:

а) $d(C) = 0$, где C — постоянная;

б) $d(C_1 u + C_2 v) = C_1\,du + C_2\,dv$;

в) $d(uv) = u\,dv + v\,du$; г) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

6.275. Пусть $z(x) = z\big(y(x)\big)$ — сложная функция, образованная композицией функций $y = y(x)$ и $z = z(y)$. Доказать, что

$$dz(x,\, dx) = z'_y(y)\,dy(x,\, dx),$$

т. е. выражение для дифференциала сложной функции через дифференциал промежуточного аргумента имеет такую же форму, что и основное определение $dz(x,\, dx) = z'_x(x)\,dx$ (это утверждение называется *инвариантностью формы 1-го дифференциала*).

6.276. Доказать, что для линейной функции $y = ax + b$ приращение Δy и дифференциал dy совпадают.

6.277. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^3$, соответствующие значению аргумента $x_0 = 2$ и двум различным приращениям аргумента $(\Delta x)_1 = 0{,}1$ и $(\Delta x)_2 = 0{,}01$.

6.278. Найти приращение ΔS и дифференциал dS площади S квадрата, соответствующие приращению Δx стороны x. С помощью рисунка геометрически истолковать ΔS, dS и разность $\Delta S - dS$.

6.279. Материальная точка M движется прямолинейно по закону $s = f(t)$, где t — момент времени, а s — пройденный путь за промежуток времени от 0 до t. Дать механическое истолкование дифференциала пути ds, соответствующего промежутку времени $\Delta t = t_2 - t_1$.

6.280. Используя результат предыдущей задачи и формулу (2), найти приближенно путь Δs, пройденный точкой M за промежуток времени от $t_1 = 3$ до $t_2 = 4$, если закон движения точки M задан формулой $s = 1 + \operatorname{arctg} t$. Сопоставить ответ с точным значением Δs.

6.281. Для функций: а) $f(x) = x^n$ и б) $\varphi(x) = \sin x$ найти значения аргумента x, при которых дифференциалы этих функций не являются эквивалентными их приращениям при $\Delta x \to 0$.

6.282. Дан отрезок $[x_0,\ x_0 + \Delta x]$ изменения аргумента x функции $y = f(x)$; Δy и dy — соответствующие приращение и дифференциал функции y. Возможны ли равенства: а) $dy = \frac{3}{2}\Delta y$; б) $dy = \Delta y$; в) $dy = \frac{1}{2}\Delta y$ на всем этом отрезке?

6.283. Ребра куба увеличены на 1 см. При этом дифференциал dV объема V куба оказался равным 12 см^3. Найти первоначальную длину ребер.

6.284. Радиус круга увеличен на 1 см. Дифференциал площади круга оказался при этом равным 6π см^2. Найти первоначальную величину радиуса.

Найти дифференциалы указанных функций при произвольных значениях аргумента x и при произвольном его приращении $\Delta x = dx$:

6.285. $x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \dfrac{x}{a} - 5$.

6.286. $\sin x - x\cos x + 4$.

6.287. $x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1 + x^2}$.

6.288. $x\ln x - x + 1$.

6.289. $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} - 3$.

При вычислении дифференциалов неявно заданных функций удобно использовать основные свойства дифференциала, перечисленные в задачах 6.274 и 6.275.

Пример 2. Найти dy, если функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением

$$\ln\frac{y}{x} = x^2y^2. \tag{3}$$

◁ Перепишем (3) в виде тождества

$$\ln\frac{y(x)}{x} = x^2y^2(x)$$

и вычислим дифференциалы левой и правой части. Используя свойства дифференциала, находим

$$d\left(\ln\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{y/x}\,d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{y}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{1}{y}\,dy - \frac{1}{x^2}\,dx,$$

$$d(x^2y^2) = x^2\,d(y^2) + y^2\,d(x^2) = 2x^2y\,dy + 2xy^2\,dx.$$

Приравнивая полученные выражения, получаем

$$\frac{1}{y}\,dy - \frac{1}{x^2}\,dx = 2x^2y\,dy + 2xy^2\,dx.$$

Из этого уравнения, линейного относительно dy, находим окончательное выражение для dy через x, y и dx:

$$dy = \frac{y}{x^2}\frac{1+2x^3y^2}{1-2x^2y^2}\,dx.$$

Отсюда, в частности, может быть получено и выражение для производной неявной функции:

$$y' = \frac{y}{x^2}\frac{1+2x^3y^2}{1-2x^2y^2}. \ \triangleright$$

Найти дифференциалы следующих неявно заданных функций $y = y(x)$:

6.290. $y^5 + y - x^2 = 1$.

6.291. $x^4 + y^4 = x^2y^2$.

6.292. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

6.293. $e^y = x + y$.

6.294. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

6.295. $y = \cos(x+y)$.

6.296. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

6.297. $\cos(xy) = x$.

В задачах 6.298–6.302 произвести указанные приближенные вычисления, используя замену приращения Δy подходящей функции $y = f(x)$ дифференциалом dy этой функции при малой абсолютной величине приращения Δx аргумента x.

6.298. Вычислить приближенно: а) $\arcsin 0{,}05$; б) $\operatorname{arctg} 1{,}04$; в) $\ln 1{,}2$.

6.299. Обосновать приближенную формулу

$$\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

и вычислить по этой формуле $\sqrt[3]{25}$.

6.300. Найти приближенное значение функции $f(x) = e^{x^2-x}$ при $x = 1{,}2$.

6.301*. Найти приближенное выражение для приращения ΔV объема V прямого кругового цилиндра с высотой h при изменении радиуса основания r на величину Δr.

6.302*. По закону Клапейрона объем V, занимаемый газом, давление газа p и абсолютная температура T связаны формулой $pV = RT$, где R — газовая постоянная. Найти приближенное выражение для приращения ΔV объема V при изменении давления p на величину Δp, считая неизменной температуру T.

2. Дифференциалы высших порядков. Рассмотрим дифференциал $dy(x, \Delta_1 x) = f'(x)\Delta_1 x$ как функцию x при фиксированном $\Delta x = \Delta_1 x$. Предполагая, что функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x, найдем дифференциал от $dy(x, \Delta_1 x)$ при $\Delta x = \Delta_2 x$:

$$d\big(dy(x, \Delta_1 x)\big)\big|_{x,\, \Delta x = \Delta_2 x} = f''(x)\Delta_1 x \Delta_2 x.$$

Значение полученного выражения при $\Delta_1 x = \Delta_2 x = dx$ называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом 2-го порядка* функции $y = f(x)$ и обозначается символом $d^2 y(x, dx)$.

Таким образом,

$$d^2 y = f''(x)\, dx^2.$$

Аналогично

$$d^3 y = d(d^2 y) = f'''(x)\, dx^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x)\, dx^n.$$

Найти дифференциалы 2-го порядка указанных функций:

6.303. $y = a \sin(bx + c)$. **6.304.** $y = 3^{-x^2}$.

6.305. $y = \dfrac{\sin x}{x}$. **6.306.** $y = ax^2 + bx + c$.

6.307. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. **6.308.** $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$.

6.309. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. **6.310.** $y = \arcsin(a \sin x)$.

6.311. Доказать, что второй дифференциал сложной функции $z(x) = z\big(y(x)\big)$ выражается формулой

$$d^2 z = z''_{yy}\, dy^2 + z'_y\, d^2 y.$$

◁ Для первого дифференциала имеем (см. задачу 6.275) $dz = z'_y\, dy$, откуда, дифференцируя еще раз (по x, но используя инвариантность формы первого дифференциала), получим:

$$d^2 z = d(dz) = d(z'_y\, dy) = z'_y\, d(dy) + dy \cdot d(z'_y) = z'_y\, d^2 y + z''_{yy}\, dy^2. \ ▷$$

Этот пример показывает, что дифференциалы 2-го порядка (и более высоких порядков) не обладают инвариантностью формы, свойственной дифференциалам 1-го порядка (см. задачу 6.275).

Найти дифференциалы 2-го порядка следующих неявно заданных функций $y = y(x)$:

6.312. $xy + y^2 = 1$. **6.313.** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

6.314. $x^3 + y^3 = y$. **6.315.** $x = y - a \sin y$.

§ 3. Теоремы о дифференцируемых функциях. Формула Тейлора

1. Теоремы о среднем

Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема при $x \in (a, b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует по крайней мере одна точка $\zeta \in (a, b)$ такая, что $f'(\zeta) = 0$.*

Точки, в которых $f'(x) = 0$, называются *стационарными точками* функции $f(x)$.

Теорема Лагранжа. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема при $x \in (a, b)$, то существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) \qquad (\text{формула Лагранжа}).$$

Теорема Коши. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы при $x \in (a, b)$ и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (\text{формула Коши}).$$

6.316. Функция $f(x) = \dfrac{5 - x^2}{x^4}$ имеет на концах отрезка $[-1, 1]$ равные значения (проверьте!). Ее производная $f'(x)$ равна нулю только в двух точках $x = \pm\sqrt{10}$ (проверьте!), расположенных за пределами этого отрезка. Какова причина нарушения заключения теоремы Ролля?

6.317. Показать, что функция $f(x) = x^2 - 1$ на отрезке $[-1, 1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Найти все стационарные точки этой функции.

6.318. Пусть $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Доказать, что все три корня уравнения $f'(x) = 0$ действительны.

6.319*. Доказать, что уравнение $16x^4 - 64x + 31 = 0$ не может иметь двух различных действительных корней на интервале $(0, 1)$.

6.320*. Доказать, что уравнение $e^{x-1} + x - 2 = 0$, имеющее корень $x = 1$ (проверьте!), не имеет других действительных корней.

6.321*. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то функция $F(x) = \big(f(x) - f(a)\big)(b - a) - \big(f(b) - f(a)\big)(x - a)$ имеет по крайней мере одну стационарную точку на интервале (a, b).

6.322. Записав формулу Лагранжа для функции $f(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x$ на отрезке $[0, 1]$, найти на интервале $(0, 1)$ соответствующее значение ξ.

6.323. Доказать, что если производная $f'(x)$ тождественно равна нулю на интервале (a, b), то функция $f(x)$ постоянна на этом интервале.

6.324. Доказать, что если $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на интервале (a, b), то функция $f(x)$ монотонно возрастает (монотонно убывает) на этом интервале.

Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на интервале (a, b), если существует такое $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, что

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K \cdot |x_2 - x_1|$$

для любых x_1, $x_2 \in (a, b)$.

6.325. Доказать, что если $\sup\limits_{a<x<b} f'(x) = M$, то функция $f(x)$ на интервале (a, b) удовлетворяет условию Липшица с константой K, равной M.

6.326*. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ дважды дифференцируемы на интервале (a, b). Доказать, что если $f''(x) = \varphi''(x)$ на (a, b), то $f(x)$ и $\varphi(x)$ отличаются на линейное слагаемое.

6.327. Доказать, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на $[a, b]$, то $[f(b) - f(a)] \geqslant m(b - a)$, где $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f'(x)$.

6.328. Записав формулу Коши для $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ и $g(x) = x^2 + 4$ на отрезке $[0, 2]$, найти значение ξ.

2. Правило Лопиталя–Бернулли. Раскрытие неопределенностей типа $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Пусть при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ обе бесконечно малые или обе бесконечно большие. Тогда их отношение не определено в точке $x = a$, и в этом случае говорят, что оно представляет собой неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ или соответственно $\dfrac{\infty}{\infty}$. Однако это отношение может иметь предел в точке $x = a$, конечный или бесконечный. Нахождение этого предела называется раскрытием неопределенности. Одним из способов раскрытия неопределенностей типа $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ является правило Лопиталя–Бернулли, основанное на следующей теореме, носящей их имя.

Теорема. *Пусть в некоторой окрестности U точки $x = a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы всюду, кроме, может быть, самой точки $x = a$, и пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в U. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются одновременно либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to a$ и при этом существует предел отношения $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$*

их производных при $x \to a$, то тогда существует также и предел отношения $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ самих функций, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{1}$$

Правило применимо и в случае, когда $a=\infty$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg}5x}$ $\Big($т.е. раскрыть неопределенность типа $\dfrac{0}{0}\Big)$.

◁ Используя формулу (1), получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg}5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\big(1/(1+25x^2)\big)\cdot 5}=\frac{2}{5},$$

поскольку $e^{2x}\to 1$ и $\dfrac{1}{1+25x^2}\to 1$ при $x\to 0$. ▷

В некоторых случаях раскрытие неопределенностей типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ может потребовать неоднократного применения правила Лопиталя–Бернулли.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$ $\Big($т.е. раскрыть неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}\Big)$.

◁ Применяя дважды формулу (1), получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x/x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{3x^2}=0. \ ▷$$

На каждом этапе применения правила Лопиталя–Бернулли следует пользоваться упрощающими отношение тождественными преобразованиями, а также комбинировать это правило с любыми другими приемами вычисления пределов.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$ $\Big($т.е. раскрыть неопределенность типа $\dfrac{0}{0}\Big)$.

◁ Используем формулу (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1/\cos^2 x)-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2\cos^2 x}.$$

Освободим знаменатель дроби от множителя $\cos^2 x$, поскольку он имеет предел 1 при $x \to 0$. Развернем стоящую в числителе разность кубов и освободим числитель от сомножителя $1+\cos x+\cos^2 x$, имеющего предел 3 при $x \to 0$. После этих упрощений получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Применяем снова (1):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}.$$

Используя первый замечательный предел, получаем окончательный ответ $1/2$, уже не прибегая вновь к правилу Лопиталя–Бернулли. ▷

Раскрыть неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$:

6.329. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$.

6.330. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

6.331. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$, $m \neq n$, $a \neq 0$.

6.332. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$, $a \neq b$, $c \neq d$.

6.333. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$.

6.334. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\arcsin 3x}$.

6.335. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$.

6.336. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

6.337. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

6.338. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}$.

6.339. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$.

6.340. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

6.341. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$.

6.342. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{ctg} x - 1}{\sin 4x}$.

6.343. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$.

6.344. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^m}$, $m > 0$.

6.345. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x}$.

6.346. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\operatorname{tg}(\pi x/2)}{\ln(1-x)}$.

6.347. $\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{\cos x \cdot \ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}$.

6.348. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\ln(1-x) + \operatorname{tg}(\pi x/2)}{\operatorname{ctg} \pi x}$.

Раскрытие неопределенностей типа $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$. Для вычисления $\lim\limits_{x\to a} f(x)\varphi(x)$, где $f(x)$ — бесконечно малая, а $\varphi(x)$ — бесконечно большая при $x\to a$ (раскрытие неопределенности типа $0\cdot\infty$), следует преобразовать произведение к виду $\dfrac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ $\left(\text{неопределенность типа } \dfrac{0}{0}\right)$ или к виду $\dfrac{\varphi(x)}{1/f(x)}$ $\left(\text{неопределенность типа } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$ и далее использовать правило Лопиталя–Бернулли.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ (раскрыть неопределенность типа $0\cdot\infty$).

◁ Имеем:

$$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-(\pi/2)\left(1/\sin^2(\pi x/2)\right)}=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\cos(x-1)\sin^2\frac{\pi x}{2}=-\frac{2}{\pi}.\ \triangleright$$

Для вычисления $\lim\limits_{x\to a}\bigl(f(x)-\varphi(x)\bigr)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — бесконечно большие при $x\to a$ (раскрытие неопределенности типа $\infty-\infty$), следует преобразовать разность к виду $f(x)\left(1-\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\right)$, затем раскрыть неопределенность $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to a}\bigl(f(x)-\varphi(x)\bigr)=\infty$. Если же $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=1$, то получаем неопределенность типа $\infty\cdot 0$, рассмотренную выше.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)$ (раскрыть неопределенность типа $\infty-\infty$).

◁ Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln^3 x}{x}\right).$$

Так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln^2 x\cdot(1/x)}{1}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=$$

$$=3\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot(1/x)}{1}=6\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=6\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=6\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)=+\infty.\ \triangleright$$

Раскрыть неопределенности типа $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$:

6.349. $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1)$.

6.350. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$.

6.351. $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$.

6.352. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln^3 x$.

6.353. $\lim\limits_{x\to\pi} (\pi - x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

6.354. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + e^{-x} - 2)\operatorname{ctg} x$.

6.355. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2}$.

6.356. $\lim\limits_{x\to 1} (x - 1)\operatorname{ctg}\pi(x - 1)$.

6.357. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{a}{x}$.

6.358. $\lim\limits_{x\to 1+0} \ln x\cdot\ln(x - 1)$.

6.359. $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$.

6.360. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

6.361. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.

6.362. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

6.363. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$.

Раскрытие неопределенностей типа 0^0, ∞^0, 1^∞. Во всех трех случаях имеется в виду вычисление предела выражения $\big(f(x)\big)^{\varphi(x)}$, где $f(x)$ есть в первом случае бесконечно малая, во втором случае — бесконечно большая, в третьем случае — функция, имеющая предел, равный единице. Функция же $\varphi(x)$ в первых двух случаях является бесконечно малой, а в третьем случае — бесконечно большой.

Поступаем следующим образом. Логарифмируя предварительно $y = \big(f(x)\big)^{\varphi(x)}$, получаем равенство

$$\ln y = \varphi(x)\ln f(x) \tag{2}$$

и находим предел $\ln y$, после чего находится и предел y. Во всех трех случаях $\ln y$ в силу (2) является неопределенностью типа $0\cdot\infty$ (проверьте!), метод раскрытия которой изложен выше.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ (раскрыть неопределенность типа 1^∞).

◁ Введем обозначение $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{2x}$. Тогда $\ln y = 2x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ является неопределенностью типа $\infty\cdot 0$. Преобразуя выражение $\ln y$ к виду

$$\ln y = 2\frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x},$$

находим по правилу Лопиталя–Бернулли

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(1/(1+1/x)\big)(-1/x^2)}{-1/x^2} = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+1/x} = 2.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = e^2. \ \triangleright$$

Раскрыть неопределенности типа 0^0, ∞^0, 1^∞:

6.364. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}$.

6.365. $\lim\limits_{x\to+0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$.

6.366. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (\pi-2x)^{\cos x}$.

6.367. $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{x^{\ln(e^x-1)}}$.

6.368. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$.

6.369. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2^x)^{1/x}$.

6.370. $\lim\limits_{x\to+0} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$.

6.371. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

6.372. $\lim\limits_{x\to1} x^{1/(1-x)}$.

6.373. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

6.374. $\lim\limits_{x\to0} (\cos 2x)^{3/x^2}$.

6.375. $\lim\limits_{x\to0} (e^x+x)^{1/x}$.

6.376. $\lim\limits_{x\to a} \left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

6.377. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$.

6.378. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

3. Формула Тейлора. Если функция $y = f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности $U_\delta(a) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$ точки a, то для всякого $x \in U_\delta(a)$ справедлива *формула Тейлора* (порядка n)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0<\theta<1$$

(остаточный член в *форме Лагранжа*). Таким образом, формула Тейлора порядка n позволяет представить функцию $y = f(x)$ в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена.

В частности, при $a = 0$ имеем

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$0 < \theta < 1$ (формула Маклорена).

6.379. Многочлен $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ разложить по степеням двучлена $x + 1$.

6.380. Для многочлена $x^4 + 4x^2 - x + 3$ написать формулу Тейлора 2-го порядка в точке $a = 1$. Записать остаточный член в форме Лагранжа и найти значение θ, соответствующее следующим значениям аргумента: а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = 2$.

6.381. Пусть $P(x)$ — многочлен 4-й степени, $P(2) = -1$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 2$, $P'''(2) = -12$, $P^{(\mathrm{IV})}(2) = 24$. Вычислить $P(-1)$, $P'(0)$ и $P''(1)$.

Для заданных функций написать формулу Маклорена n-го порядка:

6.382. $y = e^x$. **6.383.** $y = \sin x$.

6.384. $y = \cos x$. **6.385.** $y = \ln(1 + x)$.

6.386*. $y = \operatorname{arctg} x$. **6.387.** $y = (1 + x)^\alpha$.

Используя формулы Маклорена, полученные в задачах 6.382–6.387, написать первые n членов формулы Маклорена (без остаточного члена) для следующих функций:

6.388*. $y = e^{-x^2/2}$. **6.389*.** $y = \sin^2 x$. **6.390.** $y = \sin\dfrac{5x}{2}$.

6.391. $y = \ln(4 + x^2)$. **6.392.** $y = \sqrt[3]{8 + x^2}$.

6.393. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = x/(x - 1)$ в точке $a = 2$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

6.394. Написать формулу Тейлора 2-го порядка для функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке $a = 0$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 2-й степени.

6.395. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = \arcsin x$ в точке $a = 0$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

6.396. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = 1/\sqrt{x}$ в точке $a = 1$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

Формула Тейлора широко используется при вычислении значений функции с заданной степенью точности. Пусть, например, требуется вычислить значение функции $f(x)$ в точке x_0 с абсолютной погрешностью, не превосходящей ε, если известно значение этой функции и ее производных в точке a. Из формулы Тейлора следует, что

$$f(x_0) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x_0 - a) + \ldots + \frac{f^{(n_0)}(a)}{n_0!}(x_0 - a)^{n_0},$$

где n_0 — минимальный из номеров n, для которых

$$|R_{n+1}(x_0)| < \varepsilon.$$

Пример 7. Вычислить число e с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001.

◁ Применяя формулу Маклорена к функции $f(x) = e^x$, получаем

$$e = f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Наименьшее значение n, удовлетворяющее условию $\dfrac{e^\theta}{(n+1)!} < 0{,}001$, где $0 < \theta < 1$, равно $n_0 = 6$. Следовательно,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} = 2{,}718. \ \triangleright$$

6.397. Вычислить с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001, приближенные значения следующих чисел:

а) $\sin 1$; б) $\sqrt{e}$; в) $\ln 1{,}05$; г) $\sqrt[5]{33}$.

6.398. Выяснить происхождение приближенных равенств:

а) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2$, $|x| < 1$;

б) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2$, $|x| < 1$,

и найти их предельные абсолютные погрешности.

Остаточный член в формуле Тейлора может быть записан в форме Пеано

$$R_{n+1}(x) = o\big(|x-a|^n\big),$$

использование которой полезно при вычислении пределов.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{5x^2 + 7x^3}$.

◁ Так как $1 - \cos^3 x = (1-\cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)$, а $5x^2 + 7x^3 \sim 5x^2$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{5x^2 + 7x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{3(1-\cos x)}{5x^2}.$$

Заменяя $\cos x$ его разложением по формуле Маклорена $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3} = \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2+o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2},$$

поскольку $\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\sim\frac{x^2}{2}$ при $x\to 0$. Окончательно

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3} = \frac{3}{10}. \ \triangleright$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\sin(2x-2)}{x-1+\sin(3x-3)}$.

$\triangleleft$ По формуле Тейлора

$$\sin(2x-2) - \sin 2(x-1) = \frac{2(x-1)}{1!} + o(|x-1|),$$

$$\sin(3x-3) = \frac{3(x-1)}{1!} + o(|x-1|).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\sin(2x-2)}{x-1+\sin(3x-3)} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)-o(|x-1|)}{4(x-1)+o(|x-1|)}.$$

Отбрасывая бесконечно малые высших порядков, т. е. переходя в числителе и в знаменателе к эквивалентным бесконечно малым при $x\to 0$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\sin(2x-2)}{x-1+\sin(3x-3)} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{4(x-1)} = -\frac{1}{4}. \ \triangleright$$

6.399. Показать, что разложение по формуле Маклорена для функций $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $e^x - 1$ и $\ln(1+x)$ можно записать в виде $x + o(|x|)$ и что при $x\to 0$ все эти функции эквивалентны бесконечно малой $\alpha(x) = x$ (и, следовательно, эквивалентны между собой).

6.400. Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2+x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3+x^4}$.

§ 4. Исследование функций и построение графиков

1. Возрастание и убывание функции. Экстремум. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в интервале (a, b), если из неравенства $x_1 < x_2$, где $x_1, x_2 \in (a, b)$, следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ возрастает на (a, b); если же $f'(x) < 0$ при всех $x \in (a, b)$, то $f(x)$ убывает на этом интервале.

В простейших случаях область определения функции $y = f(x)$ можно разбить на конечное число *интервалов монотонности*. Каждый из интервалов монотонности ограничен *критическими точками*, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.

Если существует такая окрестность $U_0(x_0)$ точки x_0, что для всякой точки $x \neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ (или $f(x) < f(x_0)$), то точка x_0 называется *точкой минимума* (*максимума*) функции $y = f(x)$, а число $f(x_0)$ — *минимумом* (*максимумом*) этой функции. Точки минимума и максимума функции называются ее *точками экстремума*.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, т. е. x_0 — критическая точка этой функции.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Достаточные условия экстремума непрерывной функции. 1) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ критической точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки. Если при этом в интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ производная $f'(x)$ имеет противоположные знаки, то x_0 — точка экстремума, причем, если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 — точка максимума, а если $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 — точка минимума. Если же $f'(x)$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, сохраняет знак, то точка x_0 не является точкой экстремума.

2) Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в критической точке x_0 и в некоторой ее окрестности. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума. Если же $f''(x_0) = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Пример 1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

◁ Находим производную:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3} & \text{при} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), \\ \dfrac{2-x}{x^3} & \text{при} \quad x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Приравнивая ее нулю, получаем $x = 2$. Таким образом, критическими точками (с учетом тех точек, где производная не существует) являются: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Они разбивают область определения $f(x)$ на четыре интервала монотонности: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, +\infty)$. Так как $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, то $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, 2)$, убывает на интервалах $(0, 1)$ и $(2, +\infty)$, в точке $x_3 = 2$ достигает максимума ($f(2) = 1/4$), а в точке $x_2 = 1$ — минимума ($f(1) = 0$). Полученные результаты удобно свести в следующую таблицу:

Таблица 4.1

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$
$f'(x)$	>0	не сущ.	<0	не сущ.	>0	0	<0

Заметим, что в рассматриваемом примере первое достаточное условие позволяет определить характер каждой из критических точек данной функции. В то же время второе достаточное условие неприменимо в точке x_2, так как в этой точке не существует первая производная. ▷

6.401*. Доказать следующее обобщение второго достаточного условия экстремума. Пусть x_0 — критическая точка функции $f(x)$, и первая из не равных нулю производных этой функции в точке x_0 имеет порядок k. Если k — четное число, то x_0 является точкой экстремума, причем точкой максимума, если $f^{(k)}(x_0) < 0$, и точкой минимума, если $f^{(k)}(x_0) > 0$. Если же k — нечетное число, то экстремума в точке x_0 нет.

6.402. Исследовать на экстремум в точке x_0 функцию $f(x) = (x - x_0)^k \varphi(x)$, где $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $\varphi(x_0) \neq 0$.

6.403*. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что функция $f(x)$ имеет в точке $x_0 = 0$ минимум, а функция $g(x)$ не имеет в точке x_0 экстремума, хотя

$$f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для указанных функций найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума:

6.404. $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

6.405. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$. **6.406.** $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

6.407. $y = x - 2\sin x$. **6.408.** $y = x - 2\ln x$.

6.409. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$. **6.410.** $y = e^x \cos x$.

6.411. $y = x^x$. **6.412.** $y = \operatorname{ch}^3 x + 1$.

Наибольшее (*наименьшее*) значение непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a,\ b]$ достигается или в критических точках, или на концах этого отрезка.

Определить наибольшее M и наименьшее m значения следующих функций на указанных отрезках (а если отрезок не указан, то во всей области определения):

6.413. $y = -3x^4 + 6x^2;\ [-2,\ 2]$. **6.414.** $y = x + 2\sqrt{x};\ [0,\ 4]$.

6.415. $y = \dfrac{x-1}{x+1};\ [0,\ 4]$. **6.416.** $y = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2};\ [0,\ 1]$.

6.417. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1};\ [0,\ 1]$.

6.418. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x};\ [0,\ 1]$.

6.419. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **6.420.** $y = xe^{-x^2/2}$.

Доказать следующие неравенства:

6.421*. $e^x > 1 + x,\ x \neq 0$. **6.422.** $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2},\ x \neq 0$.

6.423. $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 1 + \dfrac{x^2}{2},\ x \neq 0$.

6.424. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x,\ x \in (0,\ \pi/2)$.

6.425. Два тела движутся с постоянными скоростями v_1 м/с и v_2 м/с. Движение происходит по двум прямым, образующим угол $\pi/2$, в направлении к вершине этого угла, от которой в начале движения первое тело находилось на расстоянии a м, а второе — на расстоянии b м. Через сколько секунд после начала движения расстояние между телами будет наименьшим?

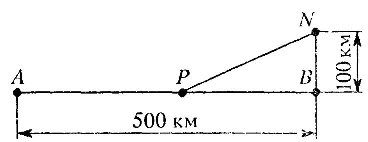


Рис. 6

6.426. Для доставки продукции завода N в город A (рис. 6) строится шоссе NP, соединяющее завод с железной дорогой AB, проходящей через город A. Стоимость перевозок по шоссе вдвое больше, чем по железной дороге. К какому пункту P нужно провести шоссе, чтобы общая стоимость перевозок продукции завода N в город A по шоссе и по железной дороге была наименьшей?

6.427. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом (рис. 7). Задан периметр p этой фигуры. При каких размерах x и y окно будет пропускать наибольшее количество света?

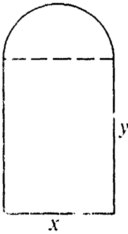


Рис. 7

6.428. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. При каком угле α наклона боковых стенок к днищу желоба площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

6.429. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник, основание которого лежит на основании треугольника, а две вершины — на боковых сторонах. Найти наибольшую площадь вписанного прямоугольника.

6.430. Периметр осевого сечения цилиндра равен $6a$. Найти наибольший объем такого цилиндра.

6.431. Цилиндр вписан в конус с высотой h и радиусом основания r. Найти наибольший объем вписанного цилиндра.

6.432. Найти наименьший объем конуса, описанного около шара радиуса r.

6.433. Найти наибольший объем конуса при заданной длине l его образующей.

6.434. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса r.

6.435. На параболе $y = x^2$ найти точку N, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

6.436. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник с наибольшей площадью. Определить его основание x и высоту y.

6.437. Отрезок длины a разделить на две части так, чтобы сумма площадей квадратов, построенных на этих частях, была наименьшей.

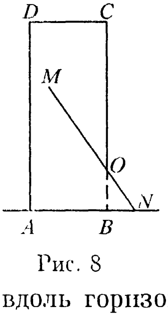


Рис. 8

6.438. Коническая воронка, радиус основания которой R, а высота H, наполнена водой. В воронку погружается шар. Каким должен быть радиус шара r, чтобы объем воды, вытесненный из воронки погруженной частью шара, был наибольшим?

6.439. Определить наименьшую высоту $h = |OB|$ двери вертикальной башни $ABCD$, чтобы через эту дверь в башню можно было внести жесткий стержень MN длины l, конец которого N скользит вдоль горизонтальной прямой AB. Ширина башни $|AB| = d < l$ (рис. 8).

2. Направление выпуклости. Точки перегиба. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз* (или *вогнутым вверх*) на интервале (a, b), если дуга кривой на этом промежутке расположена выше касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $x \in (a, b)$.

Если же на интервале (a, b) всякая касательная располагается выше дуги кривой, то график дифференцируемой функции на этом интервале называется *выпуклым вверх* (или *вогнутым вниз*) (на рис. 9 график функции $y = f(x)$ является выпуклым вниз на интервале (a, x_0) и выпуклым вверх на интервале (x_0, b)).

Если функция дважды дифференцируема на (a, b) и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то ее график является выпуклым вниз (вверх) на этом интервале.

В простейших случаях область определения функции $f(x)$ можно разбить на конечное число интервалов с постоянным направлением выпуклости. Каждый из этих интервалов ограничен точками, в которых

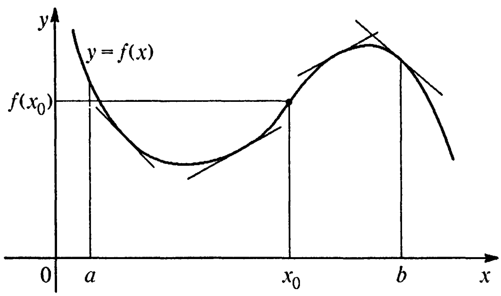


Рис. 9

$f''(x) = 0$, либо $f''(x)$ не существует. Точка $\big(x_0, f(x_0)\big)$, в которой направление выпуклости графика функции меняется на противоположное, называется *точкой перегиба* (см. рис. 9).

Достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности $U_0(x_0)$ точки x_0, в которой $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Если при этом в интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ производная $f''(x)$ имеет противоположные знаки, то x_0 — точка перегиба.

Пример 2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

$\lhd$ Находим вторую производную:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2(3-x)}{x^4}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), \\ \dfrac{2(x-3)}{x^4}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Следовательно, критическими точками первой производной являются точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. При этом в точках x_1 и x_2 вторая производная не существует (в частности, $f''_-(1) = 4$, а $f''_+(1) = -4$), а в точке x_3 она равна нулю.

Получаем четыре интервала выпуклости: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$. Исследуя знак второй производной в каждом из этих интервалов, выводим, что график функции является выпуклым вниз на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(3, +\infty)$ и выпуклым вверх на интервале $(1, 3)$. Следовательно, точки x_2 и x_3 являются точками перегиба графика функции, а x_1 не является. Полученные результаты удобно свести в следующую таблицу:

Таблица 4.2

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f(x)$	вып. вниз	$+\infty$	вып. вниз	0	вып. вверх	$\frac{2}{9}$	вып. вниз
$f''(x)$	> 0	не сущ.	> 0	не сущ.	< 0	0	> 0

Найти интервалы выпуклости графика функции $y = f(x)$, точки перегиба и угловые коэффициенты k касательных в точках перегиба:

6.440. $y = x^7 + 7x + 1$. **6.441.** $y = x^4 + 6x^2$.

6.442. $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3$. **6.443.** $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

6.444. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$. **6.445.** $y = xe^{2x} + 1$.

6.446. $y = x\ln|x|$. **6.447.** $y = x^3 \ln x + 1$.

6.448. При каких значениях a и b тока $(1, 3)$ является точкой перегиба кривой $y = ax^3 + bx^2$?

6.449. При каком выборе параметра h *кривая вероятности*

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}, \quad h > 0,$$

имеет точки перегиба с абсциссами $x = \pm 6$?

6.450. Показать, что кривая $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

6.451*. Показать, что точки перегиба кривой $y = x\sin x$ лежат на кривой $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

3. Асимптоты. Пусть для функции $y = f(x)$ существует такая прямая, что расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к нулю при бесконечном удалении точки M от начала координат. Тогда такая прямая называется *асимптотой* графика функции.

Если при этом координата x точки M стремится к конечному числу a, то полупрямая $x = a$ ($y > 0$ либо $y < 0$) является вертикальной асимптотой. Для существования вертикальной асимптоты в точке $x = a$

необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ был равен бесконечности.

Непрерывные функции не имеют вертикальных асимптот.

Если же координата x точки M стремится к $+\infty$ или $-\infty$, то имеем наклонную асимптоту $y = kx+b$, для существования которой необходимо и достаточно существование двух пределов

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b.$$

При этом указанные пределы могут быть различными при $x \to +\infty$ (для правой наклонной асимптоты) и при $x \to -\infty$ (для левой наклонной асимптоты).

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

◁ Так как функция непрерывна на всей оси, кроме точки $x = 0$, то вертикальная асимптота может существовать лишь в этой точке.

Имеем:

$$\lim_{x\to\pm 0} \frac{|x-1|}{x^2} = +\infty,$$

и, следовательно, прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты. Так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x-1|/x^2}{x} = 0 = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{|x-1|}{x^2} - 0\cdot x\right) = 0 = b,$$

то прямая $y = 0\cdot x + 0 = 0$ является одновременно и правой, и левой наклонной (в данном случае горизонтальной) асимптотой. ▷

Найти асимптоты графиков указанных функций:

6.452. $y = \sqrt[5]{\dfrac{x}{x-2}}$. **6.453.** $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

6.454. $y = \dfrac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$. **6.455.** $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$.

6.456. $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$. **6.457.** $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

6.458. $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$. **6.459.** $y = x \operatorname{arcsec} x$.

6.460. Доказать, что график целой рациональной функции $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $n \geqslant 2$, не имеет никаких асимптот.

4. Построение графиков функций. Для построения графика функции $y = f(x)$ с непрерывной второй производной (всюду в области определения функции кроме, быть может, конечного числа точек) сначала проводим элементарное исследование, выясняющее некоторые особенности функции (если они имеются): симметрия, периодичность, постоянство знака, нули, точки пересечения с осью Oy, точки разрыва и т. п. Затем, используя первую и вторую производные, находим точки экстремума и перегиба, интервалы монотонности и выпуклости, а также асимптоты.

Пример 4. Построить график функции $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

$\lhd$ Функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x = 0$, всюду неотрицательна и равна нулю лишь в точке $x = 1$. Ее исследование проведено в примерах 1–3. Результат этого исследования полезно свести в одну таблицу — объединение таблиц 4.1 и 4.2. При этом следует вычислить и записать в соответствующую клетку таблицы $f'(3) = -1/27$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в точке перегиба.

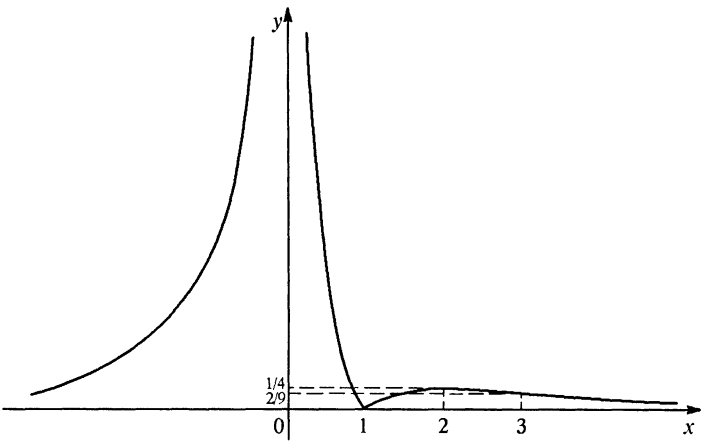


Рис. 10

Рекомендуется также вычислить $f'_-(1) = -1$ и $f'_+(1) = 1$ — угловые коэффициенты левой и правой касательных в точке $(1, 0)$ графика. Эти данные помогают точнее построить график функции, приведенный на рис. 10. $\rhd$

Пример 5. Построить график функции $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

$\lhd$ Функция определена и непрерывна на всей действительной оси и обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Находим первую производную

$$y' = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}} = \frac{x - 1/3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}.$$

Приравнивая ее нулю, получаем $x = 1/3$. Таким образом, критическими точками функции являются: $x_1 = 0$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 1$ (в точках $x_1 = 0$ и $x_3 = 1$ производная не существует). Эти точки разбивают область определения на четыре интервала монотонности $(-\infty, 0)$, $(0, 1/3)$, $(1/3, 1)$,

$(1, +\infty)$. Так как $y'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/3) \cup (1, +\infty)$, то $y(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty, 1/3)$ и $(1, +\infty)$. Аналогично рассуждая, находим, что $y'(x) < 0$ при $x \in (1/3, 1)$ и, следовательно, функция на этом интервале убывает. В точке $x_2 = 1/3$ функция достигает максимума $\left(y_{\max}(1/3) = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{4} \approx 0{,}529\right)$, а в точке $x_3 = 1$ — минимума $(y_{\min}(1) = 0)$.

Находим теперь вторую производную $y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5(x-1)^4}}$. Критическими точками первой производной являются $x_1 = 0$ и $x_3 = 1$ (вторая производная в этих точках не существует). Получаем три интервала выпуклости исходной функции: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. В первом интервале функция выпукла вниз (так как $y'' > 0$ при $x < 0$), а во втором и третьем — выпукла вверх ($y'' < 0$ при $x > 0$, кроме точки $x = 1$). Следовательно, $(0, 0)$ является точкой перегиба графика функции (с вертикальной касательной).

Результаты проведенных исследований сводим в таблицу:

Таблица 4.3

<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty, 0)$</td><td>0</td><td>$(0, 1/3)$</td><td>$1/3$</td><td>$(1/3, 1)$</td><td>1</td><td>$(1, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>> 0</td><td>не сущ.</td><td>> 0</td><td>0</td><td>< 0</td><td>не сущ.</td><td>> 0</td></tr>
<tr><td>y''</td><td>> 0</td><td>не сущ.</td><td colspan="3">< 0</td><td>не сущ.</td><td>< 0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">y</td><td>$\nearrow$</td><td rowspan="2">0</td><td>$\nearrow$</td><td>$\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$</td><td>$\searrow$</td><td rowspan="2">0</td><td>$\nearrow$</td></tr>
<tr><td>вып. вниз</td><td colspan="3">вып. вверх</td><td>вып. вверх</td></tr>
</table>

Для уточнения поведения функции в окрестности точки $x = 1$ заметим, что $f'_-(1) = -\infty$, $f'_+(1) = +\infty$, т. е. в точке $(1, 0)$ графика функции левая и правая касательные совпадают, образуя вертикальную касательную.

Наконец, определим асимптоты. Так как функция непрерывна на всей оси, то вертикальные асимптоты отсутствуют. Для определения наклонных асимптот находим сначала

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = 1,$$

а затем

$$\lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2 + x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4} + x\sqrt[3]{x(x-1)^2} + x^2} = -\frac{2}{3}.$$

Следовательно, правая и левая наклонные асимптоты совпадают и определяются уравнением $y = x - \dfrac{2}{3}$.

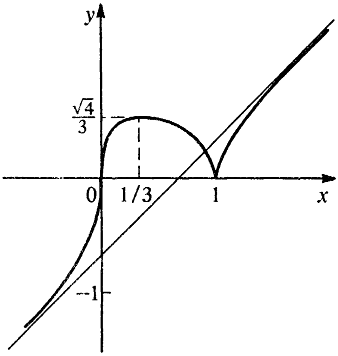


Рис. 11

График функции приведен на рис. 11. ▷

Построить графики следующих функций:

6.461. $y = \dfrac{(x^2-5)^3}{125}$.

6.462. $y = \dfrac{1}{4}x^2(x^2-3)^2$.

6.463. $y = \dfrac{1}{6}x^3(x^2-5)$.

6.464. $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

6.465. $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$

6.466. $y = \dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$.

6.467. $y = \dfrac{x^4}{x^3+1}$.

6.468. $y = \dfrac{x}{x^3+2}$.

6.469. $y = \dfrac{x^3}{x^4-1}$.

6.470. $y = \dfrac{x^2}{x^3-1}$.

6.471. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$.

6.472. $y = \dfrac{x^3}{x^2-3}$.

6.473. $y = \dfrac{x}{2-x^3}$.

6.474. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

6.475. $y = \dfrac{x^3}{x^3+1}$.

6.476. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

6.477. $y = \sqrt[3]{x^2-2x}$.

6.478. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

6.479. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

6.480. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$.

6.481. $y = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}$.

6.482. $y = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^3-1}$.

6.483. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$.

6.484. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

6.485. $y = \dfrac{x^3}{3\sqrt[3]{x^3+2}}$.

6.486. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$.

6.487. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{(x^3+2)^2}}$.

6.488. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

6.489. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$.

6.490. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$.

6.491. $y = \dfrac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$.

6.492. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

6.493. $y = \sqrt[3]{|x^2-1|}$.

6.494. $y = \sqrt{|x^2-2|^3}$.

6.495. $y = \sin x + \cos x$.

6.496. $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$.

6.497. $y = x \operatorname{arctg} x$.

6.498. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arcctg} x$.

6.499. $y = e^{2x-x^2}$.

6.500. $y = xe^{-x^2/2}$.

6.501. $y = \dfrac{1}{x}e^{-1/x}$.

6.502. $y = \dfrac{1}{x^2}e^{-1/x^2}$.

6.503. $y = xe^{1/x}$.

6.504. $y = \dfrac{1}{x}e^{-1/x^2}$.

6.505. $y = (x-2)e^{-1/x}$.

6.506. $y = (2x-1)e^{2/x}$.

6.507. $y = (x^2+1)e^{-x^2/2}$.

6.508. $y = x^2e^{2/x}$.

6.509. $y = x^3e^{-x^2/2}$.

6.510. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

6.511. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

6.512. $y = \dfrac{1}{x\ln x}$.

6.513. $y = x^2 \ln x$.

6.514. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

6.515. $y = x^2 \ln^2 x$.

6.516. $y = \dfrac{x^2}{\ln|x|}$.

6.517. $y = x \ln^2 |x|$.

6.518. $y = \ln|x^2-1|$.

6.519. $y = \dfrac{1}{x^2}\ln^2|x|$.

6.520. $y = x^x$, $x > 0$.

6.521*. $y = x^{1/x}$, $x > 0$.

6.522. $y = (1+x)^{1/x}$, $x > -1$.

6.523*. $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Построить кривые, заданные параметрически:

6.524. $x = te^t,\ y = te^{-t},\ t \in \mathbb{R}$.

◁ Проведем вспомогательные вычисления:

$$x'_t = (1+t)e^t, \quad y'_t = (1-t)e^{-t}, \quad y'_x = \frac{1-t}{1+t}e^{-2t},$$

$$x''_{tt} = (2+t)e^t, \quad y''_{tt} = (t-2)e^{-t}, \quad y''_{xx} = 2\frac{t^2-2}{(1+t)^3}e^{-3t}.$$

Так как $x'_t = 0$ при $t = -1$ и $x''_{tt}(-1) = 1/e > 0$, то $x_{\min} = -1/e$. Так как $y'_t = 0$ при $t = 1$ и $y''_{tt}(1) = -\dfrac{1}{e} < 0$, то $y_{\max} = \dfrac{1}{e}$. Отсюда следует, что кривая расположена в области $\{(x,\ y)\,|\,x \in [-1/e,\ +\infty),\ y \in \in (-\infty,\ 1/e]\}$. Из выражения для производной y'_x определяем критические точки $t_1 = 1$ ($y'_x(1) = 0$) и $t_2 = -1$ ($y'_x(-1)$ не существует). Критические точки первой производной находим из выражения для второй производной y''_{xx}: $t_3 = \sqrt{2}$ ($y''_{xx}(\sqrt{2}) = 0$), $t_4 = -\sqrt{2}$ ($y''_{xx}(-\sqrt{2}) = 0$) и $t_5 = -1$ ($y''_{xx}(-1)$ не существует). Следовательно, $A(-\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}},\ -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$ и $B(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}/e^{\sqrt{2}})$ — точки перегиба.

Наконец, находим асимптоты. Если $t \to -\infty$, то $x \to 0$, а $y \to -\infty$, т. е. $x = 0$ — вертикальная асимптота. Отметим, что при приближении

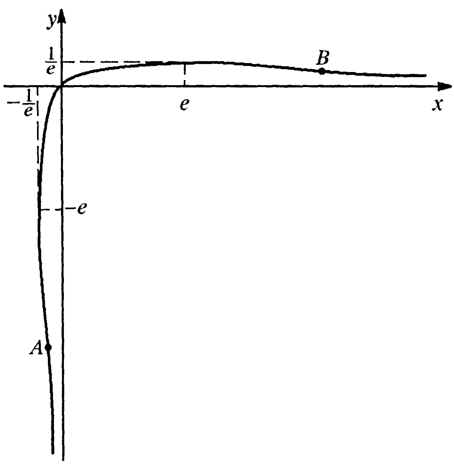


Рис. 12

точек кривой к этой асимптоте их координата по x остается отрицательной. Если $t \to +\infty$, то $x \to +\infty$, а $y \to 0$, т. е. $y = 0$ — горизонтальная асимптота. Точки кривой при приближении к ней имеют положительную координату по y.

Результаты исследования сводим в таблицу (табл. 4.4) и делаем все необходимые выводы в правой ее колонке. Кривая приведена на рис. 12. ▷

Таблица 4.4

t	x	y	y'_x	y''_{xx}	Поведение кривой
$(-\infty, -\sqrt{2})$	< 0	< 0	< 0	< 0	Выпукла вверх, убывает, $x = 0$ — вертикальная асимптота
$-\sqrt{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$	$-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$		> 0	Точка перегиба
$(-\sqrt{2}, -1)$	< 0	< 0	< 0	> 0	Выпукла вниз, убывает
-1	$-\dfrac{1}{e}$	$-e$	не сущ.	не сущ.	Точка возврата
$(-1, 1)$			> 0	< 0	Выпукла вверх, возрастает, точка $(0, 0)$ лежит на кривой
1	e	$\dfrac{1}{e}$	0		Максимум
$(1, \sqrt{2})$	> 0	> 0	< 0	< 0	Выпукла вверх, убывает
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$		0	Точка перегиба
$(\sqrt{2}, +\infty)$	> 0	> 0	< 0	> 0	Выпукла вниз, убывает, $y = 0$ — горизонтальная асимптота

6.525. $x = t^2 - 2t,\ y = t^2 + 2t,\ t \in \mathbb{R}$.

6.526. $x = t + e^{-t},\ y = 2t + e^{-2t},\ t \in \mathbb{R}$.

6.527. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi)$.

6.528. $x = t^3 - 3\pi,\ y = t^3 - 6\operatorname{arctg} t,\ t \in \mathbb{R}$.

Построить следующие кривые, заданные в полярной системе координат:

6.529. $r = a\sin 3\varphi$. **6.530.** $r = a(1 + \cos\varphi)$.

6.531. $r = \sqrt{\pi/\varphi}$. **6.532.** $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$.

§ 5. Векторные и комплексные функции действительной переменной

1. Определение вектор-функции действительной переменной. Если каждому значению действительной переменной $t \in D \subset \mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\mathbf{a}(t) \in \mathcal{V}_3$, то говорят, что на множестве D задана *вектор-функция* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ действительной переменной t.

Задание вектор-функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ равносильно заданию трех числовых функций $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ — координат вектора $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k},$$

или, кратко, $\mathbf{a} = \big(a_x(t),\, a_y(t),\, a_z(t)\big)$. Если вектор $\mathbf{a}$ является радиус-вектором точки $M(x,\, y,\, z)$, то соответствующую вектор-функцию принято обозначать:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Годографом вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ называется линия, описываемая в пространстве концом вектора $\mathbf{r}$. Всякую линию в пространстве можно рассматривать как годограф некоторой вектор-функции. Параметрические уравнения годографа:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Пример 1. Найти годограф вектор-функции

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\mathbf{i} + \frac{2t}{1+t^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\triangleleft$ Имеем параметрические уравнения годографа

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad z = 1.$$

Исключая параметр t, получим

$$x^2 + y^2 = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = 1.$$

Следовательно, годографом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ является окружность

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1,$$

из которой исключена точка $(-1,\, 0,\, 1)$, получающаяся в пределе при $t \to \pm\infty$. $\triangleright$

Найти годографы вектор-функций:

6.533. $\mathbf{r} = (2t-1)\mathbf{i} + (-3t+2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$.

6.534. $\mathbf{r} = \sqrt{1-t^2}\,\mathbf{i} + \sqrt{1+t^2}\,\mathbf{j}$, $t \in [0,\, 1]$.

6.535. $\mathbf{r} = 4\operatorname{ch} t \cdot \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\operatorname{sh} t \cdot \mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$.

6.536. $\mathbf{r} = 3t\mathbf{i} + (2t - t^2)\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$.

6.537. $\mathbf{r} = \cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$.

6.538. $\mathbf{r} = 2\cos^3 t \cdot \mathbf{i} + 2\sin^3 t \cdot \mathbf{j}$, $t \in [0,\, 2\pi]$.

6.539. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$.

6.540. $\mathbf{r} = \cos^2 t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cos t \cdot \mathbf{j} + \sin t \cdot \mathbf{k},\ t \in [0,\ 2\pi]$.

6.541. $\mathbf{r} = 5\cos t \cdot \mathbf{i} + 4\sin t \cdot \mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ t \in [0,\ 2\pi]$.

6.542. $\mathbf{r} = (\operatorname{sh} t - 1)\mathbf{i} + \operatorname{ch}^2 t \cdot \mathbf{j} + 3\mathbf{k},\ t \in \mathbb{R}$.

2. Дифференцирование вектор-функции. *Производной вектор-функции* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ по аргументу t называется новая вектор-функция

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}.$$

Если $\mathbf{a}(t) = \big(a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)\big)$, то

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\frac{da_x(t)}{dt},\ \frac{da_y(t)}{dt},\ \frac{da_z(t)}{dt}\right).$$

Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)$, то производная $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ есть вектор, направленный по касательной к годографу вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в сторону возрастания аргумента t.

Если t — время, то $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ есть вектор скорости конца вектора $\mathbf{r}$.

Правила дифференцирования вектор-функции ($\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$).

1) $\dfrac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

2) $\dfrac{d}{dt}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\dfrac{d\mathbf{a}}{dt}$, где α — постоянный скаляр.

3) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \dfrac{d\mathbf{a}}{dt} \pm \dfrac{d\mathbf{b}}{dt}$.

4) $\dfrac{d}{dt}(\varphi\mathbf{a}) = \dfrac{d\varphi}{dt}\mathbf{a} + \varphi\dfrac{d\mathbf{a}}{dt}$, где $\varphi = \varphi(t)$ — скалярная функция от t.

5) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \left(\dfrac{d\mathbf{a}}{dt},\ \mathbf{b}\right) + \left(\mathbf{a},\ \dfrac{d\mathbf{b}}{dt}\right)$.

6) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{a},\ \mathbf{b}] = \left[\dfrac{d\mathbf{a}}{dt},\ \mathbf{b}\right] + \left[\mathbf{a},\ \dfrac{d\mathbf{b}}{dt}\right]$.

7) $\dfrac{d}{dt}\mathbf{a}\big(\varphi(t)\big) = \dfrac{d\mathbf{a}}{d\varphi} \cdot \dfrac{d\varphi}{dt}$, где $\varphi = \varphi(t)$ — скалярная функция от t.

6.543. Доказать, что $\left(\mathbf{a},\ \dfrac{d\mathbf{a}}{dt}\right) = 0$, если $|\mathbf{a}| = \mathrm{const}$.

6.544. Дано уравнение движения $\mathbf{r} = 3t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}$. Определить траекторию и скорость движения.

6.545. Дано уравнение движения $\mathbf{r} = 3t\mathbf{i}+(4t-t^2)\mathbf{j}$. Определить траекторию и скорость движения. Построить векторы скорости для моментов $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=3$.

6.546. Дано уравнение движения $\mathbf{r} = 2(t-\sin t)\mathbf{i}+2(1-\cos t)\mathbf{j}$. Определить траекторию и скорость движения. Построить векторы скорости для моментов $t=\pi/2$, $t=\pi$.

6.547. Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции $\mathbf{r} = e^{2t}\mathbf{i}-(t+8)^{4/3}\mathbf{j}$ при $t=0$.

6.548. Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции $\mathbf{r} = (t^3+t)\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}$ при $t=-1$.

6.549. Найти производные вектор-функций:

а) $\mathbf{r} = \sin t\cdot\mathbf{i}+\cos^2 t\cdot\mathbf{j}+\sin t\cos t\cdot\mathbf{k}$;

б) $\mathbf{r} = t\cos t\cdot\mathbf{i}+t\sin t\cdot\mathbf{j}+t\mathbf{k}$;

в) $\mathbf{r} = (t+\cos t)\mathbf{i}+t\mathbf{j}+\sin t\cdot\mathbf{k}$.

6.550. Найти производные вектор-функций:

а) $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i}+\cos t\cdot\mathbf{j}+(t^2+1)\mathbf{k}$ в точке $(1,\ 1,\ 1)$;

б) $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i}+(t+1)^2\mathbf{j}+\sqrt{t^2+1}\mathbf{k}$ при $t=-2$.

6.551. Найти $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$, если

$$\mathbf{a} = t\mathbf{i}-t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k},\quad \mathbf{b} = \mathbf{i}+t\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}.$$

6.552. Найти $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$, если $\mathbf{a} = \mathbf{i}+t\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = t\mathbf{i}+\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$.

6.553. Найти $\dfrac{d\mathbf{a}}{dt}$, если $\mathbf{a} = u\mathbf{i}+u^2\mathbf{j}+u^3\mathbf{k}$, где $u=\sin t$.

Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)$, то

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Если t — время, то $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{w}$ — вектор ускорения конца вектора $\mathbf{r}$.

6.554. Найти вторые производные вектор-функций:

а) $\mathbf{r} = \cos t\cdot\mathbf{i}+e^t\mathbf{j}+(t^2+1)\mathbf{k}$,

б) $\mathbf{r} = t\mathbf{i}+t\cos t\cdot\mathbf{j}+t\sin t\cdot\mathbf{k}$

при произвольном t и при $t=0$.

6.555. Дано уравнение движения: $\mathbf{r} = 2(t-\sin t)\mathbf{i}+2(1-\cos t)\mathbf{j}$. Определить ускорение движения. Построить векторы ускорения для моментов $t=\pi/2$, $t=\pi$.

6.556*. Дано уравнение движения: $\mathbf{r} = 3t\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j}$. Определить ускорение $\mathbf{w}$ движения и его тангенциальную w_τ и нормальную w_n составляющие в любой момент t и при $t = 0$.

6.557. Дано уравнение движения: $\mathbf{r} = \dfrac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \dfrac{1}{3}(2t + 1)^{3/2}\mathbf{j}$. Определить ускорение движения и его тангенциальную и нормальную составляющие в любой момент t и при $t = 0$.

3. Касательная к пространственной кривой и нормальная плоскость. Уравнения касательной к пространственной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, которой соответствует значение параметра t_0, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{dx/dt\big|_{t=t_0}} = \frac{y - y_0}{dy/dt\big|_{t=t_0}} = \frac{z - z_0}{dz/dt\big|_{t=t_0}},$$

где x, y, z — текущие координаты точки касательной. Уравнение нормальной плоскости в той же точке:

$$(x - x_0)\frac{dx}{dt}\bigg|_{t=t_0} + (y - y_0)\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=t_0} + (z - z_0)\frac{dz}{dt}\bigg|_{t=t_0} = 0.$$

Пример 2. Доказать, что касательная к винтовой линии $\mathbf{r} = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ образует постоянный угол с осью Oz.

◁ Найдем вектор, касательный к годографу вектора $\mathbf{r}$:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b).$$

Отсюда

$$\cos\gamma = \frac{z'(t)}{|d\mathbf{r}/dt|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

т. е. $\gamma = \mathrm{const}$. ▷

Пример 3. Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой $x = t^2 - 1$, $y = t + 1$, $z = t^3$ в точке $M_0(0, 2, 1)$.

◁ Данной точке соответствует значение параметра $t = 1$. Имеем

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 3t^2.$$

Подставляя значение $t = 1$, получаем

$$\frac{dx}{dt}\bigg|_{t=1} = 2, \quad \frac{dy}{dt}\bigg|_{t=1} = 1, \quad \frac{dz}{dt}\bigg|_{t=1} = 3.$$

Уравнения касательной:

$$\frac{x}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 1}{3}.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$2(x-0)+1(y-2)+3(z-1)=0,$$

или

$$2x+y+3z-5=0. \ \triangleright$$

Для каждой из следующих кривых написать уравнения касательной и уравнение нормальной плоскости в данной точке:

6.558. $x=4\sin^2 t,\ y=4\sin t\cos t,\ z=2\cos^2 t$ при $t=\pi/4$.

6.559. $x=\dfrac{1}{2}t^2,\ y=\dfrac{1}{3}t^3,\ z=\dfrac{1}{4}t^4$ при $t=2$.

6.560. $x=a\operatorname{ch} t,\ y=a\operatorname{sh} t,\ z=at$ при $t=0$.

6.561. $x^2+y^2=10,\ y^2+z^2=25$ в точке $M_0(1,\ 3,\ 4)$.

6.562. $2x^2+3y^2+z^2=9,\ 3x^2+y^2-z^2=0$ в точке $M_0(1,\ -1,\ 2)$.

4. Дифференциальные характеристики плоских кривых. Пусть кривая в плоскости Oxy является годографом вектор-функции $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)=\big(x(s),\,y(s)\big)$, где s — длина дуги кривой.

Кривизной кривой в точке M_0 называется число

$$K=\left|\lim_{M\to M_0}\frac{\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Здесь φ — угол поворота касательной, соответствующий дуге $\overset{\frown}{M_0M}$ (рис. 13) данной кривой, а Δs — длина этой дуги.

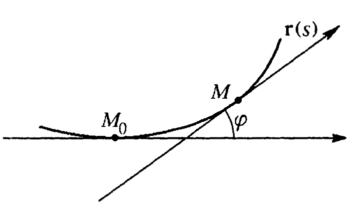


Рис. 13

Величина $R=1/K$ называется *радиусом кривизны*.

Кривизна K определяется соотношением

$$K=\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|.$$

Приведем ряд формул для вычисления кривизны кривых:

1) если кривая задана уравнением в явной форме $y=f(x)$, то

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|;$$

2) если кривая задана уравнением в неявной форме[1]) $F(x, y) = 0$, то

$$K = \left| \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{({F'}^2_x + {F'}^2_y)^{3/2}} \right|;$$

3) если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$K = \left| \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{({x'}^2 + {y'}^2)^{3/2}} \right|;$$

4) если кривая задана в полярных координатах уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi)$, то

$$K = \left| \frac{r^2 + 2{r'}^2 - rr''}{(r^2 + {r'}^2)^{3/2}} \right|.$$

Окружностью кривизны (*соприкасающейся окружностью*) кривой в ее точке M называется предельное положение окружности, проведенной через точку M и две другие точки кривой P и Q, когда $P \to M$ и $Q \to M$.

Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны в соответствующей точке M, а центр окружности кривизны (*центр кривизны*) находится на нормали к кривой, проведенной в точке M в сторону вогнутости кривой.

Координаты X и Y центра кривизны равны

$$X = x - \frac{y'(1 + {y'}^2)}{y''}, \quad Y = y + \frac{1 + {y'}^2}{y''}.$$

Эволютой кривой называется линия, описываемая центром кривизны при движении точки по кривой. Формулы для координат центра кривизны определяют параметрические уравнения эволюты.

Пример 4. Найти уравнение эволюты параболы $y^2 = 2(x + 1)$.

$\lhd$ Имеем $2yy' = 2$, т. е. $y' = \dfrac{1}{y}$. После повторного дифференцирования получаем ${y'}^2 + yy'' = 0$, откуда $y'' = -\dfrac{{y'}^2}{y} = -\dfrac{1}{y^3}$. Находим координаты

[1]) Здесь используются частные производные функции двух переменных; определение см. в п. 3 § 1 гл. 8.

центра кривизны:

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = \frac{y^2}{2} - 1 - \frac{(1/y)(1+1/y^2)}{-1/y^3} = \frac{3}{2}y^2,$$

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1+1/y^2}{-1/y^3} = -y^3;$$

тем самым найдены параметрические уравнения эволюты:

$$X = \frac{3}{2}y^2, \quad Y = -y^3.$$

Исключив параметр y, найдем уравнение эволюты в виде

$$Y^2 = \frac{8}{27}X^3. \ \triangleright$$

Вычислить кривизну данной кривой:

6.563. $y = x^2$ в начале координат и в точке $M(1,\ 1)$.

6.564. $x^2 + 9y^2 = 9$ в вершинах эллипса $A(3,\ 0)$ и $B(0,\ 1)$.

6.565. $x^2 - xy + y^2 = 1$ в точке $M(1,\ 1)$.

6.566. $x = t^2,\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3$ при $t = 1$.

6.567. $x = \dfrac{1}{2}t^2,\ y = \dfrac{1}{3}t^3$ в точке $M(1/2,\ 1/3)$.

6.568. $r = a(1 - \cos\varphi)$ в любой точке и при $\varphi = \pi$.

6.569. $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ при $\varphi = \pi/4$.

Найти радиусы кривизны (в любой точке) данных кривых:

6.570. а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

6.571. а) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; б) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

6.572. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

6.573. а) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$; б) $r = a\varphi$.

6.574*. *Вершиной* кривой называется такая ее точка, в которой кривизна имеет максимум или минимум. Найти вершину кривой $y = e^{-x}$.

6.575. Найти вершину кривой $y = \ln x$.

Вычислить координаты центров кривизны и написать уравнения окружностей кривизны данных кривых в указанных точках:

6.576. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$ в точке $M(0, a)$.

6.577. $y = e^{-x^2}$ в точке $M(0, 1)$.

6.578. $y = xe^x$ в точке $M(-1, -1/e)$.

6.579. $y = \sin x$ в точке $M(\pi/2, 1)$.

6.580. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ в точке $M(\pi a, 2a)$.

Найти эволюты кривых:

6.581. а) $y = x^3$; б) $x^2 - y^2 = a^2$; в) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

6.582. $x = a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

6.583. $x = 2t,\ y = t^2 - 2$.

5. Дифференциальные характеристики пространственных кривых. Во всякой неособой точке $M(x, y, z)$ пространственной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ можно построить три взаимно перпендикулярных вектора:

$\mathbf{T} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ (направляющий вектор *касательной*),

$\mathbf{B} = \left[\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}, \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]$ (направляющий вектор *бинормали*),

$\mathbf{N} = [\mathbf{B}, \mathbf{T}]$ (направляющий вектор *главной нормали*) или соответствующие им основные *единичные векторы*:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|},$$

которые можно вычислить также по формулам:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{d\boldsymbol{\tau}/ds}{|d\boldsymbol{\tau}/ds|}, \quad \boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}].$$

Трехгранник с вершиной в точке M_0, ребрами которого служат касательная, главная нормаль и бинормаль, называется *естественным трехгранником* (*триэдром*) пространственной кривой. Гранями его являются плоскости: *соприкасающаяся* (проходит через векторы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{N}$), *нормальная* (проходит через векторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{B}$), *спрямляющая* (проходит через векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{T}$).

Уравнения главной нормали имеют вид

$$\frac{x - x_0}{N_x} = \frac{y - y_0}{N_y} = \frac{z - z_0}{N_z},$$

где x, y, z — текущие координаты точки главной нормали, N_x, N_y, N_z — координаты вектора $\mathbf{N}$.

Уравнения бинормали:

$$\frac{x-x_0}{B_x}=\frac{y-y_0}{B_y}=\frac{z-z_0}{B_z}.$$

Уравнение соприкасающейся плоскости:

$$B_x(x-x_0)+B_y(y-y_0)+B_z(z-z_0)=0.$$

Уравнение спрямляющей плоскости:

$$N_x(x-x_0)+N_y(y-y_0)+N_z(z-z_0)=0.$$

Пример 5. Найти основные единичные векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$ кривой $x=1-\sin t$, $y=\cos t$, $z=t$ в точке M, которой соответствует значение параметра $t=0$. Написать уравнения касательной, главной нормали и бинормали в этой точке.

◁ Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}=(1-\sin t)\mathbf{i}+\cos t\cdot\mathbf{j}+t\mathbf{k},\\
&\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-\cos t\cdot\mathbf{i}-\sin t\cdot\mathbf{j}+\mathbf{k},\\
&\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\sin t\cdot\mathbf{i}-\cos t\cdot\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

При $t=0$ получим

$$\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-\mathbf{i}+\mathbf{k},\quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\mathbf{j},$$

$$\mathbf{B}=\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt},\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-1&0&1\\0&-1&0\end{vmatrix}=\mathbf{i}+\mathbf{k},$$

$$\mathbf{N}=[\mathbf{B},\mathbf{T}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&1\\-1&0&1\end{vmatrix}=-2\mathbf{j}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{-\mathbf{i}+\mathbf{k}}{\sqrt2},\quad \boldsymbol{\nu}=-\mathbf{j},\quad \boldsymbol{\beta}=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{k}}{\sqrt2}.$$

Так как при $t=0$ имеем $x=1$, $y=1$, $z=0$, то:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}\text{ — уравнения касательной;}$$

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{0}\text{ — уравнения главной нормали;}$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}\text{ — уравнения бинормали. } \triangleright$$

Если пространственная кривая задана как пересечение двух поверхностей

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

то удобнее вместо векторов $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ и $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ рассматривать векторы $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ и $d^2\mathbf{r} = (d^2x, d^2y, d^2z)$, причем можно считать одну из переменных x, y, z независимой и ее второй дифференциал равным нулю.

Пример 6. Написать уравнения соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей кривой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

в ее точке $M(1, 1, 2)$.

◁ Дифференцируя данные уравнения и считая x независимой переменной, получим:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$
$$x\,dx - y\,dy + z\,dz = 0$$

и

$$dx^2 + dy^2 + y\,d^2y + dz^2 + z\,d^2z = 0,$$
$$dx^2 - dy^2 - y\,d^2y + dz^2 + z\,d^2z = 0.$$

При $x = 1,\ y = 1,\ z = 2$ имеем:

$$dy = 0, \quad dz = -\frac{1}{2}\,dx, \quad d^2y = 0, \quad d^2z = -\frac{3}{8}\,dx^2.$$

Следовательно, $d\mathbf{r} = \left(dx, 0, -\dfrac{1}{2}\,dx\right)$, $d^2\mathbf{r} = \left(0, 0, -\dfrac{3}{8}\,dx^2\right)$. Заменим эти векторы векторами, им коллинеарными, $(2, 0, -1)$ и $(0, 0, -1)$, откуда

$$\mathbf{T} = (2, 0, -1),$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(-\mathbf{i} - 2\mathbf{k}).$$

Отсюда находим:

$y - 1 = 0$ — уравнение соприкасающейся плоскости;

$2x - z = 0$ — уравнение нормальной плоскости;

$x + 2z - 5 = 0$ — уравнение спрямляющей плоскости. ▷

Найти основные единичные векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ и составить уравнения касательной, главной нормали и бинормали данных кривых:

6.584. $x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t$ при $t = 0$.

6.585. $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4\sin\dfrac{t}{2}$ при $t = \pi$.

6.586. $x = 2t,\ y = \ln t,\ z = t^2$ при $t = 1$.

6.587. $y = x,\ z = 2x^2$ в точке $x = 1$.

6.588. Написать уравнения плоскостей, образующих естественный трехгранник кривой $x = t^2 + 1,\ y = \cos t,\ z = e^t$ в точке $(1,\ 1,\ 1)$.

6.589. Написать уравнения плоскостей, образующих естественный трехгранник кривой $x = t/\sqrt{2},\ y = t/\sqrt{2},\ z = \ln\sin t$ при $t = \pi/2$.

6.590. Найти векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ и написать уравнения всех ребер и плоскостей, образующих естественный трехгранник кривой $x = (t+1)^2,\ y = t^3,\ z = \sqrt{t^2+1}$ в точке $(1,\ 0,\ 1)$.

6.591. Найти векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ и написать уравнения всех ребер и плоскостей, образующих естественный трехгранник кривой $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$ в точке $(1,\ 2,\ 3)$.

Кривизна пространственной кривой определяется аналогично кривизне плоской кривой. Если кривая задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, то

$$K = \frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|.$$

В случае общего параметрического задания кривой имеем

$$K = \frac{1}{R} = \frac{|[d\mathbf{r}/dt,\ d^2\mathbf{r}/dt^2]|}{|d\mathbf{r}/dt|^3}.$$

Кручением (*второй кривизной*) пространственной кривой в точке M называется число

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \lim_{N\to M}\frac{\theta}{\Delta s},$$

где θ — угол поворота бинормали, соответствующий дуге $\overset{\frown}{MN}$. Величина ρ называется *радиусом кручения* или *радиусом второй кривизны*.

Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, то

$$\sigma = \mp\left|\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\right| = \frac{(d\mathbf{r}/ds)(d^2\mathbf{r}/ds^2)(d^3\mathbf{r}/ds^3)}{|d^2\mathbf{r}/ds^2|^2},$$

где знак минус берется в том случае, когда векторы $\dfrac{d\beta}{ds}$ и ν имеют одинаковое направление, и знак плюс — в противоположном случае.

Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где t — произвольный параметр, то

$$\sigma = \frac{(d\mathbf{r}/dt)(d^2\mathbf{r}/dt^2)(d^3\mathbf{r}/dt^3)}{|[d\mathbf{r}/dt,\ d^2\mathbf{r}/dt^2]|^2}.$$

Пример 7. Найти кривизну и кручение кривой $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$ в любой точке.

◁ Имеем

$$\mathbf{r} = (e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t),$$
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t),\ e^t),$$
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (-2e^t\sin t,\ 2e^t\cos t,\ e^t),$$
$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = (-2e^t(\sin t + \cos t),\ 2e^t(\cos t - \sin t),\ e^t).$$

Отсюда

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) & e^t \\ -2e^t\sin t & 2e^t\cos t & e^t \end{vmatrix} =$$
$$= e^{2t}(\sin t - \cos t,\ -(\sin t + \cos t),\ 2),$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = \begin{vmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) & e^t \\ -2e^t\sin t & 2e^t\cos t & e^t \\ -2e^t(\sin t + \cos t) & 2e^t(\cos t - \sin t) & e^t \end{vmatrix} = 2e^{3t}.$$

Следовательно,

$$K = \frac{e^{2t}\sqrt{(\sin t - \cos t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 4}}{e^{3t}\sqrt{((\sin t - \cos t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1)^3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t},$$

$$\sigma = \frac{2e^{3t}}{e^{4t}((\sin t - \cos t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 4)} = \frac{e^{-t}}{3}. \ ▷$$

Вычислить кривизну и кручение кривых:

6.592. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ в любой точке и при $t = 0$.

6.593. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ в любой точке и при $t = 0$.

6.594. $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$ в любой точке и при $t = 1$.

6.595. $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ в любой точке и при $t = 1$.

6.596. $y = \dfrac{x^2}{2}$, $z = \dfrac{x^3}{3}$ при $x = 1$.

6.597. $2x = y^2$, $z = x^2$ в любой точке и при $y = 1$.

6.598*. Дано уравнение движения $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{2}{3}t^3\mathbf{k}$. Определить ускорение $\mathbf{w}$ движения, тангенциальную w_τ и нормальную w_ν составляющие ускорения в любой момент t и при $t = 1$.

6. Комплексные функции действительной переменной. Если каждому значению действительной переменной $t \in D \subset \mathbb{R}$ поставлено в соответствие определенное комплексное число $z = x + iy$, то $z(t)$ называется *комплексной функцией действительной переменной* t с областью определения D:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t).$$

Задание комплексной функции $z = z(t)$ равносильно заданию двух действительных функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, или заданию вектор-функции $\mathbf{r}(t) = \big(x(t),\, y(t)\big)$.

Пример 8. Построить кривую, заданную уравнением $z(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$, $-\infty < t < +\infty$.

◁ Так как $z(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$, то $|z(t)| = e^{\alpha t}$ и $\arg z(t) = \beta t$. Полагая $\varphi = \beta t$, находим, если $\beta \neq 0$, $t = \dfrac{\varphi}{\beta}$. Следовательно, $r = |z(t)| = e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$ $(-\infty < \varphi < +\infty)$, и мы получили уравнение логарифмической спирали (т. 1, гл. 1, § 3, п. 5, а также рис. 11 слева), если $\alpha\beta \neq 0$. При $\alpha = 0$ — окружность $r = 1$, при $\beta = 0$ — луч $\varphi = 0$. ▷

Производной комплексной функции $z(t)$ называется комплексная функция $z'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta z(t, \Delta t)}{\Delta t} = x'(t) + iy'(t)$. На комплексные функции действительной переменной распространяются обычные правила дифференцирования (см. п. 1 § 1).

Пример 9. Доказать, что $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$, где $\lambda = \alpha + i\beta$ — произвольное комплексное число.

◁ Пусть $z(t) = e^{\lambda t} = e^{(\alpha+i\beta)t}$, тогда $x(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $y(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$. Отсюда находим:

$$x'(t) = \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t,$$
$$y'(t) = \alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t.$$

Следовательно,

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) =$$
$$= (\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t) + i(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t) =$$
$$= \alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + i\beta e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) =$$
$$= \alpha e^{(\alpha+i\beta)t} + i\beta e^{(\alpha+i\beta)t} = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t} = \lambda e^{\lambda t}. \ \triangleright$$

Построить кривые, заданные уравнениями $z = z(t)$, и найти $z'(t)$:

6.599. $z = t^2 + it,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

6.600. $z = 1 - i + te^{i\frac{\pi}{4}},\ t \in (-\infty, +\infty)$.

6.601. $z = 2e^{it},\ t \in [0, \pi]$.

6.602. $z = 3e^{it} + e^{-it},\ t \in (-\infty, +\infty)$.

6.603. $z = (2+i)e^t + (2-i)e^{-t},\ t \in (-\infty, +\infty)$.

6.604. $z = t^2 + it^4,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

6.605. $z = t + i - ie^{-it},\ t \in [0, 2\pi]$.

6.606. $z = ae^{it}(1 - it),\ a \in \mathbb{R},\ t \in (-\infty, +\infty)$.

6.607*. Известно, что $z = z(t)$ определяет закон движения точки на плоскости. Найти компоненты скорости и ускорения по направлению касательной к кривой $z = z(t)$ и перпендикулярному к нему.

6.608*. Точка z пробегает окружность $|z| = R$ с постоянной угловой скоростью, равной единице. Найти вектор скорости точки w, движущейся вместе с z по закону $w = f(z)$.

Пусть $D = \dfrac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, т.е. $Dz(t) = z'(t)$. Линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $\mathbf{p}(D) = a_nD^n + \ldots + a_1D + a_0$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{p}(D)z(t) = a_nz^{(n)}(t) + \ldots + a_1z'(t) + a_0z(t).$$

6.609*. Доказать следующие свойства линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами:

а) $\mathbf{p}(D)e^{\lambda t} = \mathbf{p}(\lambda)e^{\lambda t}$;

б) $\mathbf{p}(D)\big(e^{\lambda t}z(t)\big) = e^{\lambda t}\mathbf{p}(D+\lambda)z(t)$, где $z(t)$ — произвольная комплекснозначная функция, n раз дифференцируемая при любом $t \in (-\infty, +\infty)$.

Для заданных функций вычислить указанные линейные комбинации производных:

6.610. $x''(t) + 3x'(t) + x(t)$, если $x(t) = te^{-t}\cos t$.

◁ Заметим, что $x(t) = \operatorname{Re}(te^{(-1+i)t})$. Поэтому $x''(t) + 3x'(t) + x(t) = (D^2 + 3D + 1)x(t) = \operatorname{Re}(D^2 + 3D + 1)te^{(-1+i)t}$. Используя результат задачи 6.609б), находим:

$$(D^2 + 3D + 1)te^{(-1+i)t} = e^{(-1+i)t}\big((D + i - 1)^2 + 3(D + i - 1) + 1\big)i =$$
$$= e^{(-1+i)t}(D^2 + 2(i-1)D + (i-1)^2 + 3D + 3(i-1) + 1)t =$$
$$= e^{(-1+i)t}\big(D^2 + (1+2i)D + (-2+i)\big)t = e^{(-1+i)t}\big((1-2t) + i(2+t)\big) =$$
$$= e^{-t}\big(((1-2t)\cos t - (2+t)\sin t) + i((1-2t)\sin t + (2+t)\cos t)\big).$$

Отсюда получаем:

$$x''(t) + 3x'(t) + x(t) = \operatorname{Re}(D^2 + 3D + 1)te^{(-1+i)t} =$$
$$= e^{-t}\big((1-2t)\cos t - (2+t)\sin t\big). \quad ▷$$

6.611. $x'''(t) + 46x(t)$; $x(t) = e^{2t}\cos 3t$.
6.612*. $x''(t) - x'(t) + (5/4)x(t)$; $x(t) = e^{t/2}\sin t$.
6.613. $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t)$; $x(t) = e^{t}\sin 2t + e^{-t}\cos t$.
6.614. $x'''(t) - x(t)$; $x(t) = t^3\sin t$.
6.615. $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t)$; $x(t) = e^{t}\sin 2t\sqrt{1+t^2}$.
6.616. $(1/2)x''(t) - x'(t) + x(t)$; $x(t) = (1+t^2)e^{t}\cos t$.

Глава 7

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Основные методы вычисления неопределенного интеграла

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, заданной на некотором множестве X, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то $\Phi(x)$ является первообразной той же функции в том и только в том случае, когда $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается символом $\int f(x)\,dx$. Таким образом, по определению

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}, \tag{1}$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, а постоянная C принимает действительные значения.

В силу установившейся традиции равенство (1) записывается без явного обозначения множества справа, т.е. в виде

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

при этом C называют произвольной постоянной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.
2. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$.
3. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad a \neq 0$.
4. $\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$.

Таблица основных неопределенных интегралов:

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1); \qquad \int e^x\,dx = e^x + C.$

4. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \quad (a \neq 0).$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad |x| > |a| > 0.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \quad (a \neq 0).$

15. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

16. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Найти первообразные следующих функций:

7.1. $2x^7$. **7.2.** $4\sqrt[3]{x}$ **7.3.** $\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}$.

7.4. $\dfrac{x^3+5x^2-1}{x}$. **7.5.** $\dfrac{(\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}$. **7.6.** $1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

7.7. $\dfrac{1}{\sqrt{a+bx}}$. **7.8.** e^{2-3x}. **7.9.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^x}}$.

7.10. $\dfrac{1}{\cos^2 4x}$. **7.11.** $\dfrac{x^3+1}{x-1}$. **7.12.** $1-8\sin^2 2x\cos^2 2x$.

7.13. $\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^2$.

7.14. $\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)+\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)$.

Отыскание неопределенного интеграла с помощью таблицы основных интегралов и тождественных преобразований называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Вычислить $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-x^4}$.

$$\triangleleft\ \int\frac{dx}{x^2-x^4}=\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}=\int\frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)}\,dx=$$
$$=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1-x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.\ \triangleright$$

Используя таблицу основных интегралов, найти следующие интегралы:

7.15. $\displaystyle\int\left(3x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$. **7.16.** $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^4}\,dx$.

7.17. $\displaystyle\int\sqrt{mx}\,dx$. **7.18.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$.

7.19. $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{x+1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$. **7.20.** $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}\,dx$.

7.21. $\displaystyle\int\frac{x^3+2}{x}\,dx$. **7.22.** $\displaystyle\int 2^x e^x\,dx$.

7.23. $\displaystyle\int 2^x(1+3x^2\cdot 2^{-x})\,dx$. **7.24.** $\displaystyle\int(2x+3\cos x)\,dx$.

7.25. $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{\sin^2 x}\,dx.$ **7.26.** $\displaystyle\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$

7.27. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx.$ **7.28.** $\displaystyle\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx.$

7.29*. а) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$; б) $\displaystyle\int \operatorname{th}^2 x\,dx.$

7.30. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}.$ **7.31.** $\displaystyle\int (\arcsin x+\arccos x)\,dx.$

7.32. $\displaystyle\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$ **7.33.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}.$

7.34. $\displaystyle\int \frac{dx}{5-x^2}.$ **7.35.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}.$

7.36. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\,dx.$ **7.37.** $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx.$

7.38. $\displaystyle\int (x+a)(x+b)\,dx.$ **7.39.** $\displaystyle\int (a^{1/3}+x^{1/3})^3\,dx.$

7.40. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x+3\cos x-2}{\cos^2 x}\,dx.$

7.41. а) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; б) $\displaystyle\int \operatorname{cth}^2 x\,dx.$

7.42. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}.$ **7.43.** $\displaystyle\int \frac{x^2-9}{x^2-8}\,dx.$

2. Метод замены переменной. Существуют следующие два варианта этого метода.

а) Метод подведения под знак дифференциала. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. Предположим, что существуют дифференцируемая функция $u=\varphi(x)$ и функция $g(u)$ такие, что подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ может быть записано в виде

$$f(x)\,dx = g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = g(u)\,du$$

(указанное преобразование называется подведением $u=\varphi(x)$ под знак дифференциала). Тогда

$$\int f(x)\,dx = \int g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int g(u)\,du\Big|_{u=\varphi(x)},$$

т. е. вычисление интеграла $\int f(x)\,dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(u)\,du$ (который может оказаться проще исходного) и последующей подстановке $u = \varphi(x)$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cos x\,dx$.

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int \sin^3 x\,d(\sin x) =$$
$$= \int u^3\,du = \left.\frac{u^4}{4}\right|_{u=\sin x} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C. \ \triangleright$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.

◁ Имеем:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \int \frac{d(x^2+x-3)}{x^2+x-3} = \int \frac{du}{u} =$$
$$= \ln|u|\big|_{u=x^2+x-3} + C = \ln|x^2+x-3| + C. \ \triangleright$$

Операция подведения функции $\varphi(x)$ под знак дифференциала эквивалентна замене переменной x на новую переменную $u = \varphi(x)$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$.

◁ Произведем замену переменной по формуле

$$u = 3x + 1.$$

Тогда $du = 3\,dx$, т. е.

$$dx = \frac{1}{3}\,du$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{2/3}} = u^{1/3}\big|_{u=3x+1} + C = \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

Выполненное преобразование эквивалентно подведению под знак дифференциала функции $u = 3x + 1$. ▷

Вычислить интегралы с помощью подходящей замены:

7.44. $\int \sqrt{3+x}\,dx$. **7.45.** $\int (3-4\sin x)^{1/3}\cos x\,dx$.

7.46. $\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x\,dx$. **7.47.** $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^4 x}\,dx$.

7.48. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$. **7.49.** $\int \frac{dx}{a+bx}$.

7.50. $\int \frac{\sec^2 x}{a-b\operatorname{tg} x}\,dx$. **7.51.** $\int \frac{\cos(x/\sqrt{2})}{2-3\sin(x/\sqrt{2})}\,dx$.

7.52. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$. **7.53.** $\int 3^{4x}\,dx$.

7.54. $\int \cos(ax+b)\,dx$. **7.55.** $\int \sin(\ln x)\frac{dx}{x}$.

7.56. $\int \sin\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$. **7.57.** $\int \frac{dx}{\cos(x-\pi/4)}$.

7.58. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 3x}$. **7.59.** $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$.

7.60. $\int x\cdot 5^{-x^2}\,dx$. **7.61.** $\int \frac{dx}{1-4x^2}$.

7.62. $\int \frac{e^{-ax}}{1+e^{-2ax}}\,dx$. **7.63.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$.

7.64. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$. **7.65.** $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}$.

7.66. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+1}$. **7.67.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

7.68. $\int \frac{dx}{a^2+b^2x}$. **7.69.** $\int \frac{\sin ax}{\cos^3 ax}\,dx$.

7.70. $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x\,dx$. **7.71.** $\int \frac{e^x}{(7-e^x)^2}\,dx$.

7.72. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. **7.73.** $\int \operatorname{cth} 4x\,dx$.

7.74. $\int \frac{a^{1/x}}{x^2}\,dx$. **7.75.** $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2(x^2+1)}$.

7.76. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a-b)x^2-(a+b)}$ $(0<b<a)$.

7.77. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+7}$.

7.78. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{4x^2+7}$.

7.79. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+1}}$.

7.80. $\displaystyle\int \frac{a^x}{\sqrt{a^{2x}-1}}\,dx$.

Применяя различные приемы, найти неопределенные интегралы.

7.81*. $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx$.

7.82. $\displaystyle\int \frac{x^2}{3+x^2}\,dx$.

7.83. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{x^2-4}\,dx$.

7.84. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{a^2x^4-b^2}$.

7.85. $\displaystyle\int \frac{x^3}{9-4x^8}\,dx$.

7.86. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^5+5x-8}\,dx$.

7.87. $\displaystyle\int x^3\sqrt[4]{5x^4-3}\,dx$.

7.88. $\displaystyle\int \left(3-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

7.89. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

7.90. $\displaystyle\int \frac{a^2+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a^2+b^2x^2}\,dx$.

7.91. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[5]{a^x}}$.

7.92. $\displaystyle\int e^x\sqrt[3]{4+e^x}\,dx$.

7.93. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}}\,dx$.

7.94*. $\displaystyle\int \frac{dx}{2^x+1}$.

7.95. $\displaystyle\int \frac{e^{\arcsin x}+x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

7.96. $\displaystyle\int \frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

7.97. $\displaystyle\int \sqrt{3-\operatorname{ch}x}\,\operatorname{sh}x\,dx$.

7.98. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}$.

7.99. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$.

7.100*. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$.

7.101*. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$.

7.102. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x/\sqrt{2})}$.

7.103. $\displaystyle\int (\sin ax+\cos ax)^2\,dx$.

7.104. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\cos(x^3)}\,dx$.

7.105. $\displaystyle\int \frac{(1+\cos 2x)^3}{\cos 2x}\,dx.$ **7.106.** $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^2 x}}\,dx.$

7.107. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^4 x+3}}\,dx.$ **7.108*.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x}.$

7.109. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}\sqrt{3}x}.$ **7.110.** $\displaystyle\int \operatorname{th} ax\,dx.$

7.111. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2(ax+b)\,dx.$ **7.112.** $\displaystyle\int x^2\operatorname{ctg}^2(x^3-3)\,dx.$

7.113. $\displaystyle\int e^{\sec x}\operatorname{tg} x\sec x\,dx.$

б) Метод подстановки. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$, где функция $f(x)$ определена на некотором множестве X. Введем новую переменную u формулой

$$x=\varphi(x)\colon\quad U\to X,$$

где функция $\varphi(u)$ дифференцируема на некотором множестве U и осуществляет взаимно однозначное отображение U на X, т.е. имеет обратную

$$u=\varphi^{-1}(x)\colon\quad X\to U.$$

Подставив $x=\varphi(u)$ в исходное подынтегральное выражение, получаем

$$f(x)\,dx=f\bigl(\varphi(u)\bigr)\varphi'(u)\,du=g(u)\,du.$$

Далее, справедливо равенство

$$\int f(x)\,dx=\int f\bigl(\varphi(u)\bigr)\varphi'(u)\,du\Big|_{u=\varphi^{-1}(x)}=\int g(u)\,du\Big|_{u=\varphi^{-1}x},$$

т.е. вычисление интеграла $\int f(x)\,dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(u)\,du$ (который может оказаться проще исходного) и последующей подстановке $u=\varphi^{-1}(x)$.

Пример 5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

◁ В рассматриваемом случае область определения подынтегральной функции $X=[0,\,+\infty)$. Произведем подстановку

$$x=\varphi(u)=u^2,\quad u\in[0,\,+\infty).$$

Тогда $dx = 2u\,du$, $u = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$, откуда

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{u^3+u}{u+1}\,du = 2\int (u^2-u+2)\,du - 4\int \frac{du}{u+1} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + 2u\right) - 4\ln(u+1) + C\Big|_{u=\sqrt{x}} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x + 2x^{1/2}\right) - 4\ln(\sqrt{x}+1) + C. \ \triangleright$$

Применяя указанные подстановки, найти интегралы:

7.114. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$, $\quad x = (1-t^2)^{1/3}$.

7.115. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$, $\quad x = \frac{2}{t}$.

7.116. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$, $\quad x = t^2$.

7.117. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$, $\quad x = \ln t$.

Применяя подходящие подстановки, найти интегралы:

7.118. $\displaystyle\int x(5x-1)^{19}\,dx$. **7.119.** $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$.

7.120. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$. **7.121.** $\displaystyle\int \frac{x}{(3-x)^7}\,dx$.

7.122. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$. **7.123.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

3. Метод интегрирования по частям. Если $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции, то справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx,$$

или в краткой записи

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2}$$

Эта формула используется в тех случаях, когда подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ можно так представить в виде $u\,dv$, что стоящий в правой части (2) интеграл при надлежащем выборе выражений u и dv может оказаться проще исходного интеграла. При этом за u удобно принимать множитель, который упрощается при дифференцировании. Например, если под знаком интеграла стоит произведение многочлена на тригонометрическую или показательную функцию, то к u следует отнести многочлен, а оставшееся выражение — к dv. При этом формула (2) может применяться неоднократно.

Пример 6. Найти $\int x^2 \cos x\, dx$.

$\lhd$ Полагаем $u = x^2$ и $dv = \cos x\, dx$. Тогда $du = 2x\, dx$ и $v = \int \cos x\, dx = \sin x$ (постоянную C здесь полагаем равной нулю, т. е. в качестве v берем одну из первообразных). По формуле (2) имеем

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx.$$

К стоящему справа интегралу снова применяем формулу интегрирования по частям, причем к u снова относим многочлен (т. е. $2x$). Имеем: $u = 2x$, $dv = \sin x\, dx$. Отсюда

$$du = 2\, dx \quad \text{и} \quad v = \int \sin x\, dx = -\cos x.$$

Применяя формулу (2), получаем окончательно:

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - \left(-2x \cos x - \int (-\cos x) 2\, dx\right) = \\ = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C. \ \rhd$$

Если подынтегральная функция содержит сомножителем логарифмическую или обратную тригонометрическую функции, то их следует принимать за u, так как в результате дифференцирования эти функции упрощаются.

Пример 7. Найти $\int \ln x\, dx$.

$\lhd$ Полагаем $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = \dfrac{dx}{x}$ и $v = \int dx = x$. Подставив в формулу (2), находим

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C. \ \rhd$$

Иногда после двукратного применения формулы интегрирования по частям приходим в правой части к выражению, содержащему исходный интеграл, т. е. получаем уравнение с искомым интегралом в качестве неизвестного.

Пример 8. Найти $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

◁ Полагаем $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx\,dx$. Тогда $du = ae^{ax}\,dx$, $v = -\dfrac{1}{b}\cos bx$. Подставив в (2), имеем

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Теперь полагаем $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\,dx$. Тогда $du = ae^{ax}\,dx$, $v = \dfrac{1}{b}\sin bx$ и

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx\right).$$

В итоге получено уравнение относительно неизвестного интеграла $\int e^{ax}\sin bx\,dx$. Решая это уравнение, находим

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{b^2} + C_1,$$

или

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C. \ ▷$$

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

7.124. $\int \arccos x\,dx$. **7.125.** $\int x\cos x\,dx$.

7.126. $\int x\ln x\,dx$. **7.127.** $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

7.128. $\int (x^2 - x + 1)\ln x\,dx$. **7.129.** $\int x^2\sin x\,dx$.

7.130. $\int x^2 e^{-x}\,dx$. **7.131.** $\int x^3 e^x\,dx$.

7.132*. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$. **7.133.** $\int \dfrac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$.

7.134. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. **7.135.** $\int \dfrac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$.

7.136. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$. **7.137.** $\int e^{\arccos x}\,dx$.

7.138. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\,dx$. **7.139.** $\int x^3 \ln x\,dx$.

7.140. $\int x3^x\,dx$. **7.141.** $\int (x^2 - 2x + 3)\cos x\,dx$.

7.142. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. **7.143.** $\int \cos(\ln x)\,dx$.

Применяя различные методы, найти интегралы:

7.144*. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. **7.145.** $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx$.

7.146. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$. **7.147.** $\int x\operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

7.148. $\int \frac{\cos^2 x}{e^x}\,dx$. **7.149*.** $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$.

7.150.** Вывести рекуррентную формулу для интеграла $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Найти I_2 и I_3.

Найти интегралы:

7.151.** $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$. **7.152**.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

7.153. $\int x\arcsin x\,dx$. **7.154.** $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$.

7.155. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$. **7.156.** $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

7.157*. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

§ 2. Интегрирование основных классов элементарных функций

1. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование произвольной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}$ с действительными коэффициентами в общем случае производится следующим образом.

Если $m \geqslant n$, т. е. исходная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *неправильная*, то следует предварительно выделить в этой дроби *целую часть*, т. е. представить ее в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}, \tag{1}$$

где $M_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ — многочлены степеней $m-n \geqslant 0$ и r соответственно, причем $r < n$, т. е. дробь $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ *правильная.*

Выделение целой части в дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ производится делением числителя на знаменатель «уголком».

Пример 1. Выделить целую часть дроби

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)}.$$

◁ Дробь неправильная, так как $m = 6 > n = 3$. Для выделения целой части записываем числитель и знаменатель в каноническом виде:

$$(x^2+1)^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1,$$
$$x(x^2-2x+1) = x^3 - 2x^2 + x,$$

и далее, выполняя деление «уголком» первого многочлена на второй, получаем в частном $x^3 + 2x^2 + 6x + 10$, а в остатке $17x^2 - 10x + 1$. Следовательно,

$$\frac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)} = x^3 + 2x^2 + 6x + 10 + \frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x},$$

и выделение целой части закончено. ▷

Как показывает формула (1), операция выделения целой части сводит интегрирование произвольной рациональной дроби к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Для того чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m < n$, следует предварительно разложить ее в сумму так называемых простейших дробей. Это разложение осуществляется следующим образом. Пусть знаменатель $Q_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ имеет действительные корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ кратностей $s_1, \ldots, s_l$ и комплексно-сопряженные пары корней $\beta_1, \overline{\beta}_1, \ldots, \beta_k, \overline{\beta}_k$ кратностей $t_1, \ldots, t_k$ соответственно $(s_1 + \ldots + s_l + 2t_1 + \ldots + 2t_k = n)$, т. е. справедливо разложение

$$Q_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{s_1}\ldots(x-\alpha_l)^{s_l}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots(x^2+p_kx+q_k)^{t_k},$$

где

$$x^2 + p_\nu x + q_\nu = (x-\beta_\nu)(x-\overline{\beta}_\nu), \quad \nu = 1, \ldots, k.$$

Тогда разложение дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в сумму простейших имеет вид

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{s_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(l)}}{x-\alpha_l} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A_{s_l}^{(l)}}{(x-\alpha_l)^{s_l}} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{B_{t_1}^{(1)}x + C_{t_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{B_1^{(k)}x + C_1^{(k)}}{x^2+p_kx+q_k} + \ldots + \frac{B_{t_k}^{(k)}x + C_{t_k}^{(k)}}{(x^2+p_kx+q_k)^{t_k}}. \quad (2)$$

Коэффициенты $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$ и $C_i^{(j)}$ в этом разложении определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x у многочлена $P_m(x)$ и многочлена, который получается в числителе правой части (2) после приведения ее к общему знаменателю (метод неопределенных коэффициентов). Можно также определять эти коэффициенты, полагая в равенстве (2) или ему эквивалентном x равным подходяще подобранным числам (в первую очередь значениям действительных корней знаменателя $Q_n(x)$).

Пример 2. Дробь $\dfrac{(x+2)^2}{x(x-1)^2}$ разложить в сумму простейших.

◁ Искомое разложение имеет вид

$$\frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получаем тождественное равенство

$$x^2 + 4x + 4 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx. \quad (3)$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x дает систему уравнений:

$$A + B = 1, \quad -2A - B + C = 4, \quad A = 4,$$

откуда получаем $A = 4$, $B = -3$, $C = 9$. Следовательно, искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2} = \frac{4}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2}.$$

Можно определить коэффициенты A, B, C другим способом, полагая последовательно в тождестве (3) $x = 0$, $x = 1$ и, например, $x = -1$: при $x = 0$ находим $A = 4$, при $x = 1$ получаем $C = 9$, а при $x = -1$ имеем $4A + 2B - C = 1$, т. е. $B = -3$.

При решении этого примера лучше всего было бы комбинировать оба способа, т. е. найти $A = 4$ при $x = 0$, $C = 9$ при $x = 1$, а B определить из равенства коэффициентов при x^2 в (3), т. е. из равенства $A + B = 1$. ▷

Формула (2) показывает, что интегрирование произвольной рациональной дроби сводится к интегрированию простейших дробей следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-\alpha}$. $\quad \displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A\ln|x-\alpha| + C.$

2) $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ $(k = 2, 3, \ldots)$. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + C.$

3) $\dfrac{Ax+b}{x^2+px+q}$, $\quad p^2 - 4q < 0$.

Метод интегрирования дробей этого типа рассмотрим на примере.

Пример 3. Найти $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$.

◁ В рассматриваемом случае дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, отрицателен: $p^2 - 4q = 1 - 4 = -3 < 0$, т. е. имеем дробь третьего типа. Так как $(x^2+x+1)' = 2x+1$, то числитель дроби преобразуем следующим образом:

$$x - 1 = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x^2+x+1)' - \frac{3}{2}$$

(это преобразование называется выделением в числителе производной квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе). Поэтому

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \\ = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Оставшийся интеграл находится выделением полного квадрата в квадратном трехчлене:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+\left(2(x+1/2)/\sqrt{3}\right)^2} = \\ = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(2(x+1/2)/\sqrt{3}\right)}{1+\left(2(x+1/2)/\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

В результате заданный интеграл равен

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \;▷$$

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $p^2-4q<0$, $k=2,\,3,\,\ldots$

Метод интегрирования дробей этого типа рассмотрим также на примере.

Пример 4. Найти $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$.

◁ Здесь $p^2-4q=4-12=-8<0$, т.е. имеем простейшую дробь четвертого типа. Сначала выделяем в числителе производную квадратного трехчлена:

$$\int \frac{x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=\int \frac{(1/2)(x^2+2x+3)'+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{2(x^2+2x+3)}+\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Для вычисления оставшегося интеграла предварительно приведем его к стандартному виду, выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int \frac{dx}{\big((x+1)^2+2\big)^2}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{\big(1+((x+1)/\sqrt{2})^2\big)^2}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{d\big((x+1)/\sqrt{2}\big)}{\big(1+((x+1)/\sqrt{2})^2\big)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{(1+u^2)^2}\bigg|_{u=(x+1)/\sqrt{2}}.$$

Далее используем метод интегрирования по частям:

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^2}=\int \frac{1+u^2-u^2}{(1+u^2)^2}\,du=\int \frac{du}{1+u^2}-\int \frac{u^2\,du}{(1+u^2)^2}=$$
$$=\operatorname{arctg} u+\frac{1}{2}\int u\,d\left(\frac{1}{1+u^2}\right)=\operatorname{arctg} u+\frac{1}{2}\frac{u}{1+u^2}-$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} u+C=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} u+\frac{u}{1+u^2}\right)+C.$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=-\frac{1}{2(x^2+2x+3)}+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+2x+3}+C.\ ▷$$

В общем случае $k>2$ рассмотренный в примере 4 прием позволяет свести вычисление интеграла $\displaystyle\int (1+u^2)^{-k}\,du$ к вычислению интеграла

$\int (1+u^2)^{-k+1}\,du$, т.е. даст рекуррентный метод вычисления интегралов этого типа.

Проиллюстрируем метод интегрирования рациональных дробей в целом на следующем примере.

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

$\triangleleft$ Дробь $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ правильная, ее разложение в сумму простейших дробей имеет вид

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Имеем

$$1 = A(x^2+1)^2 + Bx^2(x^2+1) + Cx(x^2+1) + Dx^2 + Ex.$$

Полагая $x = 0$, находим $A = 1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $0 = A + B$, $0 = C$, $0 = 2A + B + D$, $0 = C + E$, т.е.

$$B = -1, \quad C = 0, \quad D = -1 \quad \text{и} \quad E = 0.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) dx =$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

Заметим, что разложение дроби $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ на простейшие можно получить и не применяя метода неопределенных коэффициентов, а именно:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x(x^2+1)} - \frac{x}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)} - \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}. \quad \triangleright$$

Найти интегралы:

7.158. $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$. **7.159.** $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$.

7.160. $\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+4}$. **7.161.** $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x+3}$.

7.162. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 6x}$. **7.163.** $\displaystyle\int \frac{4x - 3}{x^2 - 2x + 6}\,dx$.

7.164. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4 + 6x^2 + 13}$. **7.165.** $\displaystyle\int \frac{3^x\,dx}{3^{2x} - 4\cdot 3^x + 3}$.

7.166. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$. **7.167.** $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\,dx$.

7.168. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x}\,dx$. **7.169.** $\displaystyle\int \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}\,dx$.

7.170. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$. **7.171.** $\displaystyle\int \frac{2x - 5}{(x^2 - 5x + 4)^3}\,dx$.

7.172. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2 + 2)}$. **7.173.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

7.174*. $\displaystyle\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2 + 1)^3}$. **7.175*.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2 + x + 1)^2}$.

7.176. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$. **7.177.** $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 4}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,dx$.

7.178. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + 8}$. **7.179.** $\displaystyle\int \frac{5x - 13}{(x^2 - 5x + 6)^2}\,dx$.

7.180. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1}\,dx$. **7.181.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 2x^2 + 1}$.

Найти интегралы, не применяя метода неопределенных коэффициентов:

7.182*. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + a^2x^2}$. **7.183*.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - a^4}$.

7.184. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 4x^2 + 3}$. **7.185*.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^6 + 1)^2}$.

7.186. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^7 + x^5}$. **7.187*.** $\displaystyle\int \frac{x^7}{(x^4 + 1)(x^4 - 2)}\,dx$.

7.188. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x}{(x+1)^9}\,dx$. **7.189.** $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^2}{x^9 + x^3 - 2}\,dx$.

2. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций. а) Интегралы вида $\displaystyle\int \sin^m x \cos^n x\,dx$.

Если хотя бы одно из чисел m или n — нечетное положительное целое число, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, приходим к табличному интегралу.

Пример 6. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, dx$.

◁ Имеем:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \sin x\, dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, d\cos x =$$
$$= -\int \frac{d\cos x}{\sqrt[4]{\cos x}} + \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, d\cos x = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x} + \frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x} + C. \ \triangleright$$

Если же m и n — четные неотрицательные числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 7. Найти $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$.

◁ Имеем:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4}\frac{1+\cos 2x}{2}\, dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx +$$
$$+ \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\, d\sin 2x = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \ \triangleright$$

Если $m+n = -2k$, $k \in \mathbb{N}$, т. е. $m+n$ является целым четным отрицательным числом, то целесообразно использовать подстановки $\operatorname{tg} x = t$ и $\operatorname{ctg} x = t$.

Пример 8. Найти $\int \sin^{1/3} x \cos^{-13/3} x\, dx$.

◁ Так как $\frac{1}{3} - \frac{13}{3} = -4$, то вычисление интеграла сводится к интегрированию степеней тангенса:

$$\int \sin^{1/3} x \cos^{-13/3} x\, dx = \int \operatorname{tg}^{1/3} x \cdot \frac{dx}{\cos^4 x} =$$
$$= \int \operatorname{tg}^{1/3} x (1+\operatorname{tg}^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^{1/3} x\, d\operatorname{tg} x +$$
$$+ \int \operatorname{tg}^{7/3} x\, d\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}\operatorname{tg}^{4/3} x + \frac{3}{10}\operatorname{tg}^{10/3} x + C. \ \triangleright$$

Для вычисления интегралов вида $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$, $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$, где $m = 2, 3, \ldots$, используются тригонометрические формулы

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

Пример 9. Вычислить $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$.

◁ Имеем:

$$\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx = \int \operatorname{ctg}^2 x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx = \\ = -\int \operatorname{ctg}^2 x\,d\operatorname{ctg} x - \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx = \\ = -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x + x + C. \ ▷$$

В общем случае интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, где m и n — целые числа, вычисляются с помощью рекуррентных формул, которые выводятся путем интегрирования по частям.

Пример 10. Вывести рекуррентную формулу для $\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}$ и с ее помощью найти $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

◁ Имеем:

$$I_{2k+1} = \int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^{2k+1} x}\,dx = \\ = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^{2k+1} x}\,dx + \int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x} = \int \sin x \frac{\sin x}{\cos^{2k+1} x}\,dx + I_{2k-1}.$$

Полагаем $u = \sin x$, $dv = \frac{\sin x}{\cos^{2k+1} x}\,dx$. Тогда $du = \cos x\,dx$, $v = \frac{1}{2k\cos^{2k} x}$, и интегрированием по частям получаем

$$I_{2k+1} = \frac{\sin x}{2k\cos^{2k} x} - \frac{1}{2k}\int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x} + I_{2k-1},$$

или

$$I_{2k+1} = \frac{\sin x}{2k\cos^{2k} x} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_{2k-1}$$

(рекуррентная формула).

В частности, при $k = 1$ имеем

$$I_3 = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C. \ \triangleright$$

Найти интегралы:

7.190. $\int \sin^3 x\, dx.$

7.191. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}\, dx.$

7.192. $\int \cos^7 x\, dx.$

7.193. $\int \cos^4 \frac{x}{2}\, dx.$

7.194. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx.$

7.195. $\int \cos^2 x \sin^4 x\, dx.$

7.196. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$

7.197. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx.$

7.198. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$

7.199. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}.$

7.200. $\int \frac{\cos(x + \pi/4)}{\sin x \cos x}\, dx.$

7.201. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}.$

7.202. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx.$

7.203. $\int \left(\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} + \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2}\right) dx.$

7.204. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \sin^3 x}}.$

7.205. $\int \cos^5 x\, dx.$

7.206. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx.$

7.207. $\int \sin^6 2x\, dx.$

7.208. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

7.209. $\int \frac{dx}{\cos(x/3)\sin^3(x/3)}.$

7.210. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

7.211. $\int \cos x \cos^2 2x\, dx.$

б) Для интегрирования произведений синусов и косинусов различных аргументов применяются следующие тригонометрические формулы:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big).$$

Пример 11. Найти $\int \cos 9x \cos 5x\, dx$.

◁ Имеем

$$\int \cos 9x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x+\cos 14x)\, dx = \frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{28}\sin 14x+C. \ ▷$$

Найти интегралы:

7.212. $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$. **7.213.** $\int \sin 10x \sin 15x\, dx$.

7.214. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\, dx$. **7.215.** $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\, dx$.

7.216. $\int \cos x \cos^2 3x\, dx$. **7.217.** $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx$.

в) Интегралы вида

$$\int R(\sin x,\, \cos x)\, dx,$$

где $R(u,\, v)$ — рациональная функция двух переменных, приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента t подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. При этом используются формулы

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\, dt}{1+t^2}.$$

Пример 12. Найти $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.

◁ Полагаем $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Тогда

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{\big(4(1-t^2)/(1+t^2) + 3\cdot 2t/(1+t^2) + 5\big)(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+6t+9} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2} = \frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}(x/2)+3} + C. \ ▷$$

Если под интегралом $\sin x$ и $\cos x$ содержатся только в четных степенях, то удобнее использовать подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 13. Найти $\int \frac{dx}{1 - 5\sin^2 x}$.

◁ Разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$ и используя подстановку $\operatorname{tg} x = t$, получим:

$$\int \frac{dx}{1 - 5\sin^2 x} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{dt}{1 - 4t^2} =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2\operatorname{tg} x}{1-2\operatorname{tg} x}\right| + C. \quad ▷$$

Найти интегралы:

7.218. $\int \frac{dx}{3\cos x + 2}$.

7.219. $\int \frac{dx}{3 - 2\sin x + \cos x}$.

7.220*. $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x}\, dx$.

7.221. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$.

7.222. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2\cos x + 5}\, dx$.

7.223. $\int \frac{\sin 2x}{1 + 4\cos^2 x}\, dx$.

7.224. $\int \frac{dx}{2 - \sin x}$.

7.225*. $\int \frac{dx}{(\sin x + 4)(\sin x - 1)}$.

7.226. $\int \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{ctg} x}\, dx$.

7.227. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 8\sin x\cos x + 12\cos^2 x}$.

г) Интегрирование гиперболических функций производится аналогично интегрированию тригонометрических функций, причем используются следующие формулы:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x,$$
$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1), \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1),$$
$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad \operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Найти интегралы:

7.228. $\int \operatorname{ch}^2 3x\,dx$. **7.229.** $\int \operatorname{sh}^3 2x\,dx$.

7.230. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\,dx$. **7.231.** $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx$.

7.232. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$. **7.233*.** $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 4\operatorname{ch}^2 x}$.

7.234*. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch} x - 1}$. **7.235.** $\int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1}\,dx$.

7.236. $\int \operatorname{cth}^3 x\,dx$. **7.237.** $\int \operatorname{th}^4 x\,dx$.

3. Интегрирование некоторых иррациональных функций. а) Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \ldots\right) dx,$$

где $R(x, y, z, \ldots)$ — рациональная функция своих аргументов, m_1, n_1, m_2, n_2, … — целые числа, вычисляются с помощью подстановки $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s — общий знаменатель дробей $\dfrac{m_1}{n_1}$, $\dfrac{m_2}{n_2}$, …

Пример 14. Найти $\int \dfrac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}}$.

◁ Производим подстановку $x + 3 = t^4$. Тогда $dx = 4t^3\,dt$, и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}} = 4\int \frac{t^3\,dt}{(t-1)t^2} =$$

$$= 4\int \frac{t\,dt}{t-1} = 4\int \frac{(t-1)+1}{t-1}\,dt = 4(t + \ln|t-1|) + C =$$

$$= 4(\sqrt[4]{x+3} + \ln|\sqrt[4]{x+3}-1|) + C. \ ▷$$

Найти интегралы:

7.238. $\int \dfrac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$. **7.239.** $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

7.240. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$. **7.241.** $\int \dfrac{\sqrt[6]{x+a}-1}{(x+a)(1+\sqrt[3]{x+a})}\,dx$.

7.242. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}$. **7.243.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$.

7.244. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$. **7.245.** $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

б) Вычисление интегралов вида

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

где R — рациональная функция двух аргументов, производится с помощью тригонометрических подстановок следующим образом. Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и последующей заменой переменной $u = x + \dfrac{b}{2a}$ исходный интеграл приводится к интегралу одного из следующих трех типов:

1) $\displaystyle\int R(u,\ \sqrt{l^2-u^2})\,du$,

2) $\displaystyle\int R(u,\ \sqrt{l^2+u^2})\,du$,

3) $\displaystyle\int R(u,\ \sqrt{u^2-l^2})\,du$.

Последние интегралы тригонометрической или гиперболической подстановкой соответственно

1) $u = l\sin t$ или $u = l\,\mathrm{th}\,t$,
2) $u = l\,\mathrm{tg}\,t$ или $u = l\,\mathrm{sh}\,t$,
3) $u = l\sec t$ или $u = l\,\mathrm{ch}\,t$

приводятся к интегралам вида $\displaystyle\int R(\sin t,\ \cos t)\,dt$ или $\displaystyle\int R(\mathrm{sh}\,t,\ \mathrm{ch}\,t)\,dt$.

Пример 15. Найти $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

◁ Производим подстановку $x = a\,\mathrm{ch}\,t$. Тогда $dx = a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$, $\sqrt{x^2-a^2} = a\,\mathrm{sh}\,t$, и далее

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = a^2\int \mathrm{sh}^2\,t\,dt = \frac{a^2}{2}\int(\mathrm{ch}\,2t-1)\,dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\mathrm{sh}\,2t}{2}-t\right)+C = \frac{a^2}{2}(\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t-t)+C =$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C. \ \triangleright$$

Пример 16. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$.

◁ Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене, имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2+3)^3}}, \quad \text{где} \quad u = x+2.$$

Производя теперь подстановку $u = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t$, $du = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,dt$, $\sqrt{u^2+3} = \sqrt{3}\sec t$, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+3)^3}} = \int \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t\sqrt{3^3}\sec^3 t}\,dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt =$$
$$= \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\frac{u}{\sqrt{u^2+3}} = \frac{1}{3}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}} + C. \ ▷$$

При вычислении интегралов вида

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

следует предварительно выделить в числителе производную квадратного трехчлена.

Пример 17. Найти $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx$.

◁ Имеем

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx = \int \frac{(-1/2)(-2x-4)-3}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1-4x-x^2)'}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+2)^2}} =$$
$$= -\sqrt{1-4x-x^2} - 3\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$$

Заметим, что в этом примере нет необходимости производить тригонометрическую подстановку, так как выделение полного квадрата сразу приводит к табличному интегралу. ▷

Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(r = 1, 2)$ сводятся к рассмотренным выше интегралам с помощью подстановки $mx+n = \dfrac{1}{t}$.

Пример 18. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$.

◁ Полагаем $x = \frac{1}{t}$. Тогда $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-2x-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} - 1} = \frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}$ и

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}} = -\int \frac{dt}{t^2(1/t)(\sqrt{1-2t-t^2}/t)} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}} =$$

$$= -\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{2}} + C = -\arcsin\frac{1/x+1}{\sqrt{2}} + C = -\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{2}} + C. \ \triangleright$$

Найти интегралы:

7.246. $\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}$.

7.247. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$.

7.248. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

7.249. $\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

7.250. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$.

7.251. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

7.252. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$.

7.253. $\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}\,dx$.

7.254. $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}\,dx$.

7.255. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

7.256. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$.

7.257. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$.

7.258. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x+2x^2}}$.

7.259. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}$.

7.260. $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$.

7.261. $\int \sqrt{(3-2x-x^2)^3}\,dx$.

7.262. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$.

7.263. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx$.

7.264. $\int \sqrt{x^2-2x+10}\,dx$.

7.265. $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$.

7.266. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}\,dx.$ **7.267.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx.$

7.268. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}.$ **7.269.** $\displaystyle\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx.$

§ 3. Смешанные задачи на интегрирование

Найти интегралы:

7.270. $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x+4}\,dx.$ **7.271.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-x-1}\,dx.$

7.272. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)}.$ **7.273.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}.$

7.274. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5(x^4+1)^2}.$ **7.275.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+2}}.$

7.276. $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{6+4\ln x-\ln^2 x}}.$ **7.277.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+4}}.$

7.278. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-4}\,dx.$ **7.279.** $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+4x-5}\,dx.$

7.280. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx.$ **7.281.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{16-x^2}}.$

7.282. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+16}}.$ **7.283.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$

7.284. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}.$ **7.285.** $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx.$

7.286. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\sin x}\,dx.$ **7.287.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+\cos x}.$

7.288. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)^4}\,dx.$ **7.289.** $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}.$

7.290. $\displaystyle\int \frac{dx}{3-4\sin^2 x}.$ **7.291.** $\displaystyle\int \frac{2-\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx.$

7.292. $\int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sqrt{5-\sec^2 x}}\, dx.$

7.293. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x + 5}\, dx.$

7.294. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x}.$

7.295. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

7.296. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$

7.297. $\int x \sin x \cos 2x\, dx.$

7.298. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}.$

7.299. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}.$

7.300. $\int \operatorname{th}^5 x\, dx.$

7.301. $\int \frac{\operatorname{ch}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\, dx.$

7.302. $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$

7.303. $\int \sin^2(\ln x)\, dx.$

7.304. $\int x e^{2x}\, dx.$

7.305. $\int x e^{-x^2}\, dx.$

7.306. $\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x} + 4e^x - 5}.$

7.307. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x}\, dx.$

7.308. $\int e^{\arcsin x}\, dx.$

7.309. $\int \sqrt{e^x - 1}\, dx.$

7.310. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

7.311. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\, dx.$

7.312. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx.$

7.313. $\int x(1+x^2) \operatorname{arctg} x\, dx.$

7.314. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\, dx.$

7.315. $\int x \ln(4+x^4)\, dx.$

7.316. $\int x\sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1}\, dx.$

7.317. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

7.318. $\int x^x(1+\ln x)\, dx.$

7.319. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}\, dx.$

§ 4. Определенный интеграл и методы его вычисления

1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ — произвольное разбиение этого отрезка на n частей (рис. 14), то *интегральной суммой* функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется сумма вида

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

где $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Геометрически S_n есть алгебраическая сумма площадей прямоугольников, имеющих основания Δx_k и высоты $f(\xi_k)$.

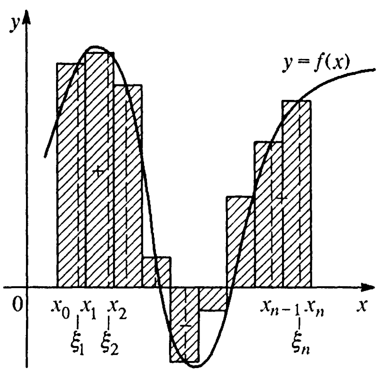


Рис. 14

Если определенная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ такова, что существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при условии, что наибольшая из разностей Δx_k стремится к нулю, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, ни от выбора точек ξ_k на этих отрезках, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, а сам предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{1}$$

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Геометрически определенный интеграл (1) представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, ограниченных графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, причем площади, расположенные выше оси Ox, входят в эту сумму со знаком плюс, а площади, расположенные ниже оси Ox, — со знаком минус.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_1^2 x^2\,dx$, рассматривая определенный интеграл как предел интегральных сумм.

◁ 1-й способ. Разделим отрезок интегрирования $[1, 2]$ на n равных частей длины $\Delta x = \dfrac{1}{n}$. Точки деления:

$$x_0 = 1,\ \ x_1 = 1 + \frac{1}{n},\ \ x_2 = 1 + \frac{2}{n},\ \ \ldots,\ \ x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n},\ \ x_n = 2.$$

В качестве точек ξ_k выберем, например, левые концы каждого частичного отрезка. Тогда

$$f(x_0) = 1,\ \ f(x_1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2,$$
$$f(x_2) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2,\ \ \ldots,\ \ f(x_{n-1}) = \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{n}\left(1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{n^3}\left(n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (2n-1)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{2n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right).$$

Применяя формулу суммы квадратов целых чисел

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

находим

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = \frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2},$$

откуда

$$\int_1^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2} = \frac{7}{3}.$$

2-й способ. Разобьем отрезок $[1, 2]$ на части так, чтобы абсциссы точек деления образовали геометрическую прогрессию:

$$x_0 = 1,\ \ x_1 = q,\ \ x^2 = q^2,\ \ \ldots,\ \ x_{n-1} = q^{n-1},\ \ x_n = q^n = 2,$$

где $q = 2^{1/n}$. Точку ξ_k выберем на левом конце k-го отрезка. Тогда

$$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = q^2,\ f(x_2) = q^4,\ \ldots,\ f(x_{n-1}) = q^{2(n-1)},$$

$$\Delta x_1 = q - 1,\ \Delta x_2 = q^2 - q = q(q-1),$$
$$\Delta x_3 = q^2(q-1),\ \ldots,\ \Delta x_n = q^{n-1}(q-1),$$

$$S_n = 1\cdot(q-1) + q^3(q-1) + q^6(q-1) + \ldots + q^{3(n-1)}(q-1) =$$
$$= (q-1)(1 + q^3 + q^6 + \ldots + q^{3(n-1)}) = (q-1)\frac{q^{3n}-1}{q^3-1} = \frac{q^{3n}-1}{q^2+q+1} =$$
$$= \frac{2^3-1}{2^{2/n}+2^{1/n}+1} = \frac{7}{2^{2/n}+2^{1/n}+1}.$$

Следовательно,

$$\int_1^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{7}{2^{2/n}+2^{1/n}+1} = \frac{7}{3}. \ \triangleright$$

Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм:

7.320*. $\displaystyle\int_0^5 (1+x)\,dx.$ **7.321*.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx.$

7.322*. $\displaystyle\int_0^{10} e^x\,dx.$ **7.323*.** $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2}.$

2. Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона–Лейбница. Если $F(x)$ — одна из первообразных непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, то справедлива следующая формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 2. Вычислить $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$.

$\triangleleft$ Имеем

$$\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 \approx 0{,}69. \ \triangleright$$

Используя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить интегралы:

7.324. $\int\limits_{-1}^{2} x^3\,dx.$

7.325. $\int\limits_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

7.326. $\int\limits_{1}^{2} (3x^2 - 2x + 1)\,dx.$

7.327. $\int\limits_{0}^{1} (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})\,dx.$

7.328. $\int\limits_{1}^{8} \frac{2 + 5\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx.$

7.329. $\int\limits_{2}^{9} \sqrt[3]{x-1}\,dx.$

7.330. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx.$

7.331. $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

7.332. $\int\limits_{1}^{2} e^x\,dx.$

7.333. $\int\limits_{0}^{3} 2^x\,dx.$

7.334. $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{x}.$

7.335. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{2x-1}.$

7.336. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2\,dx}{1+x^6}.$

7.337. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin^2\varphi\,d\varphi.$

7.338. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x\,dx.$

7.339. $\int\limits_{0}^{2} \operatorname{sh}^3 x\,dx.$

7.340. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$

7.341. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$

7.342. $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^2+3}{x-2}\,dx.$

7.343. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2}\,dx.$

7.344. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx.$

7.345. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx.$

7.346. $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$. **7.347.** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\alpha\,d\alpha$.

7.348. $\displaystyle\int\limits_0^{1/3} \mathrm{ch}^2\,3x\,dx$. **7.349.** $\displaystyle\int\limits_2^3 \frac{dy}{y^2-2y-8}$.

7.350. $\displaystyle\int\limits_{3/4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. **7.351.** $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}\,dx$.

7.352. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$.

С помощью определенных интегралов найти пределы сумм:

7.353.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

7.354. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos 2\frac{\pi}{2n}+\ldots+\cos\,(n-1)\frac{\pi}{2n}\right)$.

7.355. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

7.356. $y=\dfrac{1}{2}x^2,\ y=0,\ x=2,\ x=3$.

7.357. $y=\sqrt[3]{x},\ y=0,\ x=1,\ x=8$.

7.358. $y=6-x-2x^2,\ y=x+2$.

7.359. $y=\dfrac{x^2}{4},\ y=2\sqrt{x}$.

7.360. $y=\cos x,\ y=0,\ x=-\dfrac{\pi}{2},\ x=-\dfrac{\pi}{4}$.

7.361. $y=e^{-x},\ y=0,\ x=1,\ x=2$.

7.362. $y=\dfrac{2}{x},\ y=0,\ x=2,\ x=3$.

7.363. $y=\dfrac{3}{x},\ x+y=4$.

3. Свойства определенного интеграла. 1) Если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

2) Если $f(x) \leqslant g(x)$ на $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

3) $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

4) Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, m — наименьшее, M — наибольшее значения $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

(теорема об оценке определенного интеграла).

Пример 3. Оценить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

◁ Имеем: $1 \leqslant 1 + x^4 \leqslant 2$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant 1,$$

т. е. $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $M = 1$, $b - a = 1$. Следовательно, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant I \leqslant 1$. ▷

5) Если $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $g(x) \geqslant 0$, m и M — наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)\,dx$$

(обобщенная теорема об оценке определенного интеграла).

6) Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(теорема о среднем значении).

Число
$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$
называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a,\,b]$.

7) Если $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ интегрируема на $[a,\,b]$ и $g(x)\geqslant 0$, то существует такая точка $c\in(a,\,b)$, что справедливо равенство
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$
(обобщенная теорема о среднем).

8) Если $f^2(x)$ и $g^2(x)$ интегрируемы на $[a,\,b]$, то
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx}$$
(неравенство Коши–Буняковского).

9) Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах. Если функция $f(x)$ четная, то $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$. Если функция $f(x)$ нечетная, то $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

10) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\,b]$, то *интеграл с переменным верхним пределом*
$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$
является первообразной для функции $f(x)$, т. е.
$$\Phi'(x)=\Bigl(\int_a^x f(t)\,dt\Bigr)'=f(x),\quad x\in[a,\,b].$$

11) Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы в точке $x\in(a,\,b)$ и $f(t)$ непрерывна при $\varphi(a)\leqslant t\leqslant\psi(b)$, то
$$\Bigl(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\Bigr)'_x=f\bigl(\psi(x)\bigr)\psi'(x)-f\bigl(\varphi(x)\bigr)\varphi'(x).$$

Пример 4. $I(x) = \int\limits_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt$. Найти $I'(x)$.

◁ Используя свойство 11) и учитывая, что $\varphi(x) = 0$, т.е. $\varphi'(x) = 0$, имеем

$$I'(x) = e^{-(x^2)^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{-x^4}. \ \triangleright$$

7.364. Определить знаки интегралов, не вычисляя их:

а)* $\int\limits_{-2}^{1} \sqrt[3]{x}\, dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} x^3 e^x\, dx$; в) $\int\limits_{1/3}^{1} x \ln x\, dx$.

7.365. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ или $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$; б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$ или $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3}$;

в) $\int\limits_0^1 e^{-x} \cos^2 x\, dx$ или $\int\limits_0^1 e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$.

7.366. Найти среднее значение функции на данном отрезке:

а) x^3, $0 \leqslant x \leqslant 1$; в) $\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

б) $\sqrt[3]{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; г) $\cos^3 x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

7.367. Сила переменного тока меняется по закону

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right),$$

где T — период. Найти среднее значение силы тока за полупериод.

7.368. Оценить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3}\, dx$.

7.369. Оценить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$.

7.370. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{(1+x)(1+x^3)}\,dx$, пользуясь:

а) обобщенной теоремой об оценке интеграла;

б) неравенством Коши–Буняковского.

7.371. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{(4+x^3)x}\,dx$, пользуясь:

а) обобщенной теоремой об оценке интеграла;

б) неравенством Коши–Буняковского.

7.372. Найти: а) $\dfrac{dI}{d\beta}$, б) $\dfrac{dI}{d\alpha}$, если $I = \int\limits_\alpha^\beta \dfrac{e^x}{x}\,dx$ $(0 < \alpha < \beta)$.

7.373. Найти точки экстремума функции

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x \frac{\cos t}{t}\,dt \quad \left(x > 0,\ 0 < a < \frac{\pi}{2}\right).$$

Найти производные следующих функций:

7.374. $\Phi(x) = \int\limits_0^1 \dfrac{\sin t}{t}\,dt.$ **7.375.** $\Phi(x) = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \sin(t^2)\,dt.$

7.376. $\Phi(x) = \int\limits_x^0 \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^3}}.$ **7.377.** $\Phi(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \dfrac{dt}{\ln t}$ $(x > 0)$.

7.378. Доказать, что $\int\limits_{-3}^3 \dfrac{x^2 \sin x}{1+x^4}\,dx = 0.$

4. Замена переменной в определенном интеграле. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1, t_2]$, причем $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt.$$

Пример 5. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

◁ Применим подстановку $x = \sin t$. Тогда $dx = \cos t\,dt$, $t = \arcsin x$, $t_1 = \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ и $t_2 = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t\,dt = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt = (-\operatorname{ctg} t - t)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}. \ \triangleright$$

7.379. Можно ли интеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ вычислить с помощью подстановки $x = \sin t$?

Вычислить интегралы с помощью указанных подстановок:

7.380. $\displaystyle\int\limits_{1}^{6} \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}, \quad 3x-2=t^2.$

7.381. $\displaystyle\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \quad e^x+1=t^2.$

7.382. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\operatorname{sh} 1} \sqrt{x^2+1}\,dx, \quad x = \operatorname{sh} t.$

7.383. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$

7.384. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = t.$

7.385. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{3-2x-x^2}\,dx, \quad x+1 = 2\sin t.$

Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

7.386. $\displaystyle\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **7.387.** $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$.

7.388. $\displaystyle\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$. **7.389.** $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

7.390. $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)^2}$. **7.391.** $\displaystyle\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$.

7.392. $\displaystyle\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$. **7.393.** $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

7.394. $\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}\,dx$. **7.395.** $\displaystyle\int\limits_{0}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

7.396. Показать, что $\displaystyle\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{\ln x} = \int\limits_{1}^{2} \frac{e^x}{x}\,dx$.

7.397. Показать, что $\displaystyle\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{dx}{\arcsin x} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

7.398. Убедиться в том, что $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} \frac{3x^7-2x^5+x^3-x}{x^4+3x^2+1}\,dx = 0$.

5. Интегрирование по частям. Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то

$$\int\limits_{a}^{b} u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_{a}^{b} v\,du$$

(ф о р м у л а и н т е г р и р о в а н и я п о ч а с т я м).

Пример 6. Вычислить $\int\limits_1^e \ln x\,dx$.

◁ Положим $u = \ln x$, $dv = dx$, тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = x$. Имеем

$$\int\limits_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x\cdot\frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1. \quad ▷$$

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

7.399. $\int\limits_0^1 xe^x\,dx$. **7.400.** $\int\limits_0^1 \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

7.401. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \dfrac{x\,dx}{\cos^2 x}$. **7.402.** $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$.

7.403. $\int\limits_0^{\pi/4} e^{3x}\sin 4x\,dx$. **7.404.** $\int\limits_2^{2\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx$.

7.405. $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$. **7.406.** $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

7.407. $\int\limits_0^{\pi/4} x^2\cos 2x\,dx$. **7.408.** $\int\limits_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx$.

7.409. Показать, что для интеграла

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx, \quad n\in\mathbb{N},$$

верна рекуррентная формула $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$. Вычислить I_7 и I_8.

7.410. Показать, что для интеграла

$$I_n = \int\limits_0^1 x^n e^{-x}\,dx, \quad n\in\mathbb{N},$$

верна рекуррентная формула $I_n = -\dfrac{1}{e} + nI_{n-1}$. Вычислить I_4.

§ 5. Несобственные интегралы

1. Интегралы с бесконечными пределами. Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < +\infty$, то по определению

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (1), то несобственный интеграл называется *сходящимся*, если этот предел не существует, то — *расходящимся*.

Геометрически несобственный интеграл (1) в случае $f(x) > 0$ есть площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямой $x = a$ и осью Ox (асимптотой).

Аналогично определяется интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$. Далее, по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{2}$$

где c, $-\infty < c < +\infty$, — произвольно, причем интеграл в левой части равенства (2) считается сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части.

Признаки сходимости и расходимости приведем только для интегралов вида (1).

1) Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$, то интеграл (1) сходится и равен

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a);$$

если же $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ не существует, то интеграл (1) расходится.

2) Пусть при $a \leqslant x < +\infty$ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Если $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то сходится и $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, причем $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$. Если $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится и $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ (признаки сравнения).

3) Если при $a \leqslant x < +\infty$ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно (предельный признак сравнения).

4) Если сходится $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (последний интеграл называется в этом случае *абсолютно сходящимся*).

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx$.

◁ Имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^b\right) = $$

$$= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}(1-e^{-3b}) = \frac{1}{3}. \ ▷$$

На практике в качестве интеграла, с которым производится сравнение, обычно используются интегралы вида

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx, \quad a > 0, \quad \alpha > 0,$$

которые сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha \leqslant 1$.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

◁ При $x \to +\infty$ имеем

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} = \frac{x(1+1/x)}{x^{3/2}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Так как интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{1/2}}$ расходится ($\alpha = 1/2 < 1$), то и заданный интеграл также расходится. ▷

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

7.411. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

7.412. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

7.413. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}$.

7.414. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x \, dx$.

7.415. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2 + 4}$.

7.416. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 + 2x}{x^2(1 + x)} \, dx$.

7.417. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2 + 5)^3}}$.

7.418. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \, dx$.

7.419. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \cos x \, dx$.

7.420. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3 + 8} \, dx$.

7.421. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3} \, dx$.

7.422. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^3}}$.

7.423. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$.

7.424. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$.

Исследовать на сходимость интегралы:

7.425. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{3 + 2x^2 + 5x^4}$.

7.426. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2 + 1}}{x^3 + 3x + 1} \, dx$.

7.427. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3x^2 + \sqrt{(x + 1)^3}}{2x^3 + \sqrt[3]{x^5} + 1} \, dx$.

7.428. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3 + \sin x}{\sqrt[3]{x}} \, dx$.

7.429. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x + 1)(x + 2)}}$.

7.430. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{2 + x\sqrt{x}} \, dx$.

7.431. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$. **7.432.** $\displaystyle\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x}$.

2. Интегралы от неограниченных функций. Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < b$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$, то по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma\to+0} \int\limits_a^{b-\gamma} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (3), то несобственный интеграл называется *сходящимся*, если этот предел не существует, то — *расходящимся*.

Геометрически несобственный интеграл (3) в случае $f(x) > 0$ есть площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямой $x = a$ и вертикальной асимптотой $x = b$.

Аналогично определяется несобственный интеграл в случае $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

В случае, когда $c \in (a, b)$ — точка разрыва и функция $f(x)$ неограничена в любой окрестности точки c,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma_1\to+0} \int\limits_a^{c-\gamma_1} f(x)\,dx + \lim_{\gamma_2\to+0} \int\limits_{c+\gamma_2}^{b} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны признакам из п. 1.

На практике в качестве интеграла, с которым производится сравнение, обычно используются интегралы вида

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0), \tag{5}$$

которые сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geqslant 1$ (сравните с аналогичными интегралами в случае бесконечных пределов интегрирования).

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

◁ При $x \to 1$ $\dfrac{1}{\ln x} \sim \dfrac{1}{x-1}$ (эквивалентные бесконечно большие), так как

$$\lim_{x\to1} \frac{1/\ln x}{1/(x-1)} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x\to1} \frac{1}{1/x} = 1.$$

Интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x-1}$ расходится как интеграл типа (5) при $\alpha = 1$. Следовательно, расходится и $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$. ▷

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\operatorname{tg} x - x}\, dx.$$

◁ Задача состоит в том, чтобы установить характер поведения подынтегральной функции при $x \to +0$. В числителе при $x \to +0$ имеем

$$2x^2 + \sqrt{x} = x^{1/2}(2x^{3/2} + 1) \sim x^{1/2}.$$

В знаменателе воспользуемся формулой Маклорена для функции $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x - x = \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - x = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{3}x^3.$$

Следовательно, при $x \to +0$

$$\frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\operatorname{tg} x - x} \sim \frac{x^{1/2}}{x^3/3} = 3\frac{1}{x^{5/2}}.$$

Так как интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{5/2}}$ расходится, то расходится и заданный интеграл. ▷

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

7.433. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 + x^4}$. **7.434.** $\int\limits_0^2 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{4/5}}$. **7.435.** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

7.436. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$. **7.437.** $\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 1}}$.

7.438. $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

7.439. $\displaystyle\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

7.440. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{2/\pi}} \cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}$.

7.441. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Исследовать на сходимость интегралы:

7.442. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

7.443. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

7.444. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg}x-x}$.

7.445. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}\,dx$.

7.446. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

7.447. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\,dx$.

7.448. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

7.449. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

7.450. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$.

7.451. $\displaystyle\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$.

7.452. Доказать, что при $\alpha>0$ определяющий *гамма-функцию* $\Gamma(\alpha)$ интеграл Эйлера $\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$ сходится, и установить следующие соотношения:

а) если $\alpha=n$ — целое число, то $\Gamma(n+1)=n!$;

б) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ для любого $\alpha>0$;

в)* $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$; г) $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$;

д) $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^n}$, n — целое.

§ 6. Геометрические приложения определенного интеграла

1. Площадь плоской фигуры. Площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, или площадь *криволинейной трапеции*, ограниченной дугой графика функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 15), вычисляется по формуле

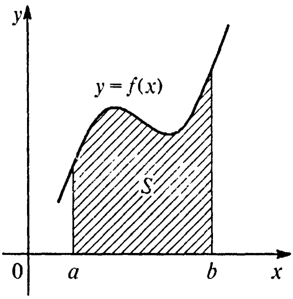


Рис. 15

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 16), определяется по формуле

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx. \qquad (2)$$

Простейшие задачи на применение формул (1) и (2) были приведены в § 4 (задачи 7.356–7.363).

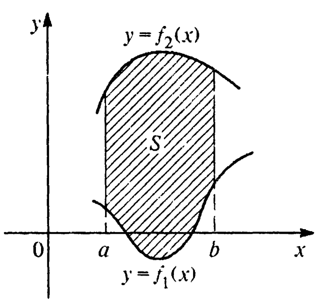


Рис. 16

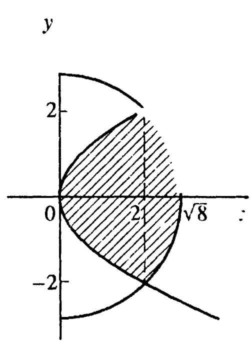


Рис. 17

Пример 1. Найти площадь фигуры, лежащей в правой полуплоскости и ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 8$ и параболой $y^2 = 2x$.

◁ Найдем точки пересечения кривых (рис. 17), решив систему уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8, \\ y^2 &= 2x. \end{aligned}$$

Получим точки (2, 2) и (2, −2). Используя симметрию относительно оси Ox, найдем искомую площадь S как удвоенную сумму площадей криволинейных трапеций, ограниченных соответственно дугами параболы $y = \sqrt{2x}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, и окружности $y = \sqrt{8 - x^2}$, $2 \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$:

$$S = 2\left(\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8 - x^2}\,dx\right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^2 + \left(\frac{x}{2}\sqrt{8 - x^2} + 4\arcsin\frac{x}{\sqrt{8}}\right)\Big|_2^{\sqrt{8}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} + 2\pi - 2 - \pi\right) = 2\pi + \frac{4}{3}. \ \triangleright$$

Иногда удобно использовать формулы, аналогичные (1) и (2), но по переменной y (считая x функцией от y), в частности,

$$S = \int_c^d \big(f_2(y) - f_1(y)\big)\,dy. \tag{3}$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $(y-2)^2 = x-1$, касательной к ней в точке с ординатой $y_0 = 3$ и осью Ox.

◁ Форма фигуры (рис. 18) не позволяет непосредственно применить формулы (1) или (2). Однако если рассматривать фигуру относительно оси

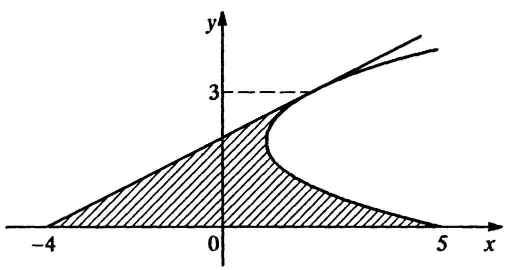


Рис. 18

Oy, то можно применить формулу (3). Итак, пусть y — независимая переменная. Уравнение параболы запишем в виде $x = y^2 - 4y + 5$. Найдем уравнение касательной к параболе. Оно имеет вид $x - x_0 = x_0'(y - y_0)$. Так как $x_y' = 2(y-2)$, то $x_0' = x'|_{y=3} = 2$. Найдя, далее, абсциссу точки касания $x_0 = 2$, получаем уравнение касательной

$$x - 2 = 2(y - 3), \quad \text{или} \quad x = 2y - 4.$$

Полагая в (3) $f_1(y) = 2y - 4$, $f_2(y) = y^2 - 4y + 5$, имеем:

$$S = \int_0^3 \left((y^2 - 4y + 5) - (2y - 4)\right) dy = \int_0^3 (y^2 - 6y + 9)\, dy =$$

$$= \int_0^3 (y-3)^2\, dy = \frac{1}{3}(y-3)^3\Big|_0^3 = 9. \ \triangleright$$

Заметим, что применение формул (1) и (2) при решении примера 2 потребовало бы вычисления суммы трех интегралов:

$$S = \int_{-4}^{1} \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx + \int_1^2 \left(\left(\frac{1}{2}x + 2\right) - (2 + \sqrt{x-1})\right) dx +$$

$$+ \int_1^5 (2 - \sqrt{x-1})\, dx.$$

П р и м е р 3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 1/x^2$, осью Ox и прямой $x = 1$ и лежащей правее этой прямой.

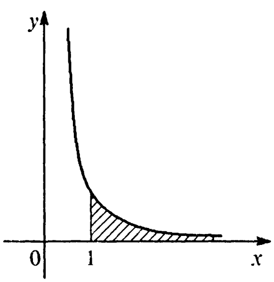


Рис. 19

$\triangleleft$ Искомая площадь (рис. 19) выражается несобственным интегралом

$$S = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1. \ \triangleright$$

Если фигура ограничена кривой, имеющей параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, то площадь ее вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, dx(t), \qquad (4)$$

где пределы интегрирования находятся из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ ($y(t) \geqslant 0$ на отрезке $[t_1, t_2]$).

Формула (4) применима также для вычисления площади фигуры, ограниченной замкнутой кривой (изменение параметра t от t_1 до t_2 должно соответствовать обходу контура по часовой стрелке).

Пример 4. Найти площадь петли кривой

$$x = a(t^2 - 1), \quad y = b(4t - t^3) \quad (a > 0,\ b > 0).$$

◁ Найдем точки пересечения кривой с координатными осями. Имеем: $x = 0$ при $t = \pm 1$; $y = 0$ при $t = 0$, $t = \pm 2$. Следовательно, получаем следующие точки: $(0, 3b)$ при $t = 1$; $(0, -3b)$ при $t = -1$; $(-a, 0)$ при $t = 0$; $(3a, 0)$ при $t = \pm 2$. Точка $(3a, 0)$ является точкой самопересечения кривой. При $0 \leqslant t \leqslant 2$ $y \geqslant 0$; при $-2 \leqslant t \leqslant 0$ $y \leqslant 0$ (рис. 20).

Площадь фигуры находим как удвоенную площадь верхней ее половины:

$$S = 2\int_{-a}^{3a} y\,dx = 2\int_0^2 y(t)x'(t)\,dt = 2\int_0^2 b(4t - t^3)a \cdot 2t\,dt =$$

$$= 4ab\int_0^2 (4t^2 - t^4)\,dt = 4ab\left(\frac{4}{3}t^3 - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{256}{15}ab. \ ▷$$

Площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, где φ и r — полярные координаты,

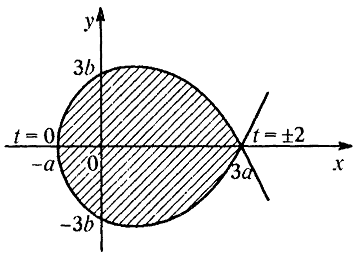


Рис. 20

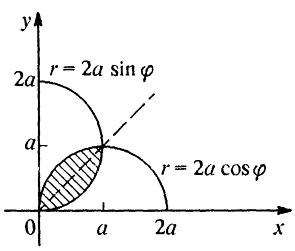


Рис. 21

или площадь *криволинейного сектора*, ограниченного дугой графика функции $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\varphi. \tag{5}$$

Пример 5. Найти площадь лунки, ограниченной дугами окружностей $r = 2a\cos\varphi$, $r = 2a\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $a > 0$.

◁ Окружности пересекаются при $\varphi = \pi/4$; рассматриваемая фигура (рис. 21) симметрична относительно луча $\varphi = \pi/4$. Следовательно, ее площадь можно вычислять так:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 4a^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2\varphi) \, d\varphi =$$

$$= 2a^2 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) a^2. \ \triangleright$$

7.453. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.

7.454. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

7.455. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$.

7.456. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$.

7.457. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{27}{x^2 + 9}$ и $y = \frac{x^2}{6}$.

7.458. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2px$ и $y^2 = \frac{4}{p}(x - p)^3$ $(p > 0)$.

7.459. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностями $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = a^2$ и прямой $y = a$.

7.460. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $y = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2}$ и осью Oy.

7.461. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Oy, параболой $(x - a)^2 = 2p(y - b)$ и касательной к ней в точке с абсциссой $x = c$ $(c > a > 0,\ p > 0)$.

7.462. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$.

7.463. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3 + 2x - x^2$ и осью Ox.

7.464. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \arcsin x$ и прямыми $x = 0$, $y = \pi/2$.

7.465. Найти площадь верхней лунки, ограниченной окружностями $x^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 + 2ay = a^2$.

7.466. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $(x-1)\times$ $\times(y+2)=2$ и $x+y=2$.

7.467. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$, касательной к ней в точке $x=e$ и осью Ox.

7.468. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=$ $=\ln(x+2)$, $y=2\ln x$, $y=0$.

7.469. Найти площади каждой из двух частей, на которые круг $x^2+y^2\leqslant 2ax$ разделен параболой $y^2=2ax-a^2$.

7.470. Найти площадь лунки, ограниченной гиперболой x^2- $-y^2=a^2$ и параболой $y^2=\dfrac{3}{2}ax$.

7.471. Найти площадь гиперболического сегмента с высотой h и основанием $2r$ (действительная полуось гиперболы равна a).

7.472. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $a^2y^2=$ $=\dfrac{x^5}{2a-x}$ и ее асимптотой.

7.473. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями x^2- $-y^2=a^2$, $(x^2-a^2)^3y^2=a^8$ и осью Ox $(x>0)$.

7.474. Найти площади каждой из двух частей, на которые круг $x^2+y^2\leqslant 2ax$ разделен гиперболой $4x^2-3y^2=a^2$.

7.475. Найти площадь эллиптического сегмента с высотой h и основанием $2r$ (большая полуось эллипса равна a, основание сегмента параллельно малой оси).

7.476. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=$ $=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=\dfrac{a^2x}{a^2+x^2}$ и осью Ox.

7.477. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2=$ $=\dfrac{x^4}{a^2-x^2}$ и ее асимптотами.

7.478. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x=$ $=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

7.479. Найти площадь петли кривой $x=\dfrac{1}{3}t(3-t^2)$, $y=t^2$.

7.480. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ и осью Ox.

7.481. Найти площадь петли кривой $x=a(t^2+1)$, $y=b(t^3-3t)$.

7.482. Найти площадь петли кривой $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$.

7.483. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=$ $=a(1+\sin\varphi)$.

7.484. Найти площадь одного лепестка кривой $r=a\sin 2\varphi$.

7.485. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r=$ $=a\sin 5\varphi$.

7.486. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = a\operatorname{tg}\varphi\sec\varphi$, $r = 2a\cos\varphi$ и полярной осью.

7.487. Найти площадь фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной кривыми $r = a\operatorname{tg}\varphi$, $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$ и полярной осью.

7.488. Найти площадь фигуры, ограниченной двумя последовательными витками логарифмической спирали $r = e^{\varphi}$, начиная с $\varphi = 0$.

7.489. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r^2 = 2\cos 2\varphi$, $r = 1$ $(r \geqslant 1)$.

7.490. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a\cos 3\varphi$.

7.491. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2\sin 2\varphi$.

7.492. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $r = \sqrt{3}\sin\varphi$ и кардиоидой $r = 1 - \cos\varphi$ (вне кардиоиды).

2. Длина дуги кривой. Если гладкая кривая задана уравнением $y = f(x)$, то длина l ее дуги равна

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx,$$

где a и b — абсциссы концов дуги.

Если же кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, то

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt.$$

Аналогично выражается длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$:

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z')^2}\,dt.$$

Если задано полярное уравнение гладкой кривой $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi.$$

Пример 6. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки (4, 8).

◁ Имеем:

$$y = x^{3/2}, \quad y' = \frac{3}{2}x^{1/2},$$

$$l = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1). \ ▷$$

Пример 7. Найти длину астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

◁ Имеем:

$$x'_t = -3a\cos^2 t\sin t, \quad y'_t = 3a\sin^2 t\cos t,$$

$$\frac{1}{4}l = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 3a\int\limits_0^{\pi/2} \sin t\cos t\,dt = 3a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2},$$

откуда $l = 6a$. ▷

Пример 8. Найти длину кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$ $(a > 0)$.

◁ Имеем:

$$r' = a\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{2}l = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi = 2a\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a,$$

откуда $l = 8a$. ▷

7.493. Найти длину дуги параболы $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 1$.

7.494. Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками ее пересечения с осью Ox.

7.495. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = \frac{8}{27p} \times (x-p)^2$, лежащей внутри параболы $y^2 = 2px$.

7.496. Найти длину дуги кривой $y = a\ln(a^2 - x^2)$ $(a > 1)$, лежащей выше оси Ox.

7.497. Найти длину замкнутой кривой $8a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

7.498*. Найти периметр лунки, образованной окружностями: $x^2 + y^2 = 2ax$ и $x^2 + y^2 = 2by$ $(a > b > 0)$.

7.499. Найти длину дуги цепной линии $y = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x$ от $x = 0$ до $x = 3$.

7.500. Найти длину дуги кривой $y = \frac{2}{\pi}\ln\sin\frac{\pi x}{2}$ от $x = \frac{1}{2}$ до $x = \frac{3}{2}$.

7.501. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = \frac{5}{p} \times$ $\times (x - p)^3$, отсекаемой прямой $x = 2p$ $(p > 0)$.

7.502. Найти длину дуги кривой $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y =$ $= a(3\sin t - \sin 3t)$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$ $(a > 0)$.

7.503. Найти длину дуги кривой $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$ от $t = 0$ до $t = 1$.

7.504. Найти длину петли кривой $x = t^2$, $y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right)$.

7.505. Найти длину дуги кривой $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ между точками ее пересечения с осями координат.

7.506. Найти длину петли кривой $x = a(t^2 + 1)$, $y = \frac{a}{3}(t^3 - 3t)$ $(a > 0)$.

7.507. На циклоиде $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ найти точку, которая делит длину первой арки циклоиды в отношении $1:3$, считая от начала координат $(a > 0)$.

7.508. Найти длину дуги логарифмической спирали $r = e^{a\varphi}$, находящейся внутри окружности $r = 1$ $(a > 0)$.

7.509. Найти длину дуги кардиоиды $r = 2(1 - \cos\varphi)$, находящейся внутри окружности $r = 1$.

7.510*. Найти длину всей кривой $r = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$ $(a > 0)$.

7.511. Найти длину дуги спирали Архимеда $r = 5\varphi$, находящейся внутри окружности $r = 10\pi$.

7.512. Найти длину всей кривой $r = a\sin^4\frac{\varphi}{4}$ $(a > 0)$.

Найти длины дуг пространственных кривых:

7.513. $x = at^2$, $y = a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)$, $z = a\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)$ от $t = 0$ до $t = \sqrt{3}$ $(a > 0)$.

7.514. $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t$ между плоскостями $z = 0$ и $z = a$ $(a > 0)$.

7.515. $x^2 = 4y,\ 9z^2 = 16xy$ между плоскостями $x = 0$ и $x = 4$.

7.516. $x = a\sqrt{t}\cos t,\ y = a\sqrt{t}\sin t,\ z = at$ от $t = 0$ до произвольного $t > 0$ $(a > 0)$.

7.517. $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4\cos\dfrac{t}{2}$ между двумя точками пересечения кривой с плоскостью Oxz.

3. Площадь поверхности вращения. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной функцией $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, вычисляется по формуле

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 - \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Если дуга задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то

$$Q_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Если дуга задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$Q_x = 2\pi \int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi.$$

Если дуга кривой вращается вокруг произвольной оси, то площадь поверхности вращения выражается интегралом

$$Q = 2\pi \int_A^B R\,dl,$$

где R — расстояние от точки на кривой до оси вращения, dl — дифференциал дуги, A и B — пределы интегрирования, соответствующие концам дуги. При этом R и dl должны быть выражены через переменную интегрирования.

Пример 9. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси Ox.

◁ Имеем:

$$y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2},$$

$$y' = \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = -\frac{(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}},$$

$$\sqrt{1 + \frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}}} = \frac{a^{1/3}}{|x|^{1/3}}.$$

Следовательно,

$$Q_x = 2 \cdot 2\pi \int\limits_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \cdot \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx =$$

$$= 4\pi a^{1/3} \int\limits_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} x^{-1/3}\,dx =$$

$$= -4\pi a^{1/3} \cdot \frac{3}{2}\,\frac{(a^{2/3} - x^{2/3})^{5/2}}{5/2}\bigg|_0^a = \frac{12}{5}\pi a^2. \ ▷$$

Пример 10. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси Ox.

◁ Имеем:

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a\sin t,$$

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

Отсюда

$$Q_x = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -16\pi a^2\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{\cos^3(t/2)}{3}\right)\bigg|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2. \ ▷$$

Пример 11. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = 2a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

◁ Имеем:

$$r' = -2a\sin\varphi,$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \sqrt{4a^2(1 + \cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi} = 4a\cos\frac{\varphi}{2},$$

и, далее,

$$Q_x = 2\pi \int_0^\pi 2a(1+\cos\varphi)\sin\varphi \cdot 4a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 64\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{128}{5}\pi a^2. \ \triangleright$$

7.518. Найти площадь поверхности (называемой *катеноидом*), образованной вращением дуги цепной линии $y = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, вокруг оси Ox.

7.519. Найти площадь поверхности эллипсоида, образованного вращением эллипса $4x^2 + y^2 = 4$ вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy.

7.520. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \frac{1}{3}x^3$ от $x = -1$ до $x = 1$.

7.521. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12)$ между точками ее пересечения с осью Ox.

7.522. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги полукубической параболы $9ay^2 = 4x^3$, отсекаемой прямой $x = a$.

7.523. Найти площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $9ay^2 = x(3a-x)^2$ вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy.

7.524. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $y = e^{-x/2}$, $0 \leqslant x < +\infty$, вокруг оси Ox.

7.525. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy.

7.526. Найти площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $x = a(t^2+1)$, $y = \frac{at}{3}(3-t^2)$ вокруг оси Ox.

7.527. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ вокруг ее оси симметрии.

7.528. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги эвольвенты окружности $x = a(t\sin t + \cos t)$, $y = a \times \times(\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, вокруг оси Ox.

7.529. Найти площадь поверхности, образованной вращением окружности $r = 2a\sin\varphi$ вокруг полярной оси.

7.530. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг касательной в ее вершине $(2a, 0)$.

7.531. Доказать, что площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ вокруг полярной оси, равна площади поверхности сферы радиуса a.

7.532. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $r = a\sec^2\dfrac{\varphi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, вокруг полярной оси.

4. Объем тела. Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$, то объем тела вычисляется по формуле

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,dx. \tag{6}$$

Пример 12. Найти объем тела, основание которого — круг радиуса a, а сечение плоскостью, перпендикулярной фиксированному диаметру круга, есть равнобедренный треугольник высоты h.

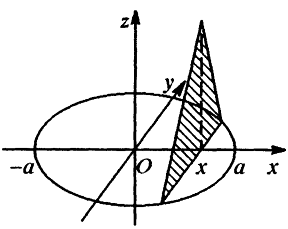


Рис. 22

◁ Выберем систему координат так, чтобы плоскость Oxy совпадала с плоскостью круга, начало координат — с его центром, а ось Ox содержала фиксированный диаметр (рис. 22). Получим уравнение окружности в виде

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, есть равнобедренный треугольник с основанием $2y = 2\sqrt{a^2 - x^2}$ и высотой h. Имеем:

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2 - x^2}\,h = h\sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leqslant x \leqslant a),$$

$$V = h\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2h\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$

$$= 2h\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^a = 2h\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi a^2 h. \ \triangleright$$

Выражение для функции $S(x)$ достаточно просто получается в случае тел вращения. Так, если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, вращается вокруг оси Ox или оси Oy, то объемы тел вращения вычисляются соответственно по формулам:

$$V_x = \pi \int_a^{\pi} f^2(x)\,dx, \tag{7}$$

$$V_y = 2\pi \int_a^{b} x|f(x)|\,dx, \quad a \geqslant 0. \tag{8}$$

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения равен

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi\,d\varphi.$$

Вычисление объемов тел значительно проще производится с помощью кратных интегралов. Поэтому мы ограничимся здесь только простейшими задачами.

Пример 13. Фигура, ограниченная кривыми $y = \sqrt{2px}$ и $y = \dfrac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

◁ Найдем точки пересечения кривых:

$$\sqrt{2px} = \frac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}, \quad \text{или}$$

$$2p^2x = 4(x-p)^3;$$

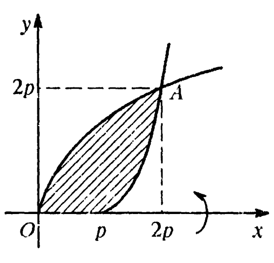


Рис. 23

очевидно, уравнению удовлетворяет значение $x = 2p$, и тогда $y = 2p$, т.е. имеем точку пересечения $(2p, 2p)$, — рис. 23. Искомый объем есть разность двух объемов: объема V_1, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой

$$y = \sqrt{2px} \quad (0 \leqslant x \leqslant 2p),$$

и объема V_2, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной полукубической параболой $y = \dfrac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}$ $(p \leqslant x \leqslant 2p)$.

Используя формулу (7), получаем:

$$V_x = V_1 - V_2 = \pi \int\limits_0^{2p} y_1^2\,dx - \pi \int\limits_p^{2p} y_2^2\,dx =$$

$$= \pi \cdot 2p \int\limits_0^{2p} x\,dx - \pi \cdot \frac{4}{p} \int\limits_p^{2p} (x-p)^3\,dx = 2\pi p \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{2p} - \frac{4\pi}{p}\frac{(x-p)^4}{4}\Bigg|_0^{2p} =$$

$$= 4\pi p^3 - \pi p^3 = 3\pi p^3. \ \triangleright$$

Пример 14. Фигура, ограниченная кривой $x = a\cos t$, $y = a\sin 2t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$ и осью Ox, вращается вокруг оси Oy. Найти объем тела вращения.

$\triangleleft$ Очевидно, что $0 \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant y \leqslant a$, а также, что $y = 0$ при $t = 0$ и при $t = \pi/2$, т.е. рассматриваемая фигура является криволинейной трапецией. Далее, при $t = 0$ $x = a$, при $t = \pi/2$ $x = 0$. Следовательно, искомый объем выражается формулой (8). Имеем:

$$V_y = 2\pi \int\limits_0^{a} x(t)y(t)\,dx = 2\pi \int\limits_{\pi/2}^{0} a\cos t \cdot a\sin 2t(-a\sin t)\,dt =$$

$$= \pi a^3 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt = \frac{\pi a^3}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= \frac{\pi a^3}{2}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2 a^3}{4}. \ \triangleright$$

Пример 15. Кардиоида $r = a(1-\cos\varphi)$ вращается вокруг полярной оси. Найти объем тела вращения.

$$\triangleleft\ V = \frac{2}{3}\pi \int\limits_0^{\pi} a^3(1-\cos\varphi)^3 \sin\varphi\,d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3 \frac{(1-\cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi a^3. \ \triangleright$$

7.533. Найти объем тела, основание которого — область плоскости Oxy, ограниченная астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, а сечение плоскостью, перпендикулярной оси Ox, есть квадрат.

7.534. Найти объем клина, отсеченного от прямого кругового цилиндра радиуса a плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к плоскости основания.

7.535. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$.

7.536. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$.

7.537. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x + \sin^2 x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

7.538. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$.

7.539. Найти объем тела, образованного вращением параболического сегмента с основанием $2a$ и высотой h вокруг высоты.

7.540. Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной кривой $x = at^2$, $y = a\ln t$ $(a > 0)$ и осями координат, вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy.

7.541. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $x = a\cos t$, $y = a\sin 2t$ и осью Ox $(0 \leqslant x \leqslant a)$.

7.542. Найти объем тела, образованного вращением астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг прямой $x = a$.

7.543. Найти объем тела, образованного вращением кривой $r = a\sin^2\varphi$ вокруг полярной оси.

7.544. Найти объем тела, образованного вращением лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

7.545*. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = \dfrac{\sin x}{x}$ и осью Ox.

§ 7. Приложения определенного интеграла к решению некоторых задач механики и физики

1. Моменты и центры масс плоских кривых. Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и имеет плотность [1] $\rho = \rho(x)$, то статические моменты этой дуги M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy соответственно равны

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx,$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x) x\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx,$$

[1]) Всюду в задачах, где плотность не указана, предполагается, что кривая однородна и $\rho = 1$.

моменты инерции I_x и I_y относительно тех же осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$I_x = \int\limits_a^b \rho(x) f^2(x) \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx, \qquad I_y = \int\limits_a^b \rho(x) x^2 \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx,$$

а координаты центра масс $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — по формулам

$$\overline{x} = \frac{M_y}{l} = \frac{1}{l} \int\limits_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx,$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{l} = \frac{1}{l} \int\limits_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx,$$

где l — масса дуги, т. е. $l = \int\limits_a^b \rho(x) \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx.$

Пример 1. Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей Ox и Oy дуги цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

◁ Имеем: $y' = \operatorname{sh} x$, $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x$. Следовательно,

$$M_x = \int\limits_0^1 \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (1 + \operatorname{ch} 2x)\, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (2 + \operatorname{sh} 2),$$

$$M_y = \int\limits_0^1 x \operatorname{ch} x\, dx = \int\limits_0^1 x\, d(\operatorname{sh} x) = x \operatorname{sh} x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \operatorname{sh} x\, dx =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} x \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1,$$

$$I_x = \int\limits_0^1 \operatorname{ch}^3 x\, dx = \int\limits_0^1 (1 + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch} x\, dx = \left(\operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} \right) \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 1,$$

$$I_y = \int\limits_0^1 x^2 \operatorname{ch} x\, dx = \int\limits_0^1 x^2\, d(\operatorname{sh} x) = x^2 \operatorname{sh} x \Big|_0^1 - 2 \int\limits_0^1 x \operatorname{sh} x\, dx =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - 2 \int\limits_0^1 x\, d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} 1 - 2 \left(x \operatorname{ch} x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \operatorname{ch} x\, dx \right) =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - 2 \operatorname{ch} 1 + 2 \operatorname{sh} 1 = 3 \operatorname{sh} 1 - 2 \operatorname{ch} 1. \ ▷$$

Пример 2. Найти координаты центра масс дуги окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, расположенной в первой четверти.

◁ Имеем: $l = \dfrac{\pi a}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = a\cos t$,

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = a.$$

Отсюда получаем:

$$M_x = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos t\, dt = a^2 \sin t\Big|_0^{\pi/2} = a^2,$$

$$M_y = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin t\, dt = -a^2 \cos t\Big|_0^{\pi/2} = a^2,$$

$$\overline{x} = \frac{M_y}{l} = \frac{a^2}{\pi a/2} = \frac{2a}{\pi}, \quad \overline{y} = \frac{a^2}{\pi a/2} = \frac{2a}{\pi}. \ ▷$$

В приложениях часто оказывается полезной следующая

Теорема Гульдена. *Площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости дуги и ее не пересекающей, равна произведению длины дуги на длину окружности, описываемой ее центром масс.*

Пример 3. Найти координаты центра масс полуокружности $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

◁ Вследствие симметрии $\overline{x} = 0$. При вращении полуокружности вокруг оси Ox получается сфера, площадь поверхности которой равна $4\pi a^2$, а длина полуокружности равна πa. По теореме Гульдена имеем

$$4\pi a^2 = \pi a \cdot 2\pi \overline{y}.$$

Отсюда $\overline{y} = \dfrac{2a}{\pi}$, т. е. центр масс C имеет координаты $C\left(0, \dfrac{2a}{\pi}\right)$. ▷

7.546. Найти статический момент синусоиды $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ относительно оси Ox.

7.547. Найти статический момент и момент инерции относительно оси Ox дуги кривой $y = e^x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

7.548. Найти статический момент и момент инерции относительно оси Ox одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

7.549. Найти статический момент и момент инерции полуокружности радиуса a относительно ее диаметра.

7.550. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy всей дуги окружности $r = 2a\cos\varphi$, лежащей выше полярной оси.

7.551. Найти центр масс дуги цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$.

7.552. Найти центр масс всей дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, расположенной выше оси Ox.

7.553. Найти декартовы координаты центра масс дуги кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

7.554. Пользуясь теоремой Гульдена, найти центр масс дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти.

2. Физические задачи. Некоторые применения определенного интеграла при решении физических задач иллюстрируются ниже в примерах 4–7.

Пример 4. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 2t + 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 с от начала движения.

◁ Так как путь, пройденный телом со скоростью $v(t)$ за отрезок времени $[t_1, t_2]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt,$$

то имеем:

$$S = \int_0^5 (2t + 3t^2)\,dt = (t^2 + t^3)\Big|_0^5 = 150\,\text{м}. \ ▷$$

Пример 5. Какую работу необходимо затратить для того, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h? Чему равна работа, если тело удаляется в бесконечность?

◁ Работа переменной силы $f(x)$, действующей вдоль оси Ox на отрезке $[a, b]$, выражается интегралом

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Согласно закону всемирного тяготения сила F, действующая на тело массы m, равна

$$F = k\frac{mM}{r^2},$$

где M — масса Земли, r — расстояние массы m от центра Земли, k — гравитационная постоянная. Так как на поверхности Земли, т. е. при $r = R$, имеем $F = mg$, то можем записать $mg = k\dfrac{mM}{R^2}$. Отсюда находим

$kM = gR^2$, а потому
$$F = mg\frac{R^2}{r^2}.$$

Следовательно, искомая работа равна
$$A = \int\limits_R^{R+h} F\,dr = \int\limits_R^{R+h} mgR^2\frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^{R+h} = mgR\frac{h}{R+h}.$$

Отсюда при $h \to +\infty$ имеем
$$\lim_{h\to+\infty} A = mgR. \ \triangleright$$

Пример 6. Вычислить кинетическую энергию однородного кругового конуса, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси, если заданы радиус основания конуса R, высота H и плотность γ.

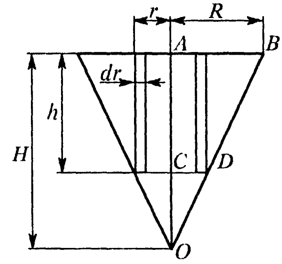


Рис. 24

$\triangleleft$ Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω, равна $\frac{1}{2}I\omega^2$, где I — момент инерции тела относительно оси вращения. За элементарную массу dm примем массу полого цилиндра высоты h с внутренним радиусом r и толщиной стенок dr (рис. 24). Тогда $dm = 2\pi r h\gamma\,dr$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$. Из подобия треугольников OCD и OAB имеем
$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}, \quad \text{т.е.} \quad h = H\left(1-\frac{r}{R}\right).$$

Следовательно,
$$dm = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right) r\,dr,$$

и элементарный момент инерции dI равен
$$dI = dm\cdot r^2 = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\,dr.$$

Таким образом, момент инерции всего конуса есть
$$I = \int\limits_0^R dI = \int\limits_0^R 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\,dr = 2\pi\gamma H\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{5}\right) = \frac{1}{10}\pi\gamma H R^4,$$

и кинетическая энергия конуса равна

$$K = \frac{1}{20}\pi\gamma H R^4\omega^2. \ \triangleright$$

Пример 7. С какой силой жидкость плотности γ давит на вертикальную треугольную пластину с основанием a и высотой h, погруженную в жидкость вершиной вниз так, что основание находится на ее поверхности?

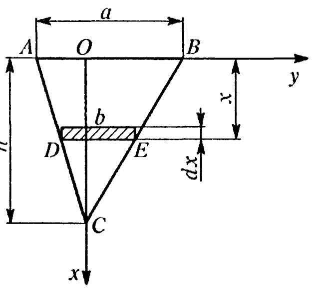


Рис. 25

$\triangleleft$ Согласно закону Паскаля сила P, с которой жидкость плотности γ давит на площадку S при глубине погружения H, равна

$$P = \gamma g H S.$$

Вводя систему координат, показанную на рис. 25, рассмотрим элементарную прямоугольную площадку, находящуюся на глубине x и имеющую основание b и высоту dx. Из подобия треугольников CAB и CDE имеем

$$\frac{b}{a} = \frac{h-x}{h}, \quad \text{т.е.} \quad b = \frac{a}{h}(h-x),$$

следовательно,

$$dS = b\,dx = \frac{a}{h}(h-x)\,dx, \quad dP = \gamma g x\,dS = \frac{\gamma g a x}{h}(h-x)\,dx.$$

Таким образом, сила давления жидкости на всю пластину равна

$$P = \int_0^h dP = \frac{\gamma g a}{h}\int_0^h x(h-x)\,dx = \frac{\gamma g a}{h}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{\gamma g a h^2}{6}. \ \triangleright$$

7.555. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха равна $v = v_0 - gt$, где t — протекшее время, g — ускорение свободного падения. На какую максимальную высоту поднимается тело?

7.556. Точка оси Ox совершает гармонические колебания около начала координат со скоростью $v = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$, где t — время, v_0, ω, φ — постоянные. Найти закон колебания точки и среднее значение абсолютной величины скорости за период колебаний.

7.557. Два тела движутся по одной и той же прямой: первое со скоростью $v_1 = 3t^2 - 4t$ (м/с), второе со скоростью $v_2 = 4(t+3)$ (м/с). Если в начальный момент они были вместе, то в какой момент и на каком расстоянии от начала движения они опять будут вместе?

7.558. Скорость движения точки $v = 0{,}1te^{-0{,}02t}$ (м/с). Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки $(v(t_2) = 0)$.

7.559*. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 5 см, если сила в 1 Н растягивает ее на 1 см?

7.560. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания R и высотой H. Плотность песка γ.

7.561. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать жидкость плотности γ из котла, имеющего форму параболоида вращения, обращенного вершиной вверх. Радиус основания R, высота H.

7.562. Вычислить работу, которую надо затратить при постройке пирамиды с квадратным основанием, если высота пирамиды H, сторона основания a, плотность материала γ.

7.563. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать жидкость плотности γ из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вверх. Радиус основания R, высота H.

7.564. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать жидкость плотности γ из цистерны, ограниченной поверхностями: $y^2 = 2pz$, $x = \pm a$, $z = p$ $(p > 0)$.

7.565*. Электрический заряд e_0, сосредоточенный в начале координат, отталкивает заряд e из точки $(a, 0)$ в точку $(b, 0)$. Определить работу A силы отталкивания F. Чему равна работа при удалении заряда e в бесконечность?

7.566*. Цилиндр с подвижным поршнем заполнен паром объема $V_0 = 0{,}2\,\text{м}^3$ с упругостью $p_0 = 10\,330\,\text{Н/м}^2$. Какую работу надо затратить, чтобы при постоянной температуре (изотермический процесс) объем пара уменьшить в 2 раза?

7.567*. Определить работу, произведенную при адиабатическом сжатии воздуха, имеющего начальные объем $V_0 = 8\,\text{м}^3$ и давление $p_0 = 10\,000\,\text{Н/м}^2$ до объема $V_1 = 2\,\text{м}^3$.

7.568. Найти кинетическую энергию однородного шара радиуса R и плотности γ, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра.

7.569. Найти кинетическую энергию пластинки, имеющей форму параболического сегмента и вращающейся вокруг оси параболы с постоянной угловой скоростью ω. Основание сегмента a, высота h, толщина пластинки d, плотность материала γ.

7.570. Найти кинетическую энергию треугольной пластинки, вращающейся вокруг основания с угловой скоростью ω. Основание пластинки a, высота h, толщина l, плотность γ.

7.571. Найти кинетическую энергию однородного кругового цилиндра плотности γ с радиусом основания R и высотой H, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси.

7.572. С какой силой жидкость плотности γ давит на вертикальную треугольную пластинку с основанием a и высотой h, погруженную в нее так, что вершина находится на поверхности, а основание параллельно поверхности?

7.573. Конец трубы, погруженной в жидкость плотности γ, закрыт круглой заслонкой. Определить силу давления на заслонку, если ее радиус R, а центр находится на глубине H.

7.574. Найти силу, с которой жидкость плотности γ давит на вертикальную стенку, имеющую форму полуэллипса, большая ось которого находится на поверхности жидкости. Большая полуось эллипса a, малая b.

7.575. Найти силу давления жидкости плотности γ, заполняющей круговой цилиндр, на боковые стенки цилиндра, если радиус основания R, высота H.

7.576. Найти массу стержня длины $l = 5$ м, если линейная плотность стержня меняется по закону $\gamma = 1 + 0{,}1x^3$ (кг/м), где x — расстояние от одного из концов стержня.

7.577*. Найти количество тепла, выделяемое переменным током $I = I_0 \cos \omega t$ в течение периода $2\pi/\omega$ в проводнике с сопротивлением R.

7.578*. За какое время вода, наполняющая цилиндрический сосуд с площадью основания $S = 100\,\text{см}^2$ и высотой $H = 20$ см, вытечет через отверстие на дне площадью $S_0 = 1\,\text{см}^2$?

7.579.** При установившемся ламинарном (струйном) течении жидкости через трубу круглого сечения радиуса a скорость течения v в точке, находящейся на расстоянии r от оси трубы, дается формулой $v = \dfrac{p}{4\mu l}(a^2 - r^2)$, p — разность давлений жидкости на концах трубы, μ — вязкость жидкости, l — длина трубы. Определить расход жидкости Q, т. е. объем жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени.

7.580*. С какой силой полукольцо радиуса R и массы M притягивает материальную точку m, находящуюся в его центре?

7.581. За какое время вода вытечет из конической воронки, имеющей высоту $H = 50$ см, радиус верхнего основания $R = 5$ см, радиус нижнего основания $r = 0{,}2$ см?

7.582. Определить расход жидкости через водослив прямоугольного сечения. Высота водослива h, ширина a, вязкость жидкости μ.

Глава 8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Основные понятия

1. Понятия функции нескольких переменных. Всякий упорядоченный набор из n действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ обозначается $(x_1, \ldots, x_n)$ или $P(x_1, \ldots, x_n)$ и называется точкой n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, числа $x_1, \ldots, x_n$ называются координатами точки $P = P(x_1, \ldots, x_n)$. Расстояние между точками $P(x_1, \ldots, x_n)$ и $P'(x'_1, \ldots, x'_n)$ определяется формулой

$$\rho(P, P') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2}.$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество точек n-мерного арифметического пространства. Если каждой точке $P(x_1, \ldots, x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$, то говорят, что на множестве D задана *числовая функция* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Множество D называется областью определения, а множество $E = \{u \in \mathbb{R} \,|\, u = f(P),\ P \in D\}$ — областью значений функции $u = f(P)$.

В частном случае $n = 2$ функция двух переменных $z = f(x, y)$ может рассматриваться как функция точек плоскости в трехмерном геометрическом пространстве с фиксированной системой координат $Oxyz$. Графиком этой функции называется множество точек

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x, y)\},$$

представляющее собой, вообще говоря, некоторую поверхность в $\mathbb{R}^3$.

Пример 1. Найти область определения функции

$$z = \arcsin \frac{y}{x}.$$

◁ Функция определена при

$$-1 \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 1, \quad x \neq 0.$$

Следовательно, $-x \leqslant y \leqslant x$ при $x > 0$ и $x \leqslant y \leqslant -x$ при $x < 0$. Область определения функции изображена на рис. 26 (содержит границы, за исключением начала координат). $\triangleright$

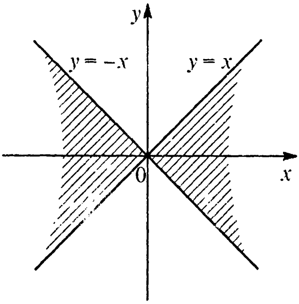


Рис. 26

Пример 2. Пусть $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$. Найти $f(3, -2)$, $f(y, x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$.

$\triangleleft$ Имеем:

$$f(3, -2) = \frac{3^2 - (-2)^2}{3 \cdot (-2)} = -\frac{5}{6},$$

$$f(y, x) = \frac{y^2 - x^2}{xy},$$

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{(1/x)^2 - (1/y)^2}{(1/x)(1/y)} = \frac{y^2 - x^2}{xy} = -f(x, y). \ \triangleright$$

8.1. Выразить площадь S треугольника как функцию длин двух его сторон x и y, если его периметр равен $2p$. Найти область определения этой функции.

8.2. Выразить объем V кругового конуса как функцию площади S его боковой поверхности и длины l образующей. Найти область определения этой функции.

8.3. Выразить площадь S равнобочной трапеции как функцию длин ее сторон, если x и y — длины оснований, z — длина боковой стороны. Найти область определения этой функции.

Найти области определения функций двух переменных ($R = \mathrm{const}$):

8.4. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. **8.5.** $z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.

8.6. $z = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$. **8.7.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}$.

8.8. $z = \dfrac{2x + 3y - 1}{x - y}$. **8.9.** $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$.

8.10. $z = \ln(-x - y)$. **8.11.** $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$.

8.12. $z = y\sqrt{\cos x}$. **8.13.** $z = \sqrt{\log_a (x^2 + y^2)}$.

8.14. $z = \arccos \dfrac{x}{x + y}$.

8.15. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.

8.16. $z = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$.

8.17. $f(r, \varphi) = r\sqrt{\sin\varphi}$. **8.18.** $f(r, \varphi) = r\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Найти области определения функций трех переменных:

8.19. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}$ $(R = \text{const})$.

8.20. $u = \arcsin \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$.

8.21. $u = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2)$.

Найти области определения функций n переменных:

8.22. $u = \sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} + \ldots + \sqrt{1 - x_n^2}$.

8.23. $u = \sqrt{1 - \dfrac{x_1^2}{a_1^2} - \dfrac{x_2^2}{a_2^2} - \ldots - \dfrac{x_n^2}{a_n^2}}$.

8.24. Дана функция $f(x, y) = \dfrac{2x - 3y}{3x - 2y}$. Найти $f(2, 1)$, $f(1, 2)$, $f(3, 2)$, $f(a, a)$, $f(a, -a)$.

8.25. Дана функция $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$. Найти $f(-3, 4)$ и $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.

8.26. Найти $f(x)$, если $f\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ $(x > 0)$.

8.27. Пусть $z = x + y + f(x - y)$. Найти функции f и z, если $z = x^2$ при $y = 0$.

8.28.** Найти $f(x, y)$, если $f\left(x + y, \dfrac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$.

8.29. Даны функции: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$. Найти: а) $f(\varphi(x, y), y^2)$; б) $\varphi\big(f(x, y), \varphi(x, y)\big)$.

8.30. Даны функции: $\varphi(x, y) = e^x \cos y$, $\psi(x, y) = e^x \sin y$. Доказать:

а) $\varphi^2(x, y) - \psi^2(x, y) = \varphi(2x, 2y)$;

б) $2\varphi(x, y)\psi(x, y) = \psi(2x, 2y)$.

8.31. Даны функции: $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = \sin x$. Найти: а) $f\big(\varphi(x), \psi(x)\big)$; б) $\varphi\big(f(x, y)\big)$.

2. Предел и непрерывность функции. Число A называется *пределом* функции $u = f(P)$ при стремлении точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к точке $P_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия

$$0 < \rho(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

следует

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon.$$

При этом пишут:

$$A = \lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \ldots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 3. Выяснить, имеет ли функция $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ предел при $x \to 0$, $y \to 0$?

◁ Пусть точка $P(x, y)$ стремится к точке $P_0(0, 0)$. Рассмотрим изменение x и y вдоль прямой $y = kx$. Получаем

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Результат имеет различные значения в зависимости от выбранного k, и поэтому функция предела не имеет. ▷

Функция $u = f(P)$ называется *непрерывной в точке* P_0, если выполнены следующие три условия:

1) функция $f(P)$ определена в точке P_0;
2) существует $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$;
3) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Функция называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области. Если в точке P_0 хотя бы одно из условий 1)–3) нарушено, то P_0 называется точкой разрыва функции $f(P)$. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и т. д.

Пример 4. Найти точки разрыва функции

$$u = \frac{1 - xyz}{2x + 3y - z + 4}.$$

◁ Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Поэтому она имеет поверхность разрыва — плоскость $2x + 3y - z + 4 = 0$. ▷

Найти пределы:

8.32. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{3 - \sqrt{xy + 9}}$. **8.33.** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy}$.

8.34. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$. **8.35.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{1/(x^2+y^2)}$.

8.36. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

8.37. Показать, что при $x\to 0$ и $y\to 0$ функция $z=\dfrac{x}{y-x}$ может стремиться к любому пределу. Привести примеры такого приближения точки $(x,\,y)$ к точке $(0,\,0)$, при котором $\lim z=3$, $\lim z=2$, $\lim z=1$, $\lim z=-2$.

8.38. Показать, что для функции $f(x,\,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ не существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\,y)$, вычислив повторные пределы

$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to 0} f(x,\,y)\Bigr),\quad \lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x,\,y)\Bigr).$$

8.39. Показать, что для функции $f(x,\,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ существуют и равны между собой повторные пределы

$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to 0} f(x,\,y)\Bigr)=\lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x,\,y)\Bigr)=0,$$

тем не менее $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\,y)$ не существует.

8.40. Выяснить, имеет ли функция $\sin\ln(x^4+y^2)$ предел при $x\to 0$, $y\to 0$?

8.41. Выяснить, имеет ли функция $\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$ предел при $x\to\infty$, $y\to\infty$?

8.42*. Показать, что функция

$$f(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{если}\quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad x=y=0\end{cases}$$

в точке $(0,\,0)$ непрерывна вдоль каждого луча $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$ $(0\leqslant t<+\infty)$, проходящего через эту точку, т. е. $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\,t\sin\alpha)=f(0,\,0)$, однако эта функция не является непрерывной в точке $(0,\,0)$.

8.43. Показать, что в точке (0, 0) следующие функции непрерывны по каждой из переменных x и y, но разрывны по совокупности переменных:

а) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{если} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0; \end{cases}$

б) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{если} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0. \end{cases}$

Найти точки разрыва функций двух переменных:

8.44. $z = \dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$. **8.45.** $z = \dfrac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$.

8.46. $z = \dfrac{1}{\sin x \sin y}$. **8.47.** $z = \ln(1-x^2-y^2)$.

8.48. $z = \dfrac{x^2+y^2}{(x+y)(y^2-x)}$.

8.49. $z = \dfrac{1}{(x^2+y^2-1)(x^2-y^2-1)}$.

Найти точки разрыва функций трех переменных:

8.50. $u = \dfrac{1}{xyz}$. **8.51.** $u = \dfrac{1}{(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2)-1}$.

8.52. $u = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$. **8.53.** $u = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$.

8.54. $u = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2+1}$.

3. Частные производные. Пусть $(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ — произвольная фиксированная точка из области определения функции $u = f(x_1, \ldots, x_n)$. Придавая значению переменной x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ приращение Δx_k, рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k+\Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}.$$

Этот предел называется *частной производной* (*1-го порядка*) данной функции по переменной x_k в точке $(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ или $f'_{x_k}(x_1, \ldots, x_n)$.

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования (при этом все переменные, кроме x_k, рассматриваются как постоянные).

Пример 5. Найти частные производные функции

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

◁ Считая y постоянной, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Считая x постоянной, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}. \ \triangleright$$

Функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *однородной* функцией степени m, если для любого действительного числа $t \neq 0$ справедливо равенство

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Если однородная степени m функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет частные производные по каждой из переменных, то выполняется соотношение (теорема Эйлера)

$$x_1 f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + x_2 f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots$$
$$\ldots + x_n f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = mf(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 6. Проверить теорему Эйлера, если

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

◁ Имеем

$$f(tx, ty) = A(tx)^2 + 2B(tx)(ty) + C(ty)^2 = t^2 f(x, y).$$

Следовательно, $m = 2$;

$$f'_x(x, y) = 2(Ax + By), \quad f'_y(x, y) = 2(Bx + Cy),$$
$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = 2x(Ax + By) + 2y(Bx + Cy) = 2f(x, y). \ \triangleright$$

Частными производными 2-го порядка функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f''_{x_k x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k\, \partial x_l} = f''_{x_k x_l}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_n)$$

и т. д.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядка выше второго.

Результат многократного дифференцирования функции по различным переменным не зависит от очередности дифференцирования при условии, что возникающие при этом «смешанные» частные производные непрерывны.

Пример 7. Найти частные производные 2-го порядка функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

◁ Имеем (см. пример 5)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Дифференцируем вторично:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{1\cdot(x^2+y^2) - 2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - 2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\left(\text{мы здесь убедились в том, что } \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}\right)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \ \triangleright$$

Найти частные производные 1-го и 2-го порядков от заданных функций:

8.55. $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$. **8.56.** $z = xy + \dfrac{y}{x}$.

8.57. $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **8.58.** $z = xe^{-xy}$.

8.59. $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$. **8.60.** $z = y^x$.

8.61. $z = \ln(x^2 + y^2)$. **8.62.** $z = \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8.63. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **8.64.** $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$.

8.65. $u = xy^2z^3t^4 + 3x - 4y + 2z - t + 1$.

8.66. Найти $f'_x(3, 2)$, $f'_y(3, 2)$, $f''_{xx}(3, 2)$, $f''_{xy}(3, 2)$, $f''_{yy}(3, 2)$, если $f(x, y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$.

8.67. Найти $f'_x(1, 2)$, $f'_y(1, 2)$, $f''_{xx}(1, 2)$, $f''_{xy}(1, 2)$, $f''_{yy}(1, 2)$, если $f(x, y) = \displaystyle\int\limits_x^{x^2+y^2} e^t\,dt$.

8.68. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, если $z = x\sin(ax + by)$.

8.69. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, если $z = \cos\dfrac{y}{x}\arccos\dfrac{y}{x}$.

8.70. Найти $f'''_{xxx}(0, 1)$, $f'''_{xxy}(0, 1)$, $f'''_{xyy}(0, 1)$, $f'''_{yyy}(0, 1)$, если $f(x, y) = e^{x^2y}$.

8.71. Найти $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial\xi\,\partial\eta}$, если $u = \ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$.

8.72. Найти $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3}$, если $u = x^3\sin y + y^3\sin x$.

8.73. Найти $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p\,\partial y^q}$, если $u = (x - x_0)^p(y - y_0)^q$.

В задачах 8.74–8.77 проверить теорему Эйлера об однородных функциях.

8.74. $z = x^3 + x^2y - y^3$. **8.75.** $z = \dfrac{y}{x^3 - y^3}$.

8.76. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. **8.77.** $u = \dfrac{x+y+z}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$.

8.78. Вычислить

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

если $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$.

8.79. Показать, что $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial z}{\partial y} + x + z = 0$, если $z = 4e^{-2y} + (2x + 4y - 3)e^{-y} - x - 1$.

8.80. Показать, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{3}{x+y+z}$, если $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

8.81. Показать, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, если $u = \dfrac{x-y}{z-t} + \dfrac{t-x}{y-z}$.

8.82. Показать, что функция $u = A\sin\lambda x\cos a\lambda t$ удовлетворяет *уравнению колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

8.83. Показать, что функция $u = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$ удовлетворяет *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

8.84. Показать, что функция $u = \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$ удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

8.85*. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0, \end{cases}$$

имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке $(0, 0)$, хотя и разрывна в этой точке.

8.86*. Показать, что для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0, \end{cases}$$

значение второй смешанной производной в точке $(0, 0)$ зависит от порядка дифференцирования, а именно: $f''_{xy}(0, 0) = -1$, $f''_{yx}(0, 0) = 1$.

4. Дифференциал функции и его применение. *Полным приращением* функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, называется разность

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Функция $u = f(P)$ называется *дифференцируемой* в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если всюду в некоторой окрестности этой точки полное приращение функции может быть представлено в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — числа, не зависящие от $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Дифференциалом 1-*го порядка* du функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется главная часть полного приращения этой функции в рассматриваемой точке, линейная относительно Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, т. е.

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n.$$

Дифференциалы независимых переменных по определению принимаются равными их приращениям:

$$dx_1 = \Delta x_1, \quad dx_2 = \Delta x_2, \ \ldots, \ dx_n = \Delta x_n.$$

Для дифференциала функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ справедлива формула

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n. \tag{1}$$

Функции u, v нескольких переменных подчиняются обычным правилам дифференцирования:

$$\begin{aligned} d(u+v) &= du + dv, \\ d(uv) &= v\,du + u\,dv, \\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \end{aligned}$$

Пример 8. Найти полное приращение и дифференциал функции $f(x, y) = x^2 y$ в точке (x, y).

$\lhd$ $$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y),$$

$$\Delta f(x, y) = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y =$$
$$= 2xy\Delta x + x^2 \Delta y + 2x \Delta x \Delta y + y \Delta x^2 + \Delta x^2 \Delta y,$$
$$df(x, y) = 2xy\Delta x + x^2 \Delta y. \ \rhd$$

Пример 9. Найти дифференциал функции

$$f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

◁ 1-й способ. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{yz}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

По формуле (1) получаем

$$df(x, y, z) = -\frac{xz}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\, dx - \frac{yz}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\, dy + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dz =$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)^2\, dz - z(x\, dx + y\, dy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

2-й способ. Применяя правила дифференцирования, имеем:

$$df(x, y, z) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\, dz - z \cdot d\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\, dz - z(x\, dx + y\, dy)/(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)\, dz - z(x\, dx + y\, dy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad ▷$$

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$ для дифференцируемой функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеют место приближенные равенства

$$\Delta u \approx du,$$

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) \approx$$

$$\approx f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + df(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 10. Вычислить приближенно

$$\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2}.$$

◁ Искомое число будем рассматривать как значение функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, если $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = 0{,}07$. Имеем:

$$f(4, 3) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$\Delta f(x, y) \approx df(x, y) = \frac{x\, dx + y\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\Delta f(4, 3) \approx \frac{4 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}07}{5} \approx 0{,}08.$$

Следовательно,

$$\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2} \approx 5 + 0{,}08 = 5{,}08. \ \triangleright$$

Дифференциалом 2-го порядка d^2u функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется дифференциал от ее дифференциала 1-го порядка, рассматриваемого как функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при фиксированных значениях $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$:

$$d^2u = d(du).$$

Аналогично определяется дифференциал 3-го порядка:

$$d^3u = d(d^2u).$$

Вообще,

$$d^mu = d(d^{m-1}u).$$

Дифференциал m-го порядка функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ где x_1, $x_2, \ldots, x_n$ — независимые переменные, выражается символической формулой

$$d^mu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\right)^m u, \qquad (2)$$

которая формально раскрывается по биномиальному закону.

Например, в случае функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y для дифференциалов 2-го и 3-го порядков справедливы формулы

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2, \qquad (3)$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3. \qquad (4)$$

Пример 11. Найти d^2z, если $z = e^{xy}$.

$\triangleleft$ Имеем (по правилам дифференцирования)

$$dz = e^{xy}\,d(xy) = e^{xy}(y\,dx + x\,dy).$$

Дифференцируем вторично, учитывая, что dx и dy не зависят от x и y (т. е. считая dx и dy постоянными):

$$d^2z = e^{xy}\,d(xy)\cdot(y\,dx + x\,dy) + e^{xy}\,d(y\,dx + x\,dy) =$$
$$= e^{xy}(y\,dx + x\,dy)^2 + e^{xy}2\,dx\,dy = e^{xy}\big((y\,dx + x\,dy)^2 + 2\,dx\,dy\big). \ \triangleright$$

8.87. Найти полное приращение и дифференциал функции $z = x^2 - xy + y^2$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y — от 1 до 1,2.

8.88. Найти полное приращение и дифференциал функции $z = \lg(x^2 + y^2)$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y — от 1 до 0,9.

Найти дифференциалы функций:

8.89. $z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. **8.90.** $z = \operatorname{tg}\dfrac{y^2}{x}$.

8.91. $z = \ln\cos\dfrac{x}{y}$. **8.92.** $u = (xy)^z$.

8.93. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{x_2 - x_3} \cdot \ln x_4$.

8.94. Найти $df(1, 2, 1)$, если $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$.

Вычислить приближенно:

8.95. $(2{,}01)^{3{,}03}$. **8.96.** $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$.

8.97. $\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ$.

8.98. Цилиндрический стакан имеет внутренние размеры: радиус основания $R = 2{,}5$ м, высоту $H = 4$ м и толщину стенок $l = 1$ дм. Найти приближенно объем материала, затраченного на изготовление стакана.

8.99. Прямоугольный параллелепипед имеет измерения: $a = 2$ м, $b = 3$ м, $c = 6$ м. Найти приближенно величину изменения длины диагонали параллелепипеда, если a увеличится на 2 см, b — на 1 см, а c уменьшится на 3 см.

8.100. В усеченном конусе радиусы оснований $R = 20$ см, $r = 10$ см, высота $h = 30$ см. Как приближенно изменится объем конуса, если R увеличить на 2 мм, r — на 3 мм и h уменьшить на 1 мм?

Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков следующих функций (x, y, z — независимые переменные):

8.101. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$. **8.102.** $z = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$.

8.103. $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$. **8.104.** $z = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

8.105. $z = (x + y)e^{xy}$. **8.106.** $z = x\ln\dfrac{y}{x}$.

8.107. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x + y}$. **8.108.** $u = xy + yz + zx$.

8.109. $u = e^{xyz}$.

8.110. Найти d^3z, если $z = e^y \sin x$.

8.111. Найти d^3u, если $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

8.112. Найти d^6u, если $u = \ln(x + y + z)$.

8.113. Найти $d^m u$, если $u = e^{ax+by+cz}$.

§ 2. Дифференцирование сложных и неявных функций

1. Сложные функции одной и нескольких независимых переменных. Если $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — дифференцируемая функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые сами являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t),$$

то производная сложной функции $u = f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)$ вычисляется по формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}. \tag{1}$$

В частности, если t совпадает, например, с переменной x_i, то «полная» производная функции u по x_1 равна

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1}. \tag{2}$$

Пример 1. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = xyz$, где $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$.

◁ По формуле (1) имеем

$$\frac{du}{dt} = yz \cdot 2t + xz\frac{1}{t} + xy \cdot \sec^2 t =$$
$$= 2t \ln t \operatorname{tg} t + \frac{(t^2 + 1)\operatorname{tg} t}{t} + (t^2 + 1)\ln t \sec^2 t. \ ▷$$

Пример 2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = y^x$, где $y = \varphi(x)$.

◁ Имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$. По формуле (2) получим

$$\frac{dz}{dx} = y^x \ln y + xy^{x-1} \cdot \varphi'(x). \ ▷$$

Пусть $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, ..., $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ ($t_1, t_2, \ldots, t_m$ — независимые переменные). Частные производные функции u по $t_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_m$ выражаются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1},\\
\frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial u}{\partial t_m} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}.
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

При этом выражение (1) из § 1 для дифференциала 1-го порядка сохраняет свой вид (*свойство инвариантности формы первого дифференциала*)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n.$$

Выражения для дифференциалов высших порядков сложной функции, вообще говоря, отличаются от выражения вида (2) из § 1.

Например, дифференциал 2-го порядка выражается формулой

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 u + \\ + \frac{\partial u}{\partial x_1}d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}d^2x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}d^2x_n. \qquad (4)$$

Пример 3. Найти dz и d^2z, если $z = f(u, v)$, где $u = (x^2 - y^2)/2$, $v = xy$.

◁ Имеем $dz = f'_u\,du + f'_v\,dv$, где $du = x\,dx - y\,dy$, $dv = y\,dx + x\,dy$. Следовательно,

$$dz = f'_u(x\,dx - y\,dy) + f'_v(y\,dx + x\,dy) = (xf'_u + yf'_v)\,dx + (xf'_v - yf'_u)\,dy.$$

Дифференцируем вторично:

$$d^2z = d(f'_u)\cdot du + f'_u\cdot d(du) + d(f'_v)\cdot dv + f'_v\cdot d(dv) = \\ = (f''_{uu}\,du + f''_{uv}\,dv)\,du + f'_u\cdot d^2u + (f''_{uv}\,du + f''_{vv}\,dv)\,dv + f'_v\cdot d^2v,$$

где $d^2u = dx^2 - dy^2$, $d^2v = 2\,dx\,dy$. Следовательно,

$$d^2z = \big(f''_{uu}(x\,dx - y\,dy) + f''_{uv}(y\,dx + x\,dy)\big)(x\,dx - y\,dy) + f'_u(dx^2 - dy^2) + $$
$$+ \big(f''_{uv}(x\,dx - y\,dy) + f''_{vv}(y\,dx + x\,dy)\big)(y\,dx + x\,dy) + f'_v \cdot 2\,dx\,dy =$$
$$= f''_{uu}(x\,dx - y\,dy)^2 + f''_{uv}(y\,dx + x\,dy)(x\,dx - y\,dy) + f'_u(dx^2 - dy^2) +$$
$$+ f''_{uv}(x\,dx - y\,dy)(y\,dx + x\,dy) + f''_{vv}(y\,dx + x\,dy)^2 + 2f'_v\,dx\,dy =$$
$$= f''_{uu}(x^2\,dx^2 - 2xy\,dx\,dy + y^2dy^2) + 2f''_{uv}(xy(dx^2 - dy^2) +$$
$$+ (x^2 - y^2)\,dx\,dy) + f''_{vv}(y^2\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + x^2\,dy^2) + f'_u(dx^2 - dy^2) +$$
$$+ 2f'_v\,dx\,dy = (x^2 f''_{uu} + 2xyf''_{uv} + y^2 f''_{vv} + f'_u)\,dx^2 + 2(xyf''_{vv} + (x^2 - y^2)f''_{uv} -$$
$$- xyf''_{uu} + f'_v)\,dx\,dy + (y^2 f''_{uu} - 2xyf''_{uv} + x^2 f''_{vv} - f'_u)\,dy^2. \ \triangleright$$

8.114. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = e^{2x-3y}$, где $x = \operatorname{tg} t$, $y = t^2 - t$.

8.115. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^y$, где $x = \ln t$, $y = \sin t$.

8.116. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, где $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

8.117. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = \dfrac{yz}{x}$, где $x = e^t$, $y = \ln t$, $z = t^2 - 1$.

8.118. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \ln(e^x + e^y)$, где $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x$.

8.119. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{y}$, где $y = e^{(x+1)^2}$.

8.120. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u^2 \ln v$, где $u = \dfrac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$.

8.121. Найти dz, если $z = u^2v - v^2u$, где $u = x\sin y$, $v = y\cos x$.

8.122. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, где $u = \dfrac{2y}{x+y}$, $v = x^2 - 3y$.

8.123. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, где $u = \ln(x^2 - y^2)$, $y = xy^2$.

8.124. Найти dz, если $z = f(u, v)$, где $u = \cos(xy)$, $v = x^5 - 7y$.

8.125. Найти dz, если $z = f(u, v)$, где $u = \sin\dfrac{x}{y}$, $v = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

8.126. Найти du, если $u = f(x, y, z)$, где $x = s^2 + t^2$, $y = s^2 - t^2$, $z = 2st$.

8.127. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, если $u = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $x_3 = g(x_1, x_2)$, $x_4 = h(x_1, x_2, x_3)$.

8.128. Показать, что функция $z = y \cdot \varphi\bigl(\cos(x - y)\bigr)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y}$.

8.129. Показать, что функция $z = xf\left(\dfrac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ удовлетворяет уравнению $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

8.130. Показать, что функция $z = \dfrac{y}{f(x^2 - y^2)}$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

8.131. Показать, что функция $u = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{6}x^3(y + z) + \dfrac{1}{2}x^2yz + f(y - x, z - x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz.$$

8.132. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = f(u, v)$, где $u = xy$, $v = x/y$.

8.133. Найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, если $u = f(x, y, z)$, где $z = \varphi(x, y)$.

8.134. Найти все частные производные 2-го порядка от функции $u = f(x, xy, xyz)$.

8.135. Показать, что функция $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

8.136. Показать, что функция $u = \varphi(xy) + \psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ удовлетворяет уравнению $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

8.137. Найти d^2u, если $u = f(t)$, где $t = x^2 + y^2 + z^2$.

8.138. Найти d^2u, если $u = f(ax, by, cz)$.

8.139. Найти d^2z, если $z = f(u, v)$, где $u = x\sin y$, $v = y\cos x$.

2. Неявные функции одной и нескольких независимых переменных. Пусть уравнение $f(x, y) = 0$, где f — дифференцируемая функция переменных x и y, определяет y как функцию x. Первая производная этой неявной функции $y = y(x)$ в точке x_0 выражается по формуле

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} \tag{5}$$

при условии, что $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, где $y_0 = y(x_0)$, $f(x_0, y_0) = 0$.

Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием формулы (5).

Пример 4. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если

$$1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0.$$

◁ Обозначим левую часть данного уравнения через $f(x, y)$. Тогда

$$f'_x(x, y) = y - \frac{ye^{xy} - ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}},$$

$$f'_y(x, y) = x - \frac{xe^{xy} - xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}.$$

По формуле (5) получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\frac{y}{x}.$$

Дифференцируем вторично, учитывая, что y есть функция x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{x(dy/dx) - y}{x^2} = \frac{y - x(-y/x)}{x^2} = \frac{2y}{x^2}. \ ▷$$

Пусть уравнение $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$, где F — дифференцируемая функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$, определяет u как функцию независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Частные производные этой неявной функции $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $M^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ вычисляются по формулам

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M=M^0} = -\frac{F'_{x_k}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0)}{F'_u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

при условии, что $F'_u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0) \neq 0$, где $u^0 = u(M^0)$ и $F(M^0, u^0) = 0$.

Можно также найти частные производные функции u следующим образом. Вычисляем полный дифференциал функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$, приравниваем его нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\,dx_n + \frac{\partial F}{\partial u}\,du = 0$$

и выражаем отсюда du.

Пример 5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

$\lhd$ 1-й способ. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x, y, z)$. Тогда

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yx,$$
$$F'_y(x, y, z) = 6y^2 - 3xz - 2,$$
$$F'_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy.$$

По формулам (6) получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3z^2 - 3xy} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}.$$

2-й способ. Дифференцируем данное уравнение:

$$3x^2\,dx + 6y^2\,dy + 3z^2\,dz - 3yz\,dx - 3xz\,dy - 3xy\,dz - 2\,dy = 0.$$

Отсюда выражаем dz:

$$dz = \frac{3(x^2 - yz)\,dx + (6y^2 - 3xz - 2)\,dy}{3(xy - z^2)}.$$

Сравнивая с формулой $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy$, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}. \ \rhd$$

8.140. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$.

8.141. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $y\sin x - \cos(x - y) = 0$.

8.142. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x + y = e^{x-y}$.

8.143. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

8.144. Найти $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\ y=1}}$, $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=1\\ y=1}}$, $\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{\substack{x=1\\ y=1}}$, если $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

8.145. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $(1, -2, 2)$, если $z^3 - 4xy + y^2 - 4 = 0$.

8.146. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z \ln(x+z) - \dfrac{xy}{z} = 0$.

8.147. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2) = 0$.

8.148. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $f(yz,\ e^{xz}) = 0$.

8.149. Найти dz, если $yz = \operatorname{arctg}(xz)$.

8.150. Найти dz, если $xz - e^{z/y} + x^3 + y^3 = 0$.

8.151. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, если $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

8.152. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $x + y + z = e^z$.

8.153. Найти d^2z, если $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

8.154. Показать, что функция z, определяемая уравнением $\varphi(cx - az,\ cy - bz) = 0$, где φ — произвольная дифференцируемая функция двух переменных, удовлетворяет уравнению

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

8.155. Показать, что функция z, определяемая уравнением $(x - a\cos\alpha)^2 + (y - a\sin\alpha)^2 = \left(\dfrac{z-a}{m}\right)^2$, где a, α, m — постоянные, удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = m^2.$$

8.156. Показать, что функция z, определяемая уравнением $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

3. Системы неявных и параметрически заданных функций. Ограничимся рассмотрением функций двух независимых переменных. Пусть система двух уравнений

$$\begin{aligned} &F(x,\, y,\, u,\, v) = 0,\\ &G(x,\, y,\, u,\, v) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

имеет решение $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$ и $v = v_0$, причем функции F и G имеют в окрестности точки $P_0(x_0,\, y_0,\, u_0,\, v_0)$ непрерывные частные производные первого порядка и якобиан

$$\frac{D(F,\, G)}{D(u,\, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в точке P_0. Тогда в некоторой окрестности точки P_0 система (7) определяет единственную пару непрерывных функций $u(x,\, y)$ и $v(x,\, y)$, имеющих непрерывные частные производные и удовлетворяющих условиям

$$u(x_0,\, y_0) = u_0, \quad v(x_0,\, y_0) = v_0.$$

Дифференциалы этих функций du и dv (а значит, и частные производные) можно найти из системы уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial u}\,du + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv = 0,\\ &\frac{\partial G}{\partial x}\,dx + \frac{\partial G}{\partial y}\,dy + \frac{\partial G}{\partial u}\,du + \frac{\partial G}{\partial v}\,dv = 0. \end{aligned}$$

Пример 6. Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$u + v = x, \quad u - yv = 0.$$

Найти du, dv, d^2u, d^2v.

◁ Якобиан системы $\dfrac{D(F,\, G)}{D(u,\, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix} = -y - 1$ отличен от нуля при $y \neq -1$. Дифференцированием находим два уравнения, связывающие дифференциалы всех четырех переменных:

$$du + dv = dx, \quad du - y\,dv - v\,dy = 0.$$

Решая эту систему относительно du и dv при $y \neq -1$, получим

$$du = \frac{y\,dx + v\,dy}{1+y}, \quad dv = \frac{dx - v\,dy}{1+y}.$$

Дифференцируем повторно:

$$d^2u = \frac{(dx\,dy + dv\,dy)(1+y) - dy(y\,dx + v\,dy)}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{\big(dx\,dy + (dx - v\,dy)/(1+y)\,dy\big)(1+y) - dy(y\,dx + v\,dy)}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{(1+y)\,dx\,dy + dx\,dy - v\,dy^2 - y\,dx\,dy - v\,dy^2}{(1+y)^2} = \frac{2(dx\,dy - v\,dy^2)}{(1+y)^2},$$

$$d^2v = \frac{-dv\,dy(1+y) - dy(dx - v\,dy)}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{-(dx - v\,dy)/(1+y)\,dy(1+y) - dx\,dy + v\,dy^2}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{-dx\,dy + v\,dy^2 - dx\,dy + v\,dy^2}{(1+y)^2} = \frac{2(v\,dy^2 - dx\,dy)}{(1+y)^2} = -d^2u. \ \triangleright$$

Пусть функция z независимых переменных x и y задана параметрически уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

и

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

в окрестности точки $P(u_0, v_0)$. Тогда дифференциал dz этой функции (а значит, и ее частные производные) в окрестности точки P можно найти из системы уравнений

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv,$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv,$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv.$$

Пример 7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = cv.$$

◁ Имеем

$$\frac{D(x,\, y)}{D(u,\, v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u \neq 0 \quad \text{при} \quad u \neq 0.$$

Дифференцированием находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных:

$$dx = \cos v\, du - u\sin v\, dv, \quad dy = \sin v\, du + u\cos v\, dv, \quad dz = c\, dv.$$

Из первых двух уравнений найдем dv:

$$dv = \frac{\cos v\, dy - \sin v\, dx}{u}.$$

Подставим найденное значение dv в третье уравнение:

$$dz = \frac{c}{u}(\cos v\, dy - \sin v\, dx).$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c\sin v}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\cos v}{u}. \ ▷$$

8.157. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$7x^2 + y^2 - 3z^2 = -1, \quad 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0.$$

Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ при $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$.

8.158. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

Найти dy, dz, d^2y, d^2z.

8.159. Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$xu + yv = 1, \quad x + y + u + v = 0.$$

Найти du, dv, d^2u, d^2v.

8.160. Показать, что $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, если $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

8.161. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2v^2$.

8.162. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x = a\cos u \operatorname{ch} v$, $y = b\sin u \operatorname{ch} v$, $z = c\operatorname{sh} v$.

8.163. Найти dz, если $x = e^u\cos v$, $y = e^u\sin v$, $z = uv$.

8.164. Найти dz, если $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ $(u \neq v)$.

4. Замена переменных в дифференциальных выражениях. Часто в дифференциальных выражениях входящие в них производные по одним переменным необходимо выразить через производные по новым переменным.

Пример 8. Преобразовать уравнение

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0,$$

полагая $x = \cos t$.

◁ Выразим производные от y по x через производные от y по t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy/dt}{-\sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(d/dt)(dy/dx)}{dx/dt} =$$

$$= \frac{-\sin t\cdot(d^2y/dt^2) + \cos t\cdot(dy/dt)}{\sin^2 t\cdot(-\sin t)} = \frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Подставим полученные выражения производных в данное уравнение и заменим x на $\cos t$:

$$(1 - \cos^2 t)\left(\frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}\right) - \cos t\left(-\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

или $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$. ▷

Пример 9. Преобразовать уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

приняв x за функцию, а y за аргумент.

◁ Выразим производные от y по x через производные от x по y:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{dx/dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{dx/dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=$$
$$=-\frac{d^2x/dy^2}{(dx/dy)^2}\cdot\frac{1}{dx/dy}=-\frac{d^2x/dy^2}{(dx/dy)^3}.$$

Подставим эти выражения производных в данное уравнение:

$$-\frac{d^2x/dy^2}{(dx/dy)^3}+2y\cdot\frac{1}{(dx/dy)^2}=0,$$

или

$$\frac{d^2x}{dy^2}-2y\frac{dx}{dy}=0.\ \triangleright$$

Пример 10. Перейти к полярным координатам в выражении

$$A=\frac{x+yy'}{xy'-y}.$$

◁ Имеем

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,$$
$$dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi,\quad dy=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi,$$

откуда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi}.$$

Подставим выражения x, y, y' в A:

$$A=\frac{r\cos\varphi+r\sin\varphi\cdot\dfrac{\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi}}{r\cos\varphi\cdot\dfrac{\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi}-r\sin\varphi}=\frac{dr/d\varphi}{r}.\ \triangleright$$

Пример 11. Преобразовать уравнение

$$x^2\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0,$$

перейдя к новым независимым переменным u и v, если $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.

◁ Выразим частные производные от z по x и y через частные производные от z по u и v.

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}.$$

По формулам (3) получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot y + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}y + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{1}{y}\right)y + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} =$$
$$= y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}x - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{1}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^3}\right) =$$
$$= x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^3}\right) =$$
$$= x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}x - \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{x}{y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}x - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^2}\right) =$$
$$= x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{x^2}{y^4}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Подставим найденные выражения производных в данное уравнение:

$$x^2\left(y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) -$$
$$-y^2\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0.$$

После упрощений при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2xy}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}. \ \triangleright$$

П р и м е р 12. Преобразовать уравнение $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$, приняв за новые независимые переменные величины $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ и за новую функцию $w = \ln z - (x+y)$.

◁ Выразим частные производные от z по x и y через частные производные от w по u и v. Для этого продифференцируем данные соотношения:

$$du = 2(x\,dx + y\,dy),$$
$$dv = -\left(\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2}\right),$$
$$dw = \frac{dz}{z} - (dx + dy).$$

Учитывая формулу (1) § 1, имеем

$$\frac{\partial w}{\partial v}\,du + \frac{\partial w}{\partial v}\,dv = \frac{dz}{z} - (dx + dy),$$

или

$$2\frac{\partial w}{\partial u}(x\,dx + y\,dy) - \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2}\right) = \frac{dz}{z} - (dx + dy),$$

откуда

$$dz = z\left(\left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right)dx + \left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial y} + 1\right)dy\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right).$$

Подставим эти выражения $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в данное уравнение:

$$yz\left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right) - xz\left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right) = (y - x)z,$$

или $\dfrac{\partial w}{\partial v} = 0$. ▷

8.165. Преобразовать уравнение

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

полагая $x = 1/t$.

8.166. Преобразовать уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2x}{1 + x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1 + x^2)^2} = 0,$$

полагая $x = \operatorname{tg} t$.

8.167. Преобразовать уравнение
$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$
приняв y за аргумент.

8.168. Преобразовать уравнение
$$(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2),$$
перейдя к полярным координатам.

8.169. Преобразовать выражение $w=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$, перейдя к полярным координатам.

8.170. Преобразовать уравнение
$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$
перейдя к новым независимым переменным u и v, если $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

8.171. Преобразовать уравнение $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$, перейдя к новым независимым переменным u и v, если $u=y$, $v=y/x$.

8.172. Преобразовать выражение $w=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, перейдя к полярным координатам.

8.173. Преобразовать выражение
$$w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$
перейдя от цилиндрических координат к сферическим ($r=\rho\sin\theta$, $\varphi=\varphi$, $z=\rho\cos\theta$).

8.174. Преобразовать уравнение
$$(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz,$$
приняв за новые независимые переменные $u=yz-x$, $v=xz-y$ и за новую функцию $w=xy-z$.

8.175. Преобразовать уравнение
$$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{2}y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x},$$
приняв за новые независимые переменные $u=\dfrac{x}{y}$, $v=x$ и за новую функцию $w=xz-y$.

8.176. Преобразовать уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z,$$

приняв за новые независимые переменные $u = \dfrac{x+y}{2}$, $v = \dfrac{x-y}{2}$ и за новую функцию $w = ze^y$.

§ 3. Приложения частных производных

1. Формула Тейлора. Если функция $f(P)$ дифференцируема $m+1$ раз в некоторой окрестности $U(P_0)$ точки $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, то для всякой точки $P(x_1, \ldots, x_n) \in U(P_0)$ справедлива формула Тейлора

$$f(P) = f(P_0) + \frac{df(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{1!} + \frac{d^2 f(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{2!} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{d^m f(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(\widetilde{P}, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{(m+1)!}, \quad (1)$$

где $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_n^0$, а $\widetilde{P}$ — некоторая точка указанной окрестности.

В случае, например, функции $f(x, y)$ двух переменных x и y формула Тейлора в развернутом виде записывается следующим образом:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\big(f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)\big) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\big(f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) +$$
$$+ f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\big) + \ldots + \frac{1}{m!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \times$$
$$\times f(x_0, y_0) + \frac{1}{(m+1)!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1} \times$$
$$\times f\big(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 + \theta_2(y - y_0)\big), \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1. \quad (2)$$

Последнее слагаемое в формуле (2) (*остаточный член*) можно короче записать в виде

$$o(\rho^m), \quad \text{где} \quad \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

(форма Пеано).

В частном случае, при $x_0 = y_0 = 0$, формула (2) называется формулой Маклорена.

Пример 1. Функцию $f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(2, -1)$.

◁ Имеем $f(2, -1) = 2$. Вычислим последовательно частные производные данной функции и их значения в точке $(2, -1)$:

$$\begin{aligned}
&f'_x(x, y) = 3x^2 - 10x - y + 10, && f'_x(2, -1) = 3;\\
&f'_y(x, y) = -x + 2y + 5, && f'_y(2, -1) = 1;\\
&f''_{xx}(x, y) = 6x - 10, && f''_{xx}(2, -1) = 2;\\
&f''_{xy}(x, y) = -1, && f''_{xy}(2, -1) = -1;\\
&f''_{yy}(x, y) = 2, && f''_{yy}(2, -1) = 2;\\
&f'''_{xxx}(x, y) = 6, && f'''_{xxx}(2, -1) = 6.
\end{aligned}$$

Все последующие производные тождественно равны нулю. По формуле (2) получаем искомое разложение

$$f(x, y) = 2 + 3(x - 2) + (y + 1) + (x - 2)^2 - \\ - (x - 2)(y + 1) + (y + 1)^2 + (x - 2)^3. \ ▷$$

Пример 2. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1, 1)$ до членов 2-го порядка включительно функцию

$$f(x, y) = y^x.$$

◁ Имеем $f(1, 1) = 1$. Вычислим частные производные 1-го и 2-го порядка данной функции и их значения в точке $(1, 1)$:

$$\begin{aligned}
&f'_x(x, y) = y^x \ln y, && f'_x(1, 1) = 0;\\
&f'_y(x, y) = xy^{x-1}, && f'_y(1, 1) = 1;\\
&f''_{xx}(x, y) = y^x \ln^2 y, && f''_{xx}(1, 1) = 0;\\
&f''_{xy}(x, y) = y^{x-1}(x \ln y + 1), && f''_{xy}(1, 1) = 1;\\
&f''_{yy}(x, y) = x(x-1)y^{x-2}, && f''_{yy}(1, 1) = 0.
\end{aligned}$$

По формуле (2) получим

$$f(x. y) = 1 + (y - 1) + (x - 1)(y - 1) + o(\rho^2),$$

где $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. ▷

8.177. Разложить $f(x + h, y + k)$ по целым положительным степеням h и k, если $f(x, y) = xy^2$.

8.178. Найти приращение, получаемое функцией $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ при переходе от значений $x = -2$, $y = 1$ к значениям $x_1 = -2 + h$, $y_1 = 1 + k$.

8.179. Функцию $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(2, 1)$.

8.180. Разложить $f(x+h,\ y+k,\ z+l)$ по целым положительным степеням h, k, l, если $f(x,\ y,\ z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 2yz + 3x - y - 4z + 1$.

8.181. Функцию $f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz)$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1,\ -1,\ 2)$.

8.182. Разложить по формуле Маклорена до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x,\ y) = e^y \cos x$.

8.183. Разложить по формуле Маклорена до членов 4-го порядка включительно функцию $f(x,\ y) = \sin x \operatorname{sh} y$.

8.184. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1,\ 1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x,\ y) = y/x$.

8.185. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1, 1, 0)$ до членов 2-го порядка включительно функцию $f(x,\ y,\ z) = \ln(xy + z^2)$.

8.186. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1,\ 1)$ до членов 2-го порядка включительно неявную функцию $z(x,\ y)$, определяемую уравнением $z^2 + 3yz - 4x = 0$, если $z(1,\ 1) = 1$.

2. Экстремум функции. Функция $u = f(P)$ имеет *максимум* (*минимум*) *в точке* $P_0(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$, если существует такая окрестность точки P_0, для всех точек $P(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ которой, отличных от точки P_0, выполняется неравенство $f(P_0) > f(P)$ (соответственно $f(P_0) < f(P)$). Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*.

Необходимое условие экстремума. Если *дифференцируемая* функция $f(P)$ достигает экстремума в точке P_0, то в этой точке

$$f'_{x_k}(P_0) = 0 \quad \text{для всех} \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{3}$$

или $df(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = 0$ тождественно относительно $\Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n$.

Точки, в которых выполняются условия (3), называются *стационарными* точками функции $u = f(P)$. Таким образом, если P_0 — точка экстремума функции $u = f(P)$, то либо P_0 — стационарная точка, либо в этой точке функция недифференцируема.

Достаточные условия экстремума. Пусть $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — стационарная точка функции $u = f(P)$, причем эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P_0 и все ее вторые частные производные непрерывны в точке P_0. Тогда:

1) если второй дифференциал $d^2u(P_0,\ \Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n)$ как функция $\Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n$ имеет постоянный знак при всевозможных наборах значений $\Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n$, не равных одновременно нулю, то функция $u = f(P)$ имеет в точке P_0 экстремум, а именно — максимум при $d^2u(P_0,\ \Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n) < 0$ и минимум при $d^2u(P_0,\ \Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n) > 0$;

2) если $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ является знакопеременной функцией $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, т. е. принимает как положительные, так и отрицательные значения, то точка P_0 не является точкой экстремума функции $u = f(P)$;

3) если $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \geqslant 0$ или $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \leqslant 0$, причем существуют такие наборы значений $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, не равных одновременно нулю, для которых значение второго дифференциала обращается в нуль, то функция $u = f(P)$ в точке P_0 может иметь экстремум, но может и не иметь его (в этом случае для выяснения вопроса требуется дополнительное исследование).

В частном случае функции двух переменных достаточные условия экстремума можно сформулировать следующим образом. Пусть $P_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка функции $z = f(x, y)$, причем эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P_0 и все ее вторые частные производные непрерывны в точке P_0. Введем обозначения:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

и

$$D = AC - B^2.$$

Тогда:

1) если $D > 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремум, а именно — максимум при $A < 0$ $(C < 0)$ и минимум при $A > 0$ $(C > 0)$;

2) если $D < 0$, то экстремум в точке $P_0(x_0, y_0)$ отсутствует;

3) если $D = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

◁ Найдем частные производные 1-го порядка и составим систему уравнений вида (3):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^2 - y) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3(y^2 - x) = 0$$

или

$$x^2 - y = 0, \quad y^2 - x = 0.$$

Решая систему, найдем две стационарные точки:

$$P_1(0, 0) \quad \text{и} \quad P_2(1, 1).$$

Найдем частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Затем составим дискриминант $D = AC - B^2$ для каждой стационарной точки.

Для точки P_1

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 0, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{P_1} = -3,$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1} = 0, \quad D = -9 < 0.$$

Следовательно, экстремума в точке P_1 нет.

Для точки P_2

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2} = 6, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{P_2} = -3,$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_2} = 6, \quad D = 36 - 9 > 0, \quad A > 0.$$

Следовательно, в точке P_2 функция имеет минимум, равный

$$z_{\min} = z\Big|_{\substack{x=1\\ y=1}} = 1 + 1 - 3 = -1.$$

Для того чтобы установить тип стационарной точки, нет необходимости использовать изложенный выше признак, связанный с определением знаков D и A. Достаточно непосредственно исследовать знак второго дифференциала как квадратичной формы dx и dy, используя метод выделения полного квадрата. Так, например, для стационарной точки P_2 имеем:

$$d^2z(P_2;\, dx,\, dy) = 6\,dx^2 - 3\,dx\,dy + 6\,dy^2 = 6\left(dx - \frac{1}{4}\,dy\right)^2 + \frac{45}{8}\,dy^2,$$

откуда сразу видно, что при любых dx и dy, не равных одновременно нулю, $d^2z > 0$ и, следовательно, P_2 — точка минимума. ▷

Найти экстремумы функций двух переменных:

8.187. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

8.188. $z = xy^2(1 - x - y)$ $(x > 0,\ y > 0)$.

8.189. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

8.190. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ $(x > 0,\ y > 0)$.

8.191. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$ $(x > 0,\ y > 0)$.

8.192. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

8.193. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

8.194. $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. **8.195.** $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

Найти экстремумы функций трех переменных:

8.196. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$.

8.197. $u = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

8.198. $u = x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{2}{z}$.

Найти экстремумы функций z, заданных неявно:

8.199*. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0$.

8.200. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0$.

3. Условный экстремум. Функция $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет *условный максимум* (*условный минимум*) в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если существует такая окрестность точки P_0, для всех точек P которой $(P \neq P_0)$, удовлетворяющих *уравнениям связи*

$$\varphi_k(P) = \varphi_k(x_1, \ldots , x_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots , m;\ m < n),$$

выполняется неравенство $f(P_0) > f(P)$ (соответственно $f(P_0) < f(P)$).

Задача нахождения условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум *функции Лагранжа*

$$L(x_1, \ldots , x_n, \lambda_1, \ldots , \lambda_m) = f(x_1, \ldots , x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, \ldots , x_n);$$

λ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ называются *множителями Лагранжа.*

Необходимые условия условного экстремума выражаются системой $n + m$ уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L(P)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots , n), \\ &\varphi_k(P) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots , m), \end{aligned} \tag{4}$$

из которой могут быть найдены неизвестные

$$x_1^0, \ldots , x_n^0, \lambda_1^0, \ldots , \lambda_m^0,$$

где $x_1^0, \ldots, x_n^0$ — координаты точки, в которой возможен условный экстремум.

Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака 2-го дифференциала функции Лагранжа

$$d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, dx_1, \ldots, dx_n)$$

для каждой системы значений $x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$, полученной из (4) при условии, что $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_j}\, dx_j = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots , m) \tag{5}$$

при $dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 \neq 0$. А именно, функция $f(P)$ имеет условный максимум в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если для всевозможных значений $dx_1, \ldots, dx_n$, удовлетворяющих условиям (5) и не равных одновременно нулю, выполняется неравенство

$$d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, dx_1, \ldots, dx_n) < 0$$

и условный минимум, если при этих условиях

$$d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, dx_1, \ldots, dx_n) > 0.$$

В случае функции $z = f(x, y)$ при уравнении связи $\varphi(x, y) = 0$ функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

Система (4) состоит из трех уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Пусть $P_0(x_0, y_0)$, λ_0 — любое из решений этой системы и

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(P_0) & \varphi_y'(P_0) \\ \varphi_x'(P_0) & L_{xx}''(P_0, \lambda_0) & L_{xy}''(P_0, \lambda_0) \\ \varphi_y'(P_0) & L_{xy}''(P_0, \lambda_0) & L_{yy}''(P_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ условный максимум; если $\Delta > 0$, — то условный минимум.

Пример 4. Найти условный экстремум функции $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

$\triangleleft$ Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Имеем $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y$.

Система уравнений (4) принимает вид

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0, \\ 2 + 2\lambda y &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 5. \end{aligned}$$

Система имеет два решения: $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. Так как $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$, то

$$d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

При $\lambda = \dfrac{1}{2}$ $d^2L > 0$. Поэтому функция имеет условный минимум в точке $P_1(-1,\ -2)$ и $z_{\min} = -5$. При $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ $d^2L < 0$. Поэтому функция имеет условный максимум в точке $P_2(1,\ 2)$ и $z_{\max} = 5$.

Или иначе:

$$\varphi(x,\ y) = x^2 + y^2 - 5,$$

$$\varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_y = 2y, \quad \varphi'_x(-1,\ -2) = -2, \quad \varphi'_y(-1,\ -2) = -4,$$

$$L''_{xx} = 1, \quad L''_{xy} = 0, \quad L''_{yy} = 1 \quad \text{при} \quad \lambda = \frac{1}{2};$$

следовательно,

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0,$$

т. е. функция имеет условный минимум в точке $P_1(-1,\ -2)$. Аналогично для точки $P_2(1,\ 2)$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0,$$

т. е. $P_2(1,\ 2)$ — точка условного максимума. $\triangleright$

Найти условные экстремумы функций:

8.201. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

8.202. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

8.203. $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$.

8.204. $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.

8.205. $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

8.206. $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

8.207. $u = x^2 + y^2 + z^2$ при $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

8.208. $u = xy^2z^3$ при $x + 2y + 3z = 12$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

8.209. $u = xyz$ при $x + y + z = 4,\ xy + yz + zx = 5$.

8.210*. Доказать неравенство

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geqslant \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3,$$

если $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$.

4. Наибольшее и наименьшее значения функции. Если функция $f(P)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в стационарной точке, или в граничной точке области.

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области

$$0 \leqslant x \leqslant 2, \quad -1 \leqslant y \leqslant 2.$$

◁ Данная область — прямоугольник.

1) Найдем стационарные точки (см. пример 3): $P_1(0, 0)$ и $P_2(1, 1)$. Значения функции в этих точках: $z_1 = 0$, $z_2 = -1$.

2) Исследуем функцию на границах области.

а) При $x = 0$ имеем $z = y^3$. Эта функция монотонно возрастает и на концах отрезка $[-1, 2]$ принимает значения: $z|_{y=-1} = -1$, $z|_{y=2} = 8$.

б) При $x = 2$ имеем $z = 8 + y^3 - 6y$. Найдем значения этой функции в стационарной точке и на концах отрезка $[-1, 2]$. Имеем $z' = 3y^2 - 6$; $z' = 0$ при $y^2 = 2$, или, в данной области, при $y = \sqrt{2}$; $z|_{y=\sqrt{2}} = 8 + 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}$; $z|_{y=-1} = 13$; $z|_{y=-2} = 4$.

в) При $y = -1$ имеем $z = x^3 - 1 + 3x$ и $z' = 3x^2 + 3 > 0$. Функция монотонно возрастает от $z|_{x=0} = -1$ до $z|_{x=2} = 13$.

г) При $y = 2$ имеем $z = x^3 + 8 - 6x$; $z' = 3x^2 - 6$; $z' = 0$ при $x = \sqrt{2}$; $z|_{x=\sqrt{2}} = 8 - 4\sqrt{2}$; $z|_{x=0} = 8$; $z|_{x=2} = 6$.

3) Сравнивая все найденные значения функции, заключаем, что $z_{\text{наиб}} = 13$ в точке $(2, -1)$; $z_{\text{наим}} = -1$ в точках $(1, 1)$ и $(0, -1)$. ▷

Пример 6. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую площадь поверхности. Найти эту площадь.

◁ Ванна имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Пусть его измерения равны x, y, z. Так как объем $V = xyz$ задан, то $z = \dfrac{V}{xy}$. Площадь поверхности ванны равна

$$S = S(x, y) = 2(xz + yz) + xy = 2(x + y)\frac{V}{xy} + xy = 2V\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) + xy.$$

Задача сводится к нахождению минимума функции $S(x, y)$, причем по смыслу задачи $x > 0$, $y > 0$.

Решая систему уравнений

$$S'_x(x, y) = -\frac{2V}{x^2} + y = 0,$$

$$S'_y(x, y) = -\frac{2V}{y^2} + x = 0,$$

находим стационарную точку $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V}$. Проверим выполнение достаточных условий минимума:

$$S''_{xx}(x, y) = \frac{4V}{x^3}, \quad S''_{xy}(x, y) = 1, \quad S''_{yy}(x, y) = \frac{4V}{y^3}.$$

Следовательно,

$$A = S''_{xx}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2, \quad B = S''_{xy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 1,$$

$$C = S''_{yy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2, \quad D = AC - B^2 = 4 - 1 > 0, \quad A > 0.$$

Итак, функция $S(x, y)$ имеет минимум при $x = y = \sqrt[3]{2V}$; тогда $z = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$;

$$S_{\min} = 2V\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2V}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2V}}\right) + \sqrt[3]{4V^2} = 3\sqrt[3]{4V^2}. \ \triangleright$$

8.211. Найти наибольшее значение функции $z = x - 2y + 5$ в областях:

а) $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1$;

б) $x \leqslant 0,\ y \geqslant 0,\ y - x \leqslant 1$.

8.212. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 3$.

8.213. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

8.214. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy^2$ в области $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

8.215. Представить положительное число a в виде произведения четырех положительных сомножителей так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.

8.216. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную сумму длин ребер $12a$, найти параллелепипед с наибольшим объемом.

8.217. Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали d, имеющий наибольший объем.

8.218. Внутри четырехугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин была бы наименьшей.

8.219. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

8.220. В прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

8.221. Из всех треугольников с основанием a и углом α при вершине найти треугольник с наибольшей площадью.

8.222*. На эллипсе $x^2 + 9y^2 = 9$ найти точки, наиболее и наименее удаленные от прямой $4x + 9y = 16$.

8.223*. На эллипсе $x^2 + 4y^2 = 4$ даны две точки $A(-\sqrt{3},\ 0{,}5)$ и $B(1,\ \sqrt{3}/2)$. На том же эллипсе найти такую третью точку C, чтобы треугольник ABC имел наибольшую площадь.

8.224. Определить наружные размеры закрытого ящика с заданной толщиной стенок δ и емкостью (внутренней) V так, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала.

8.225. На плоскости даны n материальных точек $P_1(x_1,\ y_1)$, $P_2(x_2,\ y_2)$, ..., $P_n(x_n,\ y_n)$ с массами, соответственно равными m_1, m_2, ..., m_n. При каком положении точки $P(x,\ y)$ момент инерции системы относительно точки P будет наименьшим?

8.226*. Точки A и B расположены в различных оптических средах, отделенных одна от другой плоскостью A_1B_1 (рис. 27). Скорость распространения света в первой среде равна v_1, во второй — v_2. Пользуясь принципом Ферма, согласно которому световой луч распространяется вдоль той линии AMB, для прохождения которой требуется минимум времени, вывести закон преломления светового луча.

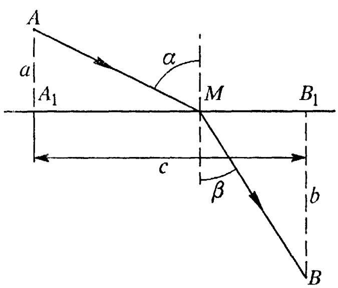


Рис. 27

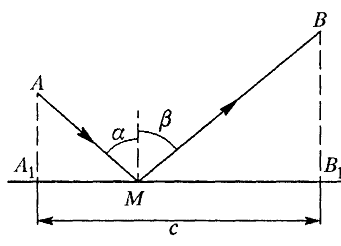


Рис. 28

8.227. Пользуясь принципом Ферма, вывести закон отражения светового луча от плоскости в однородной среде (рис. 28).

8.228*. Если в электрической цепи, имеющей сопротивление R, течет ток I, то количество тепла, выделяющегося в единицу времени, пропорционально I^2R. Определить, как следует разветвить ток I на токи I_1, I_2, ..., I_n при помощи n проводов, сопротивления которых R_1, R_2, ..., R_n, чтобы выделение тепла было наименьшим.

5. Геометрические приложения частных производных. *Касательной плоскостью* к поверхности в ее точке M_0 (*точка касания*) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Если уравнение поверхности имеет вид

$$F(x,\, y,\, z) = 0,$$

то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ есть

$$F'_x(x_0,\, y_0,\, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,\, y_0,\, z_0)(y - y_0) + \\ + F'_z(x_0,\, y_0,\, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (6)$$

Уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0,\, y_0,\, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0,\, y_0,\, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0,\, y_0,\, z_0)}. \quad (7)$$

В случае задания поверхности в явной форме

$$z = f(x,\, y)$$

уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0,\, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,\, y_0)(y - y_0),$$

а уравнения нормали —

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0,\, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0,\, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Пример 7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$ в точке $M(1,\, 2,\, 3)$.

◁ Обозначив через $F(x,\, y,\, z)$ левую часть уравнения поверхности, найдем частные производные и их значения в точке M:

$$\begin{aligned} &F'_x(x,\, y,\, z) = 2x + y - 2z, && F'_x(1,\, 2,\, 3) = -2; \\ &F'_y(x,\, y,\, z) = 4y + x + z, && F'_y(1,\, 2,\, 3) = 12; \\ &F'_z(x,\, y,\, z) = -6z + y - 2x, && F'_z(1,\, 2,\, 3) = -18. \end{aligned}$$

По формулам (6) и (7) имеем

$$-2(x - 1) + 12(y - 2) - 18(z - 3) = 0, \quad \text{или} \quad x - 6y + 9z - 16 = 0$$

— уравнение касательной плоскости,

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{12} = \frac{z - 3}{-18}, \quad \text{или} \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-6} = \frac{z - 3}{9}$$

— уравнения нормали. ▷

Особой точкой плоской кривой $f(x, y) = 0$ называется точка $M(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют системе трех уравнений:

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{8}$$

Пусть выполнены условия (8), числа

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

не все равны нулю и $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

а) если $\Delta > 0$, то M — *изолированная точка* (рис. 29);

б) если $\Delta < 0$, то M — *узел* (*двойная точка*) (рис. 30);

в) если $\Delta = 0$, то M — либо *точка возврата 1-го рода* (рис. 31) или *2-го рода* (рис. 32), либо *изолированная точка*, либо *точка самоприкосновения* (рис. 33).

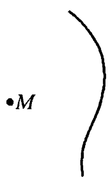


Рис. 29

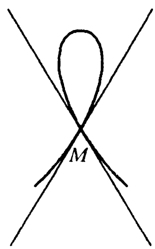


Рис. 30

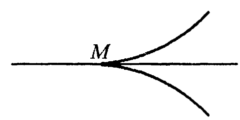


Рис. 31

Угловой коэффициент $k = y'$ касательной к кривой в особой точке находится из уравнения

$$A + 2Bk + Ck^2 = 0.$$

В случае изолированной точки касательной нет, в узле — две различные касательные; в точке возврата и точке самоприкосновения — одна общая касательная к двум ветвям кривой.

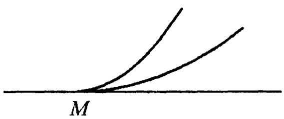


Рис. 32

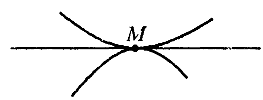


Рис. 33

Если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о типе особой точки нужно изучить расположение точек кривой в некоторой окрестности особой точки.

В случае трансцендентной кривой могут быть и иные типы особых точек: *угловые точки*, *точки прекращения* и т. д.

Пример 8. Исследовать особые точки конхоиды

$$(x^2+y^2)(x-a)^2-b^2x^2=0 \quad (a>0,\ b>0).$$

◁ Обозначив левую часть уравнения через $f(x, y)$, найдем частные производные и приравняем их нулю:

$$f'_x(x, y)=2x(x-a)^2+2(x-a)(x^2+y^2)-2b^2x=0,$$
$$f'_y(x, y)=2y(x-a)^2=0.$$

Система уравнений имеет единственное решение $x_0=y_0=0$, т.е. кривая имеет одну особую точку $O(0, 0)$.

Найдем вторые производные:

$$f''_{xx}(x, y)=2\big((x-a)^2+2x(x-a)+x^2+y^2+2x(x-a)-b^2\big),$$
$$f''_{xy}(x, y)=4y(x-a),$$
$$f''_{yy}(x, y)=2(x-a)^2.$$

Вычислив их значения в точке O, получаем

$$A=2(a^2-b^2), \quad B=0, \quad C=2a^2,$$
$$\Delta=AC-B^2=4a^2(a^2-b^2).$$

Если $a>b$, то $\Delta>0$, и точка O — изолированная (рис. 34). Если $a<b$, то $\Delta<0$, и точка O — узел (рис. 35). Если $a=b$, то $\Delta=0$.

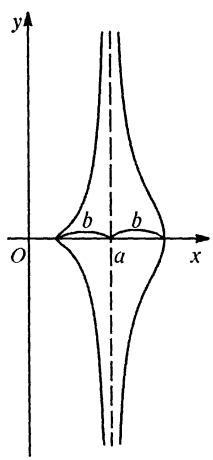


Рис. 34

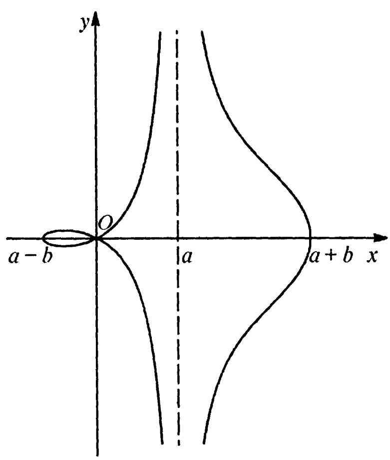


Рис. 35

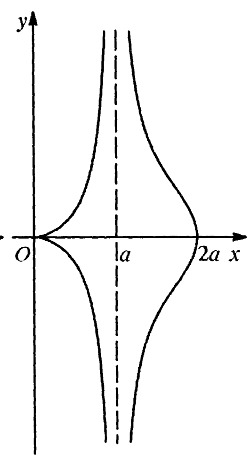


Рис. 36

Найдем угловой коэффициент касательной:

$$2(a^2-b^2)+2a^2k^2=0, \quad k=\frac{b^2-a^2}{a^2}=0,$$

т.е. касательная совпадает с осью Ox.

Из уравнения кривой получаем (при $a = b$) $y = \pm\dfrac{x}{x-a}\sqrt{2ax - x^2}$, и, следовательно, кривая симметрична относительно оси Ox $(0 \leqslant x < a;$ $a < x \leqslant 2a)$. Поэтому при $a = b$ O — точка возврата 1-го рода (рис. 36). ▷

Огибающей семейства плоских кривых называется линия (или совокупность нескольких линий), которая касается всех кривых данного семейства, причем каждая ее точка является точкой касания.

Если однопараметрическое семейство кривых $f(x, y, \alpha) = 0$ имеет огибающую, то ее уравнение можно получить из системы уравнений

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \tag{9}$$

Исключая из системы (9) параметр α, получим уравнение вида $D(x, y) = 0$. Кривая, определенная этим уравнением, называется *дискриминантной кривой*. Дискриминантная кривая состоит из огибающей и множества особых точек данного семейства.

Пример 9. Уравнение траектории движения снаряда, выпущенного из точки O с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту (без учета сопротивления воздуха), есть

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Принимая угол α за параметр, найти огибающую всех траекторий снаряда, расположенных в одной и той же вертикальной плоскости.

◁ Имеем

$$f(x, y, \alpha) = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} - y,$$

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = \frac{x}{\cos^2\alpha} - \frac{gx^2\sin\alpha}{v_0^2\cos^3\alpha} = \frac{x}{\cos^2\alpha}\left(1 - \frac{gx}{v_0^2}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Составим систему вида (9)

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}, \quad \frac{x}{\cos^2\alpha}\left(1 - \frac{gx}{v_0^2}\operatorname{tg}\alpha\right) = 0.$$

Из второго уравнения получим: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_0^2}{gx}$ и $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{g^2x^2}{g^2x^2 + v_0^4}$. Подставляя в первое уравнение, найдем уравнение огибающей (*парабола безопасности*):

$$y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g^2x^2 + v_0^4}{2v_0^2 g}, \quad \text{или} \quad y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \ ▷$$

8.229. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

а) $z = \sin x \cos y$ в точке $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$;

б) $z = e^{x \cos y}$ в точке $\left(1, \pi, \dfrac{1}{e}\right)$.

8.230. Найти расстояние от начала координат до касательной плоскости к поверхности $z = y \operatorname{tg} \dfrac{x}{a}$ в точке $\left(\dfrac{\pi a}{4}, a, a\right)$.

8.231. Найти углы, которые образует нормаль к поверхности $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$ в точке $\left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ с осями координат.

8.232. Для поверхности $z = 4x - xy + y^2$ найти уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $4x + y + 2z + 9 = 0$.

8.233. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

а) $x(y + z)(xy - z) + 8 = 0$ в точке $(2, 1, 3)$;

б) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ в точке $(2, 2, 1)$;

в) $z^2 + 4z + x^2 = 0$ в точках пересечения с осью Oz.

8.234. Для поверхности $x^2 - z^2 - 2x + 6y = 4$ найти уравнения нормали, параллельной прямой $\dfrac{x + 2}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z + 1}{4}$.

8.235. На поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

8.236. Показать, что касательные плоскости к поверхности $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ отсекают на осях координат отрезки, сумма квадратов которых постоянна и равна a^2.

8.237. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям, заданным параметрически, в указанных точках:

а) $x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi,\ z = r \operatorname{ctg} a$ в точке (r_0, φ_0);

б) $x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = av$ в точке (u_0, v_0).

8.238*. Под каким углом пересекаются цилиндр $x^2 + y^2 = a^2$ и гиперболический параболоид $bz = xy$ в общей точке (x_0, y_0, z_0)?

8.239*. Показать, что следующие поверхности попарно ортогональны:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$;

б) $xyz = a^3$ и $2z^2 = x^2 + y^2 + f(x^2 - y^2)$;

в) $xy = az^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = b$ и $z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$.

Исследовать особые точки кривых:

8.240. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

8.241. $y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$. **8.242.** $x^2 + y^4 = x^6$.

8.243. $y^2 = (x - 1)^3$. **8.244.** $(y - 2x^2)^2 = x^5$.

8.245. $4y^2 = x^5 + 5x^4$. **8.246.** $y^2 = ax^2 + x^3$.

8.247. $y^2 = 1 - e^{-x^2}$. **8.248.** $y^2 = 1 - e^{-x^3}$.

8.249*. $y = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$. **8.250*.** $y = x^x$.

8.251. Найти огибающую семейства прямых $y = ax + a^2$.

8.252. Найти огибающую семейства прямых $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ $(p = \text{const},\ p > 0)$.

8.253. Найти огибающую семейства окружностей $x^2 + (y - C)^2 = R^2$ $(R = \text{const})$.

8.254. Найти огибающую семейства парабол $y^2 = 2px + p^2$.

8.255. Найти огибающую семейства парабол $y = 3a^2 + 2ax - x^2$.

8.256. Найти огибающую семейства эллипсов $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{(l - a)^2} = 1$ $(l = \text{const})$.

8.257. Найти огибающую семейства окружностей, проходящих через начало координат и имеющих центр на параболе $y^2 = 4ax$.

8.258. Исследовать характер дискриминантных кривых семейства следующих линий (C — переменный параметр):

а) кубических парабол $y - 1 = (x - C)^3$;

б) полукубических парабол $(y - C)^2 = (x - C)^3$;

в) парабол Нейля $(y - 1)^3 = (x - C)^2$;

г) строфоид $(a - x)(y - C)^2 = x^2(a + x)$.

§ 4. Приближенные числа и действия над ними

1. Абсолютная и относительная погрешности. Пусть число a есть *приближение* числа A. Например, $A = \sqrt{3}$ и $a = 1{,}7$. При $a > A$ число a называется *приближением по избытку*, при $a < A$ — *по недостатку*. Так, число 1,73 есть приближение $\sqrt{3}$ по недостатку, а число 1,74 — по избытку. *Абсолютная погрешность* приближения (приближенного числа) a определяется равенством

$$\Delta = |a - A|.$$

Поскольку точное число A во многих случаях неизвестно, то неизвестна и абсолютная погрешность Δ, однако при этом может быть указана верхняя грань абсолютной погрешности. Наименьшая из верхних граней Δ_a абсолютной погрешности называется *предельной абсолютной погрешностью.* На практике часто за предельную абсолютную погрешность Δ_a принимают одну из верхних граней. Имеет место включение

$$A \in [a - \Delta_a, a + \Delta_a],$$

которое принято записывать в виде $A = a \pm \Delta_a$. Например, $\sqrt{3} = 1{,}7321 \pm 0{,}0001$.

Относительная погрешность числа a определяется равенством

$$\delta = \frac{\Delta}{a}.$$

Аналогично определяется *предельная относительная погрешность*

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{a}.$$

Например, для $A = \sqrt{3}$ и $a = 1{,}7321$ имеем $\delta_a = \dfrac{0{,}0001}{1{,}7321} = 0{,}00006$.

В десятичной записи числа *значащей цифрой* или знаком называется любая цифра, отличная от нуля. Нуль считается значащей цифрой в том случае, когда он расположен между значащими цифрами или стоит правее всех значащих цифр.

Округлением числа называется замена его числом с меньшим количеством значащих цифр. При округлении соблюдаются следующие правила:

1) если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то сохраняемые знаки оставляют без изменения;

2) если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последний из сохраняемых знаков увеличивают на 1;

3) если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а среди следующих за ней цифр есть отличные от нуля, то последний из сохраняемых знаков увеличивают на 1;

4) если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а все следующие за ней являются нулями, то последний из сохраняемых десятичных знаков увеличивают на 1, когда он нечетный, и сохраняют неизменным, когда он четный.

Если абсолютная погрешность приближенного числа a не превышает единицы разряда, выражаемого n-й значащей цифрой в десятичной записи этого числа, то a называется *числом, имеющим n верных знаков в широком смысле.* Если же абсолютная погрешность не превышает половины единицы указанного выше разряда, то приближенное число a называется *числом, имеющим n верных знаков в узком смысле.* При этом для предельной относительной погрешности δ_a справедливы неравенства

$$\delta_a \leqslant \frac{1}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad \text{и} \quad \delta_a \leqslant \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

соответственно в первом и во втором случаях; в обоих неравенствах k означает первую значащую цифру числа a. Обратно, если предельная относительная погрешность удовлетворяет неравенству

$$\delta_a \leqslant \frac{1}{2(k+1)} \cdot \frac{1}{10^{n-1}},$$

то соответствующее приближенное число a с первой значащей цифрой k имеет n верных знаков в узком смысле.

8.259. Найти предельную абсолютную и относительную погрешности следующих приближенных чисел, полученных при измерении: а) 23,015 кг; б) 84,5 см; в) $25°15'$.

8.260. При измерении длины пути получен результат 25,2 км с точностью до 2 м, а при измерении площади (аэрофотосъемка) получен результат 1500 м^2 с точностью до 30 м^2. Вычислить предельную абсолютную и предельную относительную погрешности обоих результатов.

8.261. При измерении длины участка пути в 10 км допущена ошибка в 10 м, а при измерении диаметра гайки в 4 см допущена ошибка в 1 мм. Какое из этих двух измерений более точное?

8.262. Каковы предельные абсолютная и относительная погрешности приближенных чисел, полученных при округлении: а) 36,1; б) 0,08.

8.263. Округлить числа 29,15 и 3,25 до первого десятичного знака после запятой.

8.264. Округлить число 5,3726 до тысячных, до сотых и до десятых долей. Найти абсолютную и относительную погрешности каждого из этих трех округлений.

8.265. Округлить до трех значащих цифр следующие числа: 0,02025, 1876672, 599983.

8.266. Определить число верных знаков в узком смысле и дать соответствующую запись приближенных чисел:

а) 413287,51, если предельная относительная погрешность не превышает 1%;

б) 0,0794, если предельная относительная погрешность не превышает 2%.

8.267. Со сколькими знаками нужно взять число $\sqrt{21}$, чтобы предельная относительная погрешность не превышала 1%?

8.268. Со сколькими знаками нужно взять числа $\ln 40$ и $\operatorname{arctg} 2$, чтобы их предельная относительная погрешность не превышала 0,1%?

2. Действия над приближенными числами. Пусть $u = f(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$ — дифференцируемая в рассматриваемой области функция. Тогда предельная абсолютная погрешность Δ_u значения функции определяется соотношением

$$\Delta_u = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \Delta_{x_k}, \tag{1}$$

где Δ_{x_k} — предельные абсолютные погрешности значений соответствующих аргументов. Для предельной относительной погрешности имеет место равенство

$$\delta_u = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \Delta_{x_k}. \tag{2}$$

Пример 1. Найти предельные абсолютную и относительную погрешности объема конуса радиуса r и высоты h, если $r = 15 \pm 0{,}02$ см, $h = 19{,}1 \pm 0{,}05$ см и $\pi = 3{,}14$.

$\lhd$ Имеем $v = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 4498{,}1\,\text{см}^3$. Учитывая, что $r = 15$, $h = 19{,}1$, $\pi = 3{,}14$, $\Delta_r = 0{,}02$, $\Delta_h = 0{,}05$ и $\Delta_\pi = 0{,}0016$, найдем $\dfrac{\partial v}{\partial \pi} = \dfrac{1}{3} r^2 h = 1432{,}5$, $\dfrac{\partial v}{\partial r} = \dfrac{2}{3}\pi r h = 599{,}74$ и $\dfrac{\partial v}{\partial h} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 = 235{,}5$. Применяя формулу (1), получаем предельную абсолютную погрешность

$$\Delta_v = \left| \frac{\partial v}{\partial \pi} \right| \Delta_\pi + \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| \Delta_r + \left| \frac{\partial v}{\partial h} \right| \Delta_h = 26{,}06\ \text{см}^3.$$

Предельная относительная погрешность может быть определена из равенства

$$\delta_v = \frac{26{,}1}{4498} = 0{,}006.$$

Таким образом, $v = 4498 \pm 26{,}1\,\text{см}^3$. $\rhd$

Доказать следующие утверждения:

8.269*. Предельная абсолютная погрешность суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

8.270*. Предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.

8.271*. Предельная относительная погрешность n-й степени в n раз больше предельной относительной погрешности основания.

8.272*. Предельная относительная погрешность частного равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.

8.273*. Предельная абсолютная погрешность Δ_{uv} произведения uv удовлетворяет соотношению $\Delta_{uv} = \Delta_u v + \Delta_v u$.

Произвести указанные действия над приближенными числами, в которых все десятичные знаки являются верными в узком смысле:

8.274. $130{,}6 + 0{,}255 + 1{,}15224 + 41{,}84 + 11{,}8216$.

8.275. $17{,}83 + 1{,}07 + 1{,}1 \cdot 10^2$. **8.276.** $153{,}21 - 81{,}329$.

8.277. $61{,}32 - 61{,}31$. **8.278.** $35{,}2 \cdot 1{,}748$.

8.279. $65{,}3 \cdot 78{,}5$. **8.280.** $7{,}6 : 2{,}314$.

8.281. $170 : 5$. **8.282.** $40{,}5^3$. **8.283.** $\sqrt{54{,}71}$.

8.284. При изменении радиуса круга с точностью до 0,5 см получилось число 12 см. Найти абсолютную и относительную погрешности площади круга.

8.285. Определить абсолютную погрешность десятичного логарифма положительного приближенного числа x, вычисленного с относительной погрешностью δ.

8.286. С какой предельной абсолютной погрешностью следует измерить стороны прямоугольника $a \approx 4$ м и $b \approx 5$ м, чтобы его площадь S можно было вычислить с точностью до $0{,}1$ м^2?

$\lhd$ Имеем $S = ab$ и $\Delta S = 0{,}1$. Предполагая равными слагаемые в формуле (1), получим

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \Delta_{x_i} = \frac{\Delta_u}{n}, \quad \text{откуда} \quad \Delta_{x_i} = \frac{\Delta_u}{n|\partial u/\partial x_i|}$$

(принцип равных влияний). Поэтому, вычисляя частные производные $\dfrac{\partial S}{\partial a} = b = 5$ и $\dfrac{\partial S}{\partial b} = a = 4$, найдем, что

$$\Delta_a = \frac{0{,}1}{2 \cdot 5} = 0{,}01, \quad \Delta_b = \frac{0{,}1}{2 \cdot 4} = 0{,}0125.$$

Распределяя число 0,1 в формуле для Δ_s между двумя слагаемыми не поровну, а как-нибудь иначе, получим другие значения для Δ_a и Δ_b, обеспечивающие, однако, все ту же предельную абсолютную погрешность. $\rhd$

8.287. С какой абсолютной погрешностью следует измерить сторону x квадрата, чтобы определить площадь этого квадрата с точностью до $0{,}001$ м^2, если 2 м $< x < 3$ м?

8.288. Вычислить плотность алюминия, если алюминиевый цилиндр диаметром 2 см и высотой 11 см имеет массу 93,4 г. Относительная погрешность измерения длин равна 0,01, а относительная погрешность определения массы равна 0,001.

8.289. С какой точностью следует определить радиус основания R и высоту H цилиндрической банки, чтобы ее вместимость можно было определить с точностью до 1%?

8.290. С какой точностью следует взять приближенное значение угла $x \approx 25^\circ$, чтобы найти значение $\sin x$ с четырьмя верными знаками в узком смысле?

8.291. С каким числом верных знаков в широком смысле следует взять значение аргумента $x \approx 2$, чтобы получить значение функции $y = e^x$ с точностью до 0,001?

8.292. С каким числом верных знаков должен быть известен свободный член уравнения $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$, чтобы получить корни этого уравнения с четырьмя верными знаками в узком смысле?

8.293. Требуется измерить с точностью в 1% площадь боковой поверхности усеченного конуса, радиусы оснований которого ≈ 2 м и ≈ 1 м, а образующая ≈ 5 м. С какой точностью нужно для этого измерить радиусы и образующую и со сколькими знаками нужно взять число π?

Глава 9

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двойной интеграл

1. Свойства двойного интеграла и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах. Пусть функция $f(x, y) = f(P)$ определена и непрерывна на замкнутой ограниченной области G плоскости Oxy, $\sigma = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n\}$ — некоторое разбиение области G на элементарные подобласти $\Delta\sigma_k$, площади которых также обозначим через $\Delta\sigma_k$, а диаметры — через d_k. Зафиксируем точки $P_k \in \Delta\sigma_k$, $k = 1, \ldots, n$. Выражение

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\,\Delta\sigma_k$$

называется интегральной суммой для функции $f(P)$ по области G. Если существует предел последовательности интегральных сумм S_n при $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} d_k \to 0$ (при этом $n \to \infty$) и если этот предел не зависит ни от способа разбиения области G на элементарные подобласти $\Delta\sigma_k$, ни от выбора точек $P_k \in \Delta\sigma_k$, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается через $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$.

Таким образом,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\sigma_k.$$

Для двойного интеграла справедливы свойства линейности и аддитивности (см. задачу 9.1).

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов следующим способом. Пусть область G (рис. 37) ограничена кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причем всюду на $[a, b]$ функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$. Тогда

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy, \tag{1}$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y (x — параметр), а полученный результат интегрируется по x. Заметим при

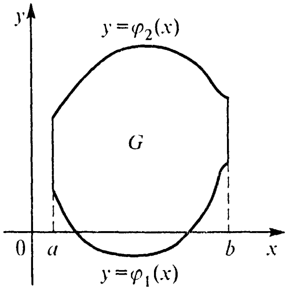


Рис. 37

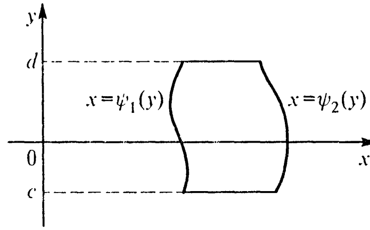


Рис. 38

этом, что если кривая $\varphi_1(x)$ (или кривая $\varphi_2(x)$) в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ задается разными аналитическими выражениями, например,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(x) & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant c, \\ \varphi_1^{(2)}(x) & \text{при} \quad c < x \leqslant b, \end{cases}$$

то интеграл справа записывается в виде суммы двух интегралов

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy = \int_a^c dx \int_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Аналогично, если область G ограничена кривыми $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, причем всюду на $[c, d]$ функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны и $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ (рис. 38), то

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx. \tag{2}$$

Двойной интеграл, представленный в виде (1) или (2), называется также повторным интегралом.

Пример 1. Расставить пределы интегрирования двумя способами и вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$, если область интегрирования G ограничена линиями $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$.

◁ Форма области G (рис. 39) позволяет применить формулу (1) при $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $\varphi_2(x) = x$, $a = 1$, $b = 2$:

$$I = \iint_G \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 x^2\,dx \int_{1/x}^{x} \frac{dy}{y^2} =$$

$$= \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{y}\Big|_{1/x}^{x} \right) dx = \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right)\Big|_1^2 = 2\frac{1}{4}.$$

Если же для вычисления данного интеграла применить формулу (2), то следует положить

$$\psi_1(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & \text{при} \quad \dfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1, \\ y & \text{при} \quad 1 < y \leqslant 2, \end{cases} \qquad \psi_2(y) = 2,$$

$c = \dfrac{1}{2}$, $d = 2$. Тогда

$$I = \iint_G \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_{1/2}^{1} \frac{dy}{y^2} \int_{1/y}^{2} x^2\,dx + \int_1^2 \frac{dy}{y^2} \int_y^2 x^2\,dx.$$

Очевидно, что первый способ вычисления в данном примере целесообразнее второго. ▷

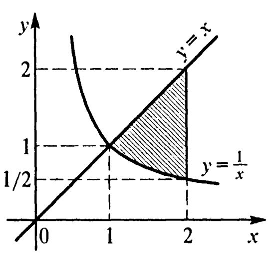


Рис. 39

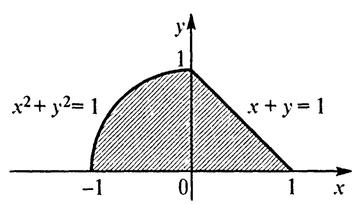


Рис. 40

П р и м е р 2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx.$$

◁ Строим область интегрирования G по пределам интегрирования: $\psi_1(y) = -\sqrt{1-y^2}$, $\psi_2(y) = 1 - y$, $y = 0$, $y = 1$ (рис. 40). Сверху область G ограничена кривой

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{при} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1-x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

а снизу — прямой $y = 0$. Поэтому имеем

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dy = \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x, y)\, dy. \ \triangleright$$

9.1. Пользуясь определением двойного интеграла, доказать следующие его свойства:

а) линейность:

$$\iint\limits_G \big(f(x, y) \pm g(x, y)\big)\, dx\, dy = \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy \pm \iint\limits_G g(x, y)\, dx\, dy$$

и

$$\iint\limits_G \lambda f(x, y)\, dx\, dy = \lambda \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy \quad (\lambda \in \mathbb{R});$$

б) аддитивность: если $G = G_1 \cup G_2$, то

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{G_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{G_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Вычислить повторные интегралы:

9.2. $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (x^2 + y)\, dy.$ **9.3.** $\displaystyle\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} \frac{x\, dy}{x^2 + y^2}.$

9.4. $\displaystyle\int\limits_1^3 dy \int\limits_2^5 \frac{dx}{(x + 2y)^2}.$ **9.5.** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\, dr.$

9.6. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^3\, dr.$

Для данных повторных интегралов написать уравнения кривых, ограничивающих области интегрирования, и построить эти области:

9.7. $\displaystyle\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x+3} f(x, y)\,dy.$ **9.8.** $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x, y)\,dy.$

9.9. $\displaystyle\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx.$ **9.10.** $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\,dy.$

Для указанных ниже областей G записать двойной интеграл

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$$

в виде повторных, взятых в различных порядках:

9.11. G — прямоугольник с вершинами $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(5, 4)$, $D(1, 4)$.

9.12. G — параллелограмм, ограниченный прямыми $y = x$, $y = x - 3$, $y = 2$, $y = 4$.

9.13. G — область, ограниченная кривыми $x^2 + y^2 = 2a^2$, $x^2 = ay$ $(a > 0,\ y > 0)$.

9.14. G — область, ограниченная кривыми $y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ $(a > 0,\ y > 0)$.

9.15. G — область, ограниченная кривыми $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ $(a > 0,\ y > 0)$.

9.16. По какой переменной взят внешний интеграл в повторном интеграле

$$\int\limits_1^2 \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} f(x, y)\,dy\,dx$$

и какова область интегрирования?

Изменить порядок интегрирования в следующих повторных интегралах:

9.17. $\displaystyle\int\limits_{-2}^6 dx \int\limits_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y)\,dy.$

9.18. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,\, y)\, dx.$ **9.19.** $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,\, y)\, dy.$

9.20. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2/9}^{y} f(x,\, y)\, dx + \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{y^2/9}^{1} f(x,\, y)\, dx.$

9.21. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{(x+2)/2} f(x,\, y)\, dy + \int\limits_{2}^{10/3} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{(x+2)/2} f(x,\, y)\, dy.$

9.22. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,\, y)\, dy.$

9.23. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{y^2/2} f(x,\, y)\, dx.$

9.24. $\int\limits_{3}^{7} dx \int\limits_{9/x}^{3} f(x,\, y)\, dy + \int\limits_{7}^{9} dx \int\limits_{9/x}^{10-x} f(x,\, y)\, dy.$

9.25. Показать, что $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,\, y)\, dy = \int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{y}^{a} f(x,\, y)\, dx$, и, пользуясь этой формулой, доказать ф о р м у л у Д и р и х л е

$$\int\limits_{0}^{t} dx \int\limits_{0}^{x} f(y)\, dy = \int\limits_{0}^{t} (t-y) f(y)\, dy.$$

Вычислить следующие интегралы:

9.26. $\iint\limits_{G} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, где область G ограничена кривыми $y = x,\ x + y = 2a,\ x = 0$.

9.27. $\iint\limits_{G} \sqrt{xy - y^2}\, dx\, dy$, где G — трапеция с вершинами $A(1,\, 1),\ B(5,\, 1),\ C(10,\, 2),\ D(2,\, 2)$.

9.28. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $x+y=2$, $x^2+y^2=2y$ $(x>0)$.

9.29. $\iint\limits_G y\,dx\,dy$, где G — треугольник с вершинами $O(0,\,0)$, $A(1,\,1)$, $B(0,\,1)$.

9.30. $\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

9.31. $\iint\limits_G (4-y)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $x^2 = 4y$, $y=1$, $x=0$ $(x>0)$.

9.32. $\iint\limits_G \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, где область G ограничена кривыми $y=x\operatorname{tg}x$, $y=x$, $x=\pi/8$ $(x\geqslant\pi/8)$.

9.33. $\iint\limits_G \sqrt{a^2+x^2}\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $y^2-x^2=a^2$, $x=a$, $x=0$, $y=0$ $(y>0,\ a>0)$.

9.34. $\iint\limits_G e^{x+y}\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $y=e^x$, $x=0$, $y=2$.

9.35*. $\iint\limits_G x^2y\,dx\,dy$, где область G лежит в первой четверти, ограничена осями координат и дугой эллипса $x=a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$.

9.36. $\iint\limits_G x\,dx\,dy$, где область G ограничена осью Ox и аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

9.37. $\iint\limits_G y\,dx\,dy$, где область G ограничена осями координат и дугой астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$.

9.38*. Найти среднее значение функции $f(x,\,y)=\cos^2 x\cos^2 y$ в области $G=\{(x,\,y)|0\leqslant x\leqslant\pi/2,\ 0\leqslant y\leqslant\pi/2\}$.

9.39*. Оценить величину интеграла

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 3} \frac{dx\,dy}{9+\sin^2 x + \sin^2 (x+y)}.$$

9.40. Найти среднее значение функции $f(x,\, y) = 3x + 2y$ в треугольнике с вершинами $O(0,\, 0)$, $A(1,\, 0)$, $B(0,\, 1)$.

2. Замена переменных в двойном интеграле. Пусть функции

$$x = \varphi(u,\, v) \quad \text{и} \quad y = \psi(u,\, v) \tag{3}$$

осуществляют взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области Γ плоскости $O'uv$ на область G плоскости Oxy. Это означает, что существует обратное непрерывно дифференцируемое отображение $u = \eta(x,\, y)$ и $v = \chi(x,\, y)$ области G на область Γ и в области Γ отличен от нуля якобиан преобразования, т. е.

$$I(u,\, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u,\, v) \in \Gamma. \tag{4}$$

Величины u и v можно рассматривать как прямоугольные координаты для точек области Γ и в то же время как *криволинейные* координаты точек области G.

Если в двойном интеграле

$$\iint\limits_G f(x,\, y)\, dx\, dy$$

произвести замену переменных по формулам (3), то областью интегрирования полученного интеграла будет уже область Γ, которая при надлежащем выборе функций $\varphi(u,\, v)$ и $\psi(u,\, v)$ может оказаться значительно проще области G, и имеет место формула

$$\iint\limits_G f(x,\, y)\, dx\, dy = \iint\limits_\Gamma f\bigl(\varphi(u,\, v),\, \psi(u,\, v)\bigr) |\, I(u,\, v)|\, du\, dv. \tag{5}$$

Для вычисления интеграла по области Γ применяются изложенные в п. 1 методы сведения двойного интеграла к повторным.

Пример 3. Вычислить $\displaystyle\iint\limits_G \sqrt{xy}\, dx\, dy$, если область G ограничена кривыми $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = p$, $xy = q$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$.

◁ Перейдем к новым переменным u и v по формулам $y^2 = ux$, $xy = v$. Тогда

$$x = u^{-1/3}v^{2/3}, \quad y = u^{1/3}v^{1/3},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3},$$

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u},$$

$$|I(u, v)| = \frac{1}{3u} \quad \text{при} \quad u > 0.$$

Уравнения линий принимают вид

$$u = a, \quad u = b, \quad v = p, \quad v = q.$$

Область G плоскости Oxy преобразуется в прямоугольную область Γ

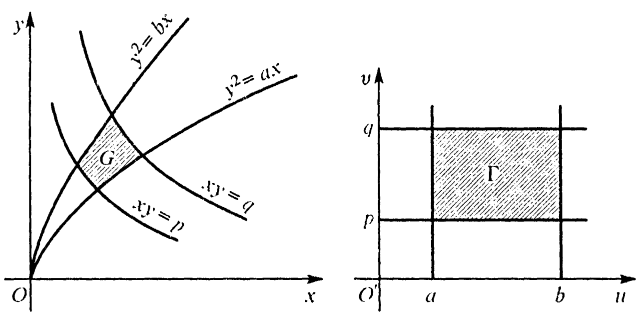


Рис. 41

плоскости $O'uv$ (рис. 41). Следовательно, применяя формулу (5), получаем

$$\iint\limits_G \sqrt{xy}\,dx\,dy = \frac{1}{3}\iint\limits_\Gamma \sqrt{v}\,\frac{du\,dv}{u} = \frac{1}{3}\int\limits_a^b \frac{du}{u}\int\limits_p^q \sqrt{v}\,dv =$$

$$= \frac{1}{3}\ln u\Big|_a^b \cdot \frac{2}{3}v^{3/2}\Big|_p^q = \frac{2}{9}(q^{3/2} - p^{3/2})\ln\frac{b}{a}. \ ▷$$

Наиболее употребительными из криволинейных координат являются полярные координаты

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

для которых

$$I(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

и формула (5) записывается в виде

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Gamma f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi. \tag{6}$$

Пример 4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy,$$

где область G ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

◁ Положим $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и применим формулу (6). Так как $x^2 + y^2 = r^2$, то

$$\iint\limits_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_\Gamma r^3\,dr\,d\varphi.$$

Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2ax$ преобразуется к виду $r = 2a\cos\varphi$. Поэтому областью Γ является область, ограниченная снизу осью $r = 0$, сверху косинусоидой $r = 2a\cos\varphi$, причем $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Следовательно,

$$\iint\limits_\Gamma r^3\,dr\,d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} r^3\,dr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= 4a^4 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = 8a^4 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = 8a^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^4. \ ▷$$

Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования по новым переменным в следующих интегралах:

9.41. $\displaystyle\int\limits_0^{3a/4} dx \int\limits_{a\sqrt{3}/2-\sqrt{3a^2/4-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy.$

9.42. $\displaystyle\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{ax}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy.$ **9.43.** $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$

9.44. $\iint\limits_G f(x^2+y^2)\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями $x^2+y^2=\sqrt{6}x$, $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$, $y=0$ $(y\geqslant 0,\ x\leqslant\sqrt{6})$.

Перейдя к полярным координатам, вычислить интегралы:

9.45. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy$.

9.46. $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx$.

9.47. $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2-9}\,dx\,dy$, где область G — кольцо между двумя окружностями $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=25$.

9.48. $\iint\limits_G \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, где область G — часть круга радиуса a с центром в точке $O(0,\,0)$, лежащая в первой четверти.

9.49. $\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ $(y>0)$.

9.50. $\iint\limits_G dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $x^2=ay$, $x^2+y^2=2a^2$, $y=0$ $(x>0,\ a>0)$.

9.51. $\iint\limits_G x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где область G ограничена лепестком лемнискаты $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$.

Перейти к новым переменным u и v и расставить пределы интегрирования в следующих интегралах:

9.52. $\iint\limits_G f(x,\,y)\,dx\,dy$, где область G определена неравенствами $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant a$. Положить $u=x+y$, $ay=uv$.

9.53. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$. Положить $x^2 = uy$, $y^2 = vx$.

9.54. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{1-x}^{3-x} f(x, y)\,dy$. Положить $u = x + y$, $v = x - y$.

9.55. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $xy = p$, $xy = q$, $y = ax$, $y = bx$ $(0 < p < q,\ 0 < a < b)$. Положить $u = xy$, $y = vx$.

Вычислить следующие двойные интегралы:

9.56. $\iint\limits_G \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{c^2 - (x/a)^2 - (y/b)^2}}$ $(c > 1)$, где область G ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (перейти к *обобщенным полярным координатам* r и φ по формулам $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$).

9.57. $\iint\limits_G e^{(x+y)^2}\,dx\,dy$, где область G задана неравенствами $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$ (произвести замену переменных $x = u(1 - v)$, $y = uv$).

9.58. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$ (выбрать надлежащую замену переменных).

3. Приложения двойных интегралов. Геометрические приложения. *Площадь* S плоской области G выражается, в зависимости от рассматриваемой системы координат, следующими интегралами:

$$S = \iint\limits_G dx\,dy \tag{7}$$

в декартовых прямоугольных координатах,

$$S = \iint\limits_\Gamma |I|\,du\,dv \tag{8}$$

в криволинейных координатах. Здесь предполагается, что

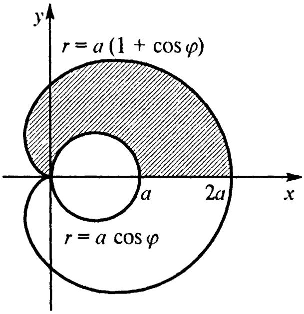


Рис. 42

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{в области } \Gamma.$$

В частности, в полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ имеем

$$S = \iint\limits_{\Gamma} r\,dr\,d\varphi. \tag{9}$$

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = a(1+\cos\varphi)$ и $r = a\cos\varphi$ $(a > 0)$.

$\triangleleft$ В плоскости Oxy фигура показана на рис. 42. Вычислим по формуле (9) площадь верхней части и удвоим:

$$S = 2\iint\limits_{\Gamma} r\,dr\,d\varphi = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr + 2\int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(r^2 \Big|_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} \right) d\varphi + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \left(r^2 \Big|_{0}^{a(1+\cos\varphi)} \right) d\varphi =$$

$$= a^2 \int\limits_{0}^{\pi/2} (1 + 2\cos\varphi)\,d\varphi + a^2 \int\limits_{\pi/2}^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2(\varphi + 2\sin\varphi)\Big|_0^{\pi/2} + a^2\left(\frac{3\varphi}{2} + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{5}{4}\pi a^2. \ \triangleright$$

Если гладкая поверхность имеет уравнение $z = f(x, y)$, то *площадь* части этой *поверхности*, проектирующейся в область G плоскости Oxy, равна

$$Q = \iint\limits_{G} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \tag{10}$$

Пример 6. Найти площадь части поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 2ax$, заключенной между цилиндром $y^2 = ax$ и плоскостью $x = a$ $(a > 0)$.

◁ Верхняя половина заданного параболоида описывается уравнением $z = \sqrt{2ax - y^2}$. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{\sqrt{2ax - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{2ax - y^2}},$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{a^2 + y^2}{2ax - y^2} = \frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}.$$

Так как рассматриваемая поверхность симметрична и относительно плоскости Oxz, то искомая площадь вычисляется как учетверенная площадь части этой поверхности, лежащей в первом октанте:

$$Q = 4 \iint\limits_G \sqrt{\frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}}\, dx\, dy = 4 \int\limits_0^a \sqrt{2ax + a^2}\, dx \int\limits_0^{\sqrt{ax}} \frac{dy}{\sqrt{2a - y^2}} =$$

$$= 4 \int\limits_0^a \sqrt{2ax + a^2} \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{2ax}} \Big|_0^{\sqrt{ax}} \right) dx = 4 \int\limits_0^a \sqrt{2ax + a^2}\, \frac{\pi}{4}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{3a}(2ax + a^2)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{\pi}{3a}(3\sqrt{3}a^3 - a^3) = \frac{\pi a^2}{3}(3\sqrt{3} - 1). \ ▷$$

Объем V цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область G, выражается интегралом

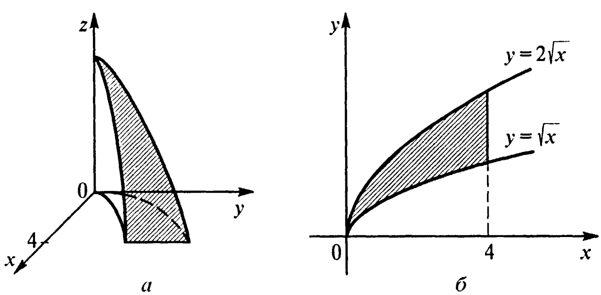


Рис. 43

$$V = \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy. \tag{11}$$

Пример 7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

◁ Данное тело является цилиндроидом, ограниченным сверху плоскостью $x + z = 4$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямыми цилиндрами $y = \sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{x}$ (рис. 43*а*). Область интегрирования показана на рис. 43*б*.

Имеем: $z = 4 - x$,

$$V = \iint\limits_G (4-x)\,dx\,dy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)\,dy = \int\limits_0^4 (4-x)(2\sqrt{x} - \sqrt{x})\,dx =$$

$$= \int\limits_0^4 (4-x)\sqrt{x}\,dx = \left(4 \cdot \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{5/2}}{5}\right)\Big|_0^4 = \frac{128}{15}. \ \triangleright$$

9.59. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4ax + 4a^2$ и $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

9.60. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $xy = 4$ и $x + y = 5$.

9.61. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, $x = 2y$, $x = 0$ $(a > 0)$.

9.62*. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2bx$, $y = x$, $y = 0$ $(0 < a < b)$.

9.63. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = a(1 - \cos\varphi)$ и $r = a$ (вне кардиоиды).

9.64*. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = 2ax.$$

9.65*. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $(x + y)^4 = ax^2y$, лежащей в первой четверти $(a > 0)$.

9.66*. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{c^2}.$$

9.67*. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $my^2 = x^3$, $ny^2 = x^3$ $(0 < a < b,\ 0 < m < n)$.

9.68*. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $y = ax$, $y = bx$ $(0 < p < q,\ 0 < a < b)$.

9.69. Найти площадь части плоскости $x+y+z = a$, вырезаемой цилиндром $y^2 = ax$ и плоскостью $x = a$.

9.70. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2+z^2 = a^2$, вырезаемой цилиндром $y^2 = a(a - x)$.

9.71. Найти площадь части поверхности конуса $x^2 + z^2 = y^2$, вырезаемой цилиндром $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

9.72. Найти полную поверхность тела, ограниченного цилиндрами $x^2 = ay$, $z^2 = ay$ и плоскостью $y = 2a$ $(a > 0)$.

9.73. Найти площадь части поверхности конуса $x^2 + z^2 = y^2$, вырезаемой плоскостями $x = 0$, $x + y = 2a$, $y = 0$.

9.74. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, вырезаемой цилиндром $z^2 = 2a(2a - x)$.

9.75. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2 = 2a^2$, заключенной внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

9.76. Найти площадь части поверхности параболоида $z = x^2 - y^2$, заключенной между параболоидами $z = 3x^2 + y^2 - 2$ и $z = 3x^2 + y^2 - 4$.

9.77. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2 = a^2$, вырезаемой цилиндром с образующими, параллельными оси Oz, направляющей которого служит трехлепестковая роза $r = a\sin 3\varphi$.

9.78. Найти площадь части винтовой поверхности $z = a\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.

9.79. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенной между плоскостями $z = \dfrac{\sqrt{3}}{3}y$ и $z = y$ $(z \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

9.80. Найти площадь части поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$, вырезаемой цилиндром с образующими, параллельными оси Oz, направляющей которого служит кардиоида $r = a(1 + \cos\varphi)$.

9.81. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2 = a^2$, вырезаемой из нее цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

9.82. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0)$.

9.83*. $z^2 - x^2 = a^2$, $z^2 - y^2 = a^2$, $z = a\sqrt{2}$ $(a > 0)$.

9.84. $y = x^2$, $z = y$, $z + y = 2$.

9.85. $x^2 - y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ (внутри цилиндра; $a > 0$).

9.86. $x^2 + y^2 - 2z^2 = -a^2$, $2(x^2 + y^2) - z^2 = a^2$ $(a > 0)$.

9.87. $z = ce^{-(x^2/a^2+y^2/b^2)}$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

9.88. $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 - 2z^2 = -a^2$ $(a > 0)$.

9.89. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$ (внутри конуса; $a>0$, $b>0,\ c>0$).

9.90*. $z=xy,\ xy=1,\ xy=2,\ y^2=x,\ y^2=3x$.

9.91*. $z=x^2+y^2,\ xy=1,\ xy=2,\ y=x,\ y=2x,\ z=0$ $(x>0,\ y>0)$.

Механические приложения. Если пластинка занимает область G плоскости Oxy и имеет переменную поверхностную плотность $\gamma=\gamma(x,y)$, то *масса* M пластинки и ее *статические моменты* M_x и M_y относительно осей Ox и Oy выражаются двойными интегралами

$$M=\iint\limits_G \gamma(x,y)\,dx\,dy,\quad M_x=\iint\limits_G y\gamma(x,y)\,dx\,dy,$$
$$M_y=\iint\limits_G x\gamma(x,y)\,dx\,dy. \tag{12}$$

Координаты *центра масс* $\overline{x}$ и $\overline{y}$ пластинки определяются следующим образом:

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_G x\gamma(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_G \gamma(x,y)\,dx\,dy},\quad \overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_G y\gamma(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_G \gamma(x,y)\,dx\,dy}. \tag{13}$$

Моменты инерции пластинки относительно осей Ox и Oy соответственно равны

$$I_x=\iint\limits_G y^2\gamma(x,y)\,dx\,dy,$$
$$I_y=\iint\limits_G x^2\gamma(x,y)\,dx\,dy, \tag{14}$$

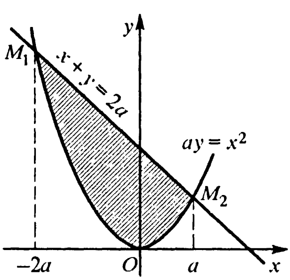


Рис. 44

а момент инерции пластинки относительно начала координат (*полярный* момент инерции) равен

$$I_O=\iint\limits_G (x^2+y^2)\gamma(x,y)\,dx\,dy=I_x+I_y. \tag{15}$$

Если пластинка однородна и плотность ее не указана, условимся считать $\gamma(x,y)=1$.

Пример 8. Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной кривыми $ay=x^2,\ x+y=2a\ (a>0)$.

◁ Линии пересекаются в точках $M_1(-2a, 4a)$, $M_2(a, a)$ (рис. 44). Поэтому можно записать:

$$S = \iint\limits_G dx\,dy = \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{x^2/a}^{2a-x} dy = \int\limits_{-2a}^{a} \left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) dx =$$

$$= \left(2ax - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{9}{2}a^2;$$

$$M_x = \iint\limits_G y\,dx\,dy = \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{x^2/a}^{2a-x} y\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-2a}^{a} \left((2a-x)^2 - \frac{x^4}{a^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(2a-x)^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{36}{5}a^3;$$

$$M_y = \iint\limits_G x\,dx\,dy = \int\limits_{-2a}^{a} x\,dx \int\limits_{x^2/a}^{2a-x} dy = \int\limits_{-2a}^{a} x\left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) dx =$$

$$= \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = -\frac{9}{4}a^3.$$

Подставляя найденные значения в формулы (13), имеем

$$\overline{x} = \frac{M_y}{S} = -\frac{1}{2}a, \quad \overline{y} = \frac{M_x}{S} = \frac{8}{5}a. \ \triangleright$$

9.92. Найти массу круглой пластинки радиуса R, если плотность ее пропорциональна квадрату расстояния точки от центра и равна δ на краю пластинки.

9.93. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, и полярной осью.

9.94. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = ax$, $y = x$.

9.95. Найти массу пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника с катетами $OB = a$ и $OA = b$, если плотность ее в любой точке равна расстоянию точки от катета OA.

9.96. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и прямой OA, проходящей через начало координат и вершину $A(\pi/2, 1)$ синусоиды ($x \geqslant 0$).

9.97. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной кривыми $xy = a^2$, $y^2 = 8ax$, $x = 2a$ $(a > 0)$.

9.98. Найти моменты инерции однородного треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 1$, $x + 2y = 2$, $y = 0$, относительно осей Ox и Oy.

9.99. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной петлей кривой $r = a\sin 2\varphi$, лежащей в первой четверти.

9.100. Найти моменты инерции однородной фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$, относительно осей Ox, Oy и относительно полюса.

9.101. Найти моменты инерции однородной фигуры, ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, относительно осей Ox, Oy и относительно начала координат.

9.102. Найти моменты инерции однородной фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = ax$, $y = a$, $x = 0$:

а) относительно начала координат,

б)* относительно прямой $x = -a$.

9.103. Найти моменты инерции треугольника, ограниченного прямыми $x + y = a$, $x = a$, $y = a$, относительно осей Ox, Oy и относительно начала координат, если плотность пропорциональна ординате точки.

9.104. Найти момент инерции однородной фигуры, ограниченной лемнискатой $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, относительно полюса.

9.105. Найти моменты инерции однородного кругового сектора радиуса a с углом α при вершине (совпадающей с началом координат) относительно осей Ox и Oy, если сектор расположен в первой четверти и одной из своих сторон лежит на оси Ox.

9.106*. Тонкая пластинка имеет форму кругового кольца с радиусами R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$. Удельная теплоемкость пластинки меняется по закону $c = |xy|$, плотность постоянна и равна γ. Найти количество теплоты Q, полученной пластинкой при ее нагревании от температуры t_1 до температуры t_2.

9.107*. На тонкой пластинке, имеющей форму параболического сегмента, ограниченного осью Ox и параболой $ax^2 + h^2y = h^3$, распределен электрический заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 2x + y$. Найти полный заряд E пластинки.

§ 2. Тройной интеграл

1. Тройной интеграл и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах. *Тройным интегралом* от непрерывной функции $f(x, y, z)$ по ограниченной замкнутой пространственной области T называется предел последовательности соответствующих интегральных сумм при стремлении к нулю наибольшего из диаметров d_k элементарных областей Δv_k, если этот предел не зависит ни от способа разбиения области T

на элементарные подобласти Δv_k, ни от выбора промежуточных точек:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta v_k, \qquad (1)$$

где $(x_k, y_k, z_k) \in \Delta v_k$. Через Δv_k обозначается как элементарная область, так и ее объем. Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению одного однократного и одного двойного интегралов или к вычислению трех однократных интегралов. Если, например, область интегрирования T ограничена снизу поверхностью $z = \varphi_1(x, y)$, сверху поверхностью $z = \varphi_2(x, y)$ $(\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_2(x, y))$ и с боков прямым цилиндром, сечением которого плоскостью, параллельной плоскости Oxy, является область G, то тройной интеграл (1) вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_G dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (2)$$

Записывая двойной интеграл по области G через один из повторных, получаем

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (3)$$

Пример 1. Вычислить $\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена плоскостями $x + y + z = 1$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

◁ Имеем:

$$\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} z\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{1-x-y} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)^2\,dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(-\frac{(1 - x - y)^3}{3} \Big|_{y=0}^{1-x} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{6} \int\limits_0^1 (1 - x)^3\,dx = \frac{1}{6} \left(-\frac{(1 - x)^4}{4} \Big|_{x=0}^{1} \right) = \frac{1}{24}. \ ▷$$

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ для указанных областей T:

9.108. Область T — тетраэдр, ограниченный плоскостями $2x + 3y + 4z = 12$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

9.109. Область T — внутренность эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

9.110. Область T ограничена поверхностями $y^2 + 2z^2 = 4x$, $x = 2$.

9.111. Область T ограничена поверхностями $x^2+y^2 = z^2$, $z = 1$.

Вычислить интегралы:

9.112. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz.$ **9.113.** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{xy}} z\,dz.$

9.114. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{ax}} y\,dy \int\limits_{a-x}^{2(a-x)} dz.$

9.115. $\iiint\limits_T (x + y + z)\,dx\,dy\,dz$, где область T — тетраэдр, ограниченный плоскостями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

9.116. $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$, где область T ограничена поверхностями $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$.

9.117. $\iiint\limits_T (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$, где область T ограничена поверхностями $z = y^2 - x^2$, $z = 0$, $y = 1$.

2. Замена переменных в тройном интеграле. Если в тройном интеграле

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

производится замена переменных по формулам $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, причем функции $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ осуществляют взаимно однозначное отображение области T пространства $Oxyz$ на область T_1 пространства O_1uvw и якобиан преобразования не обращается в нуль в области T_1:

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то справедлива формула

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint\limits_{T_1} f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big)\,|I|\,du\,dv\,dw. \quad (4)$$

Наиболее употребительными из криволинейных координат являются *цилиндрические* координаты r, φ, z (рис. 45): $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, якобиан которых $I = r$, и *сферические* r (длина радиус-вектора),

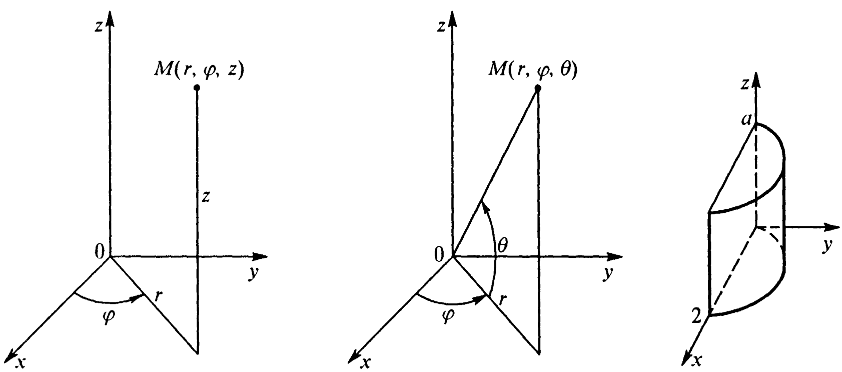


Рис. 45 Рис. 46 Рис. 47

φ (долгота), θ (широта) (рис. 46): $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, якобиан которых $I = r^2\cos\theta$. Формула (4) принимает соответственно вид

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{T_1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)r\,dr\,d\varphi\,dz \quad (5)$$

или

$$\iiint\limits_T f(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_{T_1} f(r\cos\varphi\cos\theta,\, r\sin\varphi\cos\theta,\, r\sin\theta) r^2 \cos\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta. \quad (6)$$

Пример 2. Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить $\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$, где область T задана неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x - x^2}$, $0 \leqslant z \leqslant a$ (рис. 47).

◁ Так как уравнение $y = \sqrt{2x - x^2}$ в цилиндрической системе координат принимает вид $r = 2\cos\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$, то по формуле (5)

$$\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2} z\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{T_1} r^2 z\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\, dr \int\limits_0^a z\, dz = \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\, dr =$$

$$= \frac{4a^2}{3} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{8}{9} a^2. \quad ▷$$

Пример 3. Перейдя к сферическим координатам, вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$, если область T есть полушар, заданный неравенствами $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$.

◁ Для области T_1 пределы изменения сферических координат суть: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant r \leqslant R$. Имеем по формуле (6):

$$\iiint\limits_T (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{T_1} r^2\cos^2\theta \cdot r^2\cos\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta \int\limits_0^R r^4\, dr = \frac{4}{15}\pi R^5. \quad ▷$$

Вычислить интегралы, перейдя к цилиндрическим координатам:

9.118. $\iiint\limits_T |y|\,dx\,dy\,dz$, где область T ограничена поверхностями $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, $z=h$.

9.119. $\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$, где область T ограничена поверхностями $x^2+y^2=z^2$, $z=a$.

9.120. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} dy \int\limits_{(x^2+y^2)/3}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz.$

9.121. $\int\limits_0^{a/\sqrt{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int\limits_0^{(x^2-y^2)/a} \sqrt{x^2+y^2}\,dz.$

9.122. $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{h(x^2+y^2)/a^2}^{h} \sqrt{x^2+y^2}\,dz.$

9.123. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{(x^2+y^2)/2}^{2} (x^2+y^2)\,dz.$

Вычислить интегралы, перейдя к сферическим координатам:

9.124. $\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, гдс область T — внутренность шарового сектора с центром в начале координат, радиусом a и углом при вершине 2α $(0<\alpha<\pi)$, если ось симметрии сектора принять за ось Oz.

9.125. $\iiint\limits_T xyz^2\,dx\,dy\,dz$, где область T ограничена частью сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и координатными плоскостями $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

9.126. $\iiint\limits_T \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где область T — сферический слой между поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=4a^2$.

9.127. $\displaystyle\int\limits_0^{R/\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2/2-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz.$

9.128. $\displaystyle\int\limits_0^{a} dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\,dz.$

9.129. $\displaystyle\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \sqrt{z}\,dz.$

3. Приложения тройных интегралов. *Объем* V пространственной области T равен

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz.$$

Масса M тела с переменной плотностью $\gamma(x,\,y,\,z)$, занимающего область T:

$$M = \iiint\limits_T \gamma(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Статические моменты тела относительно координатных плоскостей:

$$M_{yz} = \iiint\limits_T x\gamma(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_T y\gamma(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_T z\gamma(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Координаты центра масс тела: $\overline{x} = \dfrac{M_{yz}}{M}$, $\overline{y} = \dfrac{M_{zx}}{M}$, $\overline{z} = \dfrac{M_{xy}}{M}$.

Моменты инерции тела относительно осей координат:

$$I_x = \iiint\limits_T (y^2+z^2)\gamma(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_T (z^2+x^2)\gamma(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2+y^2)\gamma(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Пример 4. Найти координаты центра масс полушара $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от точки до центра.

◁ Имеем $\gamma(x, y, z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и, вследствие симметрии, $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Вычисления проведем в сферических координатах:

$$M_{xy} = k\iiint\limits_{T} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = k\iiint\limits_{T_1} r^4 \sin\theta\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int\limits_0^R r^4\,dr = \frac{1}{5}k\pi R^5,$$

$$M = k\iiint\limits_{T} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = k\iiint\limits_{T_1} r^3 \cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int\limits_0^R r^3\,dr = \frac{1}{2}k\pi R^4;$$

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{2}{5}R.$$

Таким образом, $C\left(0,\ 0,\ \frac{2}{5}R\right)$. ▷

9.130. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2+y^2$, $z = 2(x^2+y^2)$, $y = x$, $y^2 = x$.

9.131*. При каком значении a объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2 = az$, $x^2+y^2 = ax$, $z = 0$, равен данному числу V?

9.132*. Найти объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2 = 2axyz$ $(a > 0)$.

9.133*. Найти объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

9.134*. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$ и параболоидом $x^2+y^2 = 3az$ (внутри параболоида).

9.135*. Найти объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3z$ $(a > 0)$.

9.136. Найти массу и среднюю плотность тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2-z^2 = a^2$, $z = 0$, $z = a > 0$, если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате z и в плоскости $z = a$ равна γ_0.

9.137. Найти массу и среднюю плотность кругового конуса с радиусом основания R и высотой H, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от точки до плоскости, проходящей через вершину конуса параллельно плоскости основания, и в центре основания равна γ_0.

9.138. Найти массу и среднюю плотность тела, ограниченного поверхностями $x^2-y^2 = az$, $x^2+y^2 = a^2$, $z = 0$ $(z > 0)$, если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате z, а наибольшее значение плотности γ_0.

9.139. Найти массу и среднюю плотность сферического слоя между поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от точки до начала координат, а наибольшее значение плотности γ_0.

9.140. Найти массу и среднюю плотность сегмента параболоида вращения с радиусом основания R и высотой H, если плотность в каждой точке пропорциональна корню квадратному из расстояния от точки до плоскости основания сегмента и в вершине сегмента равна γ_0.

9.141. Найти массу и среднюю плотность шара радиуса R, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от точки до одного из диаметров шара и на окружности большого круга, лежащего в плоскости, перпендикулярной к этому диаметру, равна γ_0.

9.142. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \dfrac{h}{a^2}(y^2 - x^2)$, $z = 0$, $y = a$, $y = 0$ $(a > 0,\ h > 0)$.

9.143. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $y = \dfrac{b}{a^2}x^2$, $z = \dfrac{h}{b}(b - y)$, $z = 0$ $(a > 0,$ $b > 0,\ h > 0)$.

9.144. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \dfrac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, $z = H$.

9.145. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \dfrac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = H$ $(H > 0,$ $R > 0)$.

9.146. Найти координаты центра масс полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от точки до начала координат.

9.147. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела плотности γ, ограниченного поверхностями $y = \dfrac{b}{a^2}x^2$, $z = 0,\ z = \dfrac{h}{b}(b - y)\ \ (a > 0,\ b > 0,\ h > 0)$.

9.148. Найти момент инерции однородного сегмента параболоида вращения плотности γ с радиусом основания R и высотой H относительно его оси вращения.

9.149. Найти момент инерции шара радиуса R относительно его диаметра, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от точки до центра шара, а на поверхности шара равна γ_0.

9.150.** Найти ньютонов потенциал U однородного тела плотности γ, ограниченного эллипсоидом вращения $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$, в его центре $(b > a)$.

9.151.** Найти силу притяжения, оказываемого однородным конусом плотности γ, высоты H и радиуса основания R на материальную точку, расположенную в его вершине и содержащую единицу массы.

9.152. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела плотности γ, ограниченного поверхностями $z = \dfrac{h}{a^2} \times$ $\times (y^2 - x^2),\ z = 0,\ y = \pm a$.

9.153. Найти момент инерции однородного кругового конуса плотности γ с радиусом основания R и высотой H относительно его оси.

§ 3. Несобственные кратные интегралы

1. Интеграл по бесконечной области. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в бесконечной области G, то, по определению,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{D \to G} \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

где D — конечная область, целиком лежащая в области G, причем $D \to G$ означает, что область D расширяется произвольным образом так, чтобы в нее вошла и осталась в ней любая точка области G (*исчерпывающее расширение*). Если существует конечный предел (1), не зависящий от выбора подобласти D и способа расширения $D \to G$, то *несобственный интеграл* $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично определяется тройной интеграл по бесконечной области. Если $f(x, y) \geqslant 0$, то для сходимости несобственного интеграла необходимо и достаточно, чтобы предел (1) существовал хотя бы для одного исчерпывающего расширения области G.

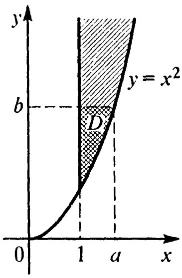


Рис. 48

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^4+y^2},$$

где G — область, определяемая неравенствами $x \geqslant 1$, $y \geqslant x^2$.

◁ Подобласть D (рис. 48) зададим неравенствами $1 \leqslant x \leqslant a$, $x^2 \leqslant y \leqslant b$, где $a \to +\infty$, $b \to +\infty$. Тогда:

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^4+y^2} = \lim_{D\to G} \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x^4+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_1^a dx \int\limits_{x^2}^b \frac{dy}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_1^a \left(\frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x^2}\bigg|_{x^2}^b\right)dx =$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \int\limits_1^a \frac{1}{x^2}\left(\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{x^2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)dx = \frac{\pi}{4}\lim_{a\to+\infty}\int\limits_1^a \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_1^a\right) = \frac{\pi}{4}. \quad ▷$$

Вычислить несобственные интегралы:

9.154. $\displaystyle\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^5y^3}$, где G — область, определяемая неравенствами $x \geqslant 1$, $xy \geqslant 1$.

9.155. $\displaystyle\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^3}$, где G — область, определяемая неравенством $x^2+y^2 \geqslant 1$ (внешность круга).

9.156. $\displaystyle\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, где T — область, определяемая неравенством $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$ (внешность шара).

9.157. $\int\limits_{0}^{+\infty} dx \int\limits_{0}^{+\infty} dy \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(x+y+z)}\, dz.$

Исследовать сходимость несобственных интегралов:

9.158. $\iint\limits_{G} \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy$, где G — область, определяемая неравенствами $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$.

9.159. $\iint\limits_{G} \dfrac{dx\, dy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}}$, где G — область, определяемая неравенством $x^2+y^2 \geqslant 1$ (внешность круга).

2. Интеграл от разрывной функции. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области G всюду, за исключением точки $P_0(x_0, y_0)$ (или линии L). Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\, dx\, dy,$$

где G_ε — область, получаемая из G путем удаления произвольной окрестности точки P_0 с диаметром, меньшим ε (соответственно произвольной окрестности линии L с «шириной», меньшей ε), то этот предел называется *несобственным интегралом от функции* $f(x, y)$ *по области* G и обозначается через $\iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy$, т. е.

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

Интеграл (2) в этом случае называется *сходящимся*. Если же $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\, dx\, dy$ не существует или равен ∞, то $\iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy$ называется *расходящимся*.

Аналогично определяется тройной интеграл от разрывной функции.

Пример 2. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\iint\limits_{G} \frac{dx\, dy}{(x^2+y^2)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad \text{где } G \text{ — круг } x^2+y^2 \leqslant 1.$$

◁ Начало координат является точкой разрыва функции $1/(x^2+y^2)^\alpha$. Удалим из G ε-окрестность начала координат (подынтегральная функция положительна). Тогда область G_ε есть кольцо между окружностями радиусов ε и 1. Перейдем к полярным координатам (Γ — полярный образ области G):

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \iint\limits_\Gamma \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^{2\alpha}}.$$

При $\alpha \neq 1$ имеем

$$\iint\limits_\Gamma \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^{2\alpha}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} r^{1-2\alpha}\,dr\,d\varphi = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 r^{1-2\alpha}\,dr =$$

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon\to+0} \left.\frac{r^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)}\right|_\varepsilon^1 = \pi \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1-\varepsilon^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha} & \text{при} \quad a<1, \\ +\infty & \text{при} \quad \alpha>1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ имеем:

$$\iint\limits_\Gamma \frac{dr\,d\varphi}{r} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dr}{r} = 2\pi \lim_{\varepsilon\to+0} \ln r\Big|_\varepsilon^1 = +\infty.$$

Итак, при $\alpha < 1$ интеграл сходится и равен $\pi/(1-\alpha)$. ▷

Вычислить несобственные интегралы:

9.160. $\displaystyle\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{\sqrt{xy}}$, где G — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

9.161. $\displaystyle\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{\sqrt[3]{1-x^2-y^2}}$, где G — круг $x^2+y^2 \leqslant 1$.

9.162. $\displaystyle\iint\limits_G \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, где G — круг $x^2+y^2 \leqslant 1$.

Исследовать сходимость несобственных интегралов:

9.163*. $\displaystyle\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x-y)^\alpha}$, где G — треугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x$.

9.164. $\displaystyle\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, где T — шар $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

§ 4. Вычисление интегралов, зависящих от параметра

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, то интеграл

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx \tag{1}$$

называется *интегралом, зависящим от параметра*, и является непрерывной в промежутке $[A, B]$ функцией.

Интеграл более общего вида

$$F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx \tag{2}$$

также называется интегралом, зависящим от параметра, и является непрерывной функцией аргумента y в промежутке $[A, B]$, если $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны при $y \in [A, B]$ и их значения содержатся в промежутке $[a, b]$.

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{y \to 0} \int\limits_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1 + x^2 + y^2}.$$

◁ Рассмотрим следующий интеграл, зависящий от параметра y:

$$F(y) = \int\limits_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1 + x^2 + y^2}.$$

Так как пределы интегрирования, а также подынтегральная функция непрерывны при любых значениях своих аргументов, то $F(y)$ — непрерывная функция. Поэтому

$$\lim_{y \to 0} \int\limits_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1 + x^2 + y^2} = \lim_{y \to 0} F(y) = F(0) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}. \ \triangleright$$

Если $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, то для интеграла (1) справедлива *формула дифференцирования под знаком интеграла* (формула Лейбница):

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int\limits_a^b f(x, y)\,dx = \int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx. \tag{3}$$

Если в (2) при тех же условиях на f и f'_y пределы интегрирования $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ дифференцируемы при $y \in (A,\, B)$, то верна формула:

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,\, y)\,dx =$$

$$= f(\psi(y),\, y)\psi'(y) - f(\varphi(y),\, y)\varphi'(y) + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,\, y)\,dx. \quad (4)$$

Пример 2. Найти $F'(y)$, если

$$F(y) = \int\limits_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

$\lhd$ Так как подынтегральная функция $e^{y\sqrt{1-x^2}}$, непрерывна в области определения вместе со своей частной производной по y, равной $\sqrt{1-x^2}e^{y\sqrt{1-x^2}}$, а пределы интегрирования являются также дифференцируемыми функциями, то можно воспользоваться формулой (4):

$$F'(y) = -e^{y\sqrt{1-\cos^2 y}}\sin y - e^{y\sqrt{1-\sin^2 y}}\cos y + \int\limits_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2}e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= -(e^{y|\sin y|}\sin y + e^{y|\cos y|}\cos y) + \int\limits_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2}e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx. \ \rhd$$

Если $f(x,\, y)$ непрерывна в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, то для интеграла (1) справедлива формула *интегрирования по параметру y под знаком интеграла*:

$$\int\limits_A^B F(y)\,dy = \int\limits_A^B dy \int\limits_a^b f(x,\, y)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_A^B f(x,\, y)\,dy. \quad (5)$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$ $(b > a > 0)$.

$\lhd$ Заметим, что

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^y\,dy.$$

Тогда искомый интеграл принимает вид

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y\,dy.$$

Подынтегральная функция $f(x, y) = x^y$ непрерывна в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant 1$, $a \leqslant y \leqslant b$, поэтому можно воспользоваться формулой (5)

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y\,dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y\,dx = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = \ln\frac{b+1}{a+1}. \ \triangleright$$

Вычислить следующие пределы:

9.165. $\lim\limits_{y\to 0} \int_1^2 x^3 \cos xy\,dx$. **9.166.** $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^1 \sqrt[3]{x^4 + y^2}\,dx$.

9.167. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^{x_0} \big(f(x+h) - f(x)\big)\,dx$, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ $(a < 0 < x_0 < b)$ и $f(0) = 0$.

Продифференцировать функции:

9.168. $F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x}\,dx$. **9.169.** $F(y) = \int_{y-1}^{y+1} \frac{\sin xy}{x}\,dx$.

9.170. $F(y) = \int_y^{y^2} e^{-yx^2}\,dx$. **9.171.** $F(y) = \int_0^y (x-y)\sin xy\,dx$.

9.172. Найти F''_{xy}, если $F(x, y) = \int_{x/y}^{xy} (x - yt) f(t)\,dt$, где $f(t)$ — дифференцируемая функция.

9.173. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая и $F(x)$ — дифференцируемая функции. Доказать, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\big(f(x-at) + f(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(y)\,dy$$

удовлетворяет уравнению колебания струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

9.174*. Найти производные от полных эллиптических интегралов

$$E(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi, \qquad (0 < k < 1)$$
$$F(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

и выразить их через функции $E(k)$ и $F(k)$.

Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интегралы:

9.175. $\displaystyle\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\ln x}(x^2 - 1)\, dx.$

9.176. $\displaystyle\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\ln x}(x - 1)\, dx.$

9.177. Доказать формулы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^k F(x)x\, dx = E(k) - (1 - k^2)F(k),$

б) $\displaystyle\int\limits_0^k E(x)x\, dx = \frac{1}{3}\big((1 + k^2)E(k) - (1 - k^2)F(k)\big),$

где $E(k)$ и $F(k)$ — полные эллиптические интегралы (см. задачу 9.174).

2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Несобственный интеграл, зависящий от параметра y, т. е.

$$F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx, \tag{6}$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, называется равномерно сходящимся в промежутке $[y_1, y_2]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B = B(\varepsilon)$, что при всяком $b \geqslant B(\varepsilon)$

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x, y)\, dx\right| \leqslant \varepsilon$$

при любом $y \in [y_1, y_2]$.

Если интеграл (6) сходится равномерно в промежутке $[y_1, y_2]$, то он представляет собой непрерывную функцию аргумента y в этом промежутке.

Аналогично определяется равномерная сходимость несобственного интеграла от неограниченной функции, зависящего от параметра.

При исследовании равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра, часто используется следующее утверждение:

Критерий Вейерштрасса. *Для равномерной сходимости интеграла* (6) *достаточно, чтобы существовала такая функция* $F(x)$, *не зависящая от параметра* y, *что*:

а) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$, *если* $a \leqslant x < +\infty$,

б) $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} F(x)\,dx < +\infty$.

Функция $F(x)$ называется *мажорантой* для $f(x, y)$.

Пример 4. Доказать равномерную сходимость следующего интеграла:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx, \quad -\infty < y < +\infty.$$

◁ Заметим, что

$$\int \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2 + y^2} + C.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Полагая $B(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$, находим (для любого $b > B$):

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx\right| = \left|\lim_{A\to+\infty} \int\limits_b^{A} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx\right| = \left|\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\Bigg|_b^A\right)\right| =$$
$$= \left|\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{A^2 + y^2} - \frac{b}{b^2 + y^2}\right| = \frac{b}{b^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{b} < \frac{1}{B} = \varepsilon,$$

что и доказывает, согласно определению, равномерную сходимость указанного интеграла по параметру y на всей оси. ▷

Пример 5. Установить равномерную сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \cos x\,dx, \quad 0 < y_0 \leqslant y < +\infty.$$

◁ Покажем, что функцию $F(x) = e^{-xy_0}$ можно взять в качестве мажоранты. Действительно, если $y > y_0$, то

$$|e^{-xy} \cos x| \leqslant e^{-xy} \leqslant e^{-xy_0}.$$

Кроме того,

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy_0}\,dx = -\frac{1}{y_0}e^{-xy_0}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y_0}.$$

Следовательно, на основании критерия Вейерштрасса указанный интеграл равномерно сходится. ▷

Для несобственных интегралов с бесконечным пределом, зависящих от параметра, при выполнении следующих условий:

а) функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своей производной $f'_y(x, y)$ в области $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$,

б) $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится при любом $y \in [y_1, y_2]$,

в) $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$ сходится равномерно в промежутке $[y_1, y_2]$, справедлива *формула дифференцирования по параметру* (формула Лейбница):

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx, \tag{7}$$

аналогичная соотношению (3).

При выполнении соответствующих условий формула Лейбница остается верной и для интеграла от разрывной функции, зависящего от параметра.

Пример 6. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx \quad (\alpha \geqslant \alpha_0 > 0,\ \ \beta \geqslant \beta_0 > 0,\ \ m \in \mathbb{Z}).$$

◁ Пусть

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx = F(\alpha, \beta).$$

Заметим, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos mx\,dx$ равномерно сходится при $\alpha \geqslant \alpha_0$ и равен $\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + m^2}$ (проверьте!). Исходный интеграл сходится при любых $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $\beta \geqslant \beta_0$, а подынтегральная функция непрерывна вместе со своей частной производной по α, равной $-e^{-\alpha x}\cos mx$. Следовательно, условия а), б), в) выполнены, и можно воспользоваться соотношением (7). Тогда

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos mx\,dx = -\frac{\alpha}{\alpha^2+m^2}.$$

Отсюда

$$F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+m^2) + C(\beta).$$

Для нахождения $C(\beta)$ полагаем в последнем равенстве $\alpha = \beta$. Имеем $0 = -\frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2) + C(\beta)$. Отсюда

$$C(\beta) = \frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2)$$

и

$$F(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\big(\ln(\beta^2+m^2) - \ln(\alpha^2+m^2)\big) = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}. \;\triangleright$$

9.178. На языке «ε-δ» сформулировать утверждение: интеграл $F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится неравномерно на отрезке $[y_1, y_2]$.

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие интегралы:

9.179. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos x\,dx \quad (0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

9.180. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha+1} \quad (1 < \alpha < +\infty)$.

9.181. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^2}\,dx \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

9.182. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty)$.

9.183. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

9.184. $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$ $\left(|\alpha| < \dfrac{1}{2}\right)$.

9.185. $\displaystyle\int\limits_0^{2} \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^\alpha}$ $(0 < \alpha < 2)$.

9.186. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

9.187. Доказать, что функция

$$u(x,\,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(t)}{x^2+(y-t)^2}\,dt$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить дующие интегралы:

9.188. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

9.189. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ m \neq 0)$.

9.190. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx$ $(\alpha \geqslant \alpha_0 > 0)$.

9.191. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\,dx$ $(\alpha > -1)$.

9.192*. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\gamma x^2}\cos\delta x\,dx \quad (\gamma > 0).$

9.193. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty).$

9.194. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha| \leqslant 1).$

9.195. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha| \leqslant 1).$

Глава 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Уравнения 1-го порядка

1. Основные понятия. Функциональное уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

или

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется *дифференциальным уравнением 1-го порядка*.

Решением (*частным решением*) уравнения (1) или (2) на интервале (a, b) называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение вместе со своей производной $\varphi'(x)$, обращает его в тождество относительно $x \in (a, b)$. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, определяющее это решение как неявную функцию, называется *интегралом* (*частным интегралом*) дифференциального уравнения. На плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат уравнение $\Phi(x, y) = 0$ определяет некоторую кривую, которая называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения.

Функция $y = \varphi(x, C)$ называется *общим решением* уравнения (1) или (2), если при любом допустимом значении параметра C она является частным решением этого уравнения и, кроме того, любое его частное решение может быть представлено в виде $y = \varphi(x, C_0)$ при некотором значении C_0 параметра C. Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Пример 1. Проверить подстановкой, что функция $\dfrac{\sin x}{x}$ есть решение дифференциального уравнения $xy' + y = \cos x$.

◁ Имеем $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $y' = \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^2}$. Умножив y и y' соответственно на 1 и x и сложив полученные выражения, получим $xy' + y \equiv \cos x$. ▷

Пример 2. Показать, что функция $y = Cx^3$, $C \in \mathbb{R}$, является решением дифференциального уравнения $xy' - 3y = 0$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$. (Найти интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(1, 1)$.)

◁ Найдя $y' = 3Cx^2$ и подставив выражения y и y' в дифференциальное уравнение, при любом значении C получим тождество $3Cx^3 - 3Cx^3 \equiv 0$. Это означает, что функция $y = Cx^3$ является решением дифференциального уравнения. Положив $x = 1$, $y = 1$, найдем значение параметра $C = 1$ и, таким образом, получим искомое частное решение $y = x^3$. Иначе говоря, интегральной кривой, проходящей через точку $M_0(1, 1)$, является кубическая парабола $y = x^3$. ▷

Пусть задано уравнение

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

определяющее на плоскости некоторое семейство кривых, зависящих от значений параметра C. Если составить систему двух уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_x(x, y, C) = 0,$$

то, исключая из этой системы параметр C, получим, вообще говоря, дифференциальное уравнение заданного семейства кривых.

Пример 3. Найти дифференциальное уравнение семейства окружностей $x^2 + y^2 = 2ax$.

◁ Имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2ax, \\ 2x + 2yy' &= 2a. \end{aligned}$$

Исключаем параметр a. Из второго уравнения находим $a = x + yy'$ и, подставляя это выражение в первое уравнение, получаем $x^2 + y^2 = 2x(x + yy')$, т. е. $y^2 - x^2 = 2xyy'$. Это и есть искомое дифференциальное уравнение. ▷

Показать, что при любом действительном значении параметра C заданные выражения определяют решения соответствующих дифференциальных уравнений:

10.1. $y = x(C - \ln|x|)$, $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$.

10.2. $y = x\left(\int\limits_0^x \frac{1}{x}e^x\,dx + C\right)$, $xy' - y = xe^x$.

10.3. $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$, $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$.

В заданном семействе выделить уравнение кривой, удовлетворяющей приведенному начальному условию.

10.4. $y(\ln|x^2 - 1| + C) = 1$, $y(0) = 1$.

10.5. $y(1 - Cx) = 1$, $y(1) = 0{,}5$.

10.6. $y = 2 + C\cos x$, $y(0) = -1$.

10.7. Написать уравнение, которому удовлетворяют все точки экстремума интегральных кривых дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Как отличить точки максимума от точек минимума?

10.8. Написать уравнение, которому удовлетворяют все точки перегиба интегральных кривых дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ и, в частности, дифференциальных уравнений:

а) $y' = y + x^3$; б) $y' = e^y - x$.

Составить дифференциальное уравнение семейств кривых:

10.9. Парабол $y = x^2 + 2ax$.

10.10. Гипербол $y = a/x$.

10.11. Цепных линий $y = a \operatorname{ch} x$.

10.12. Гипербол $x^2 - y^2 = 2ax$.

10.13. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, у которых отрезок любой нормали, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

10.14. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, у которых отрезок любой касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания $M(x, y)$ в отношении $|AM| : |MB| = 2 : 1$, где A — точка пересечения касательной с осью Oy, B — с осью Ox.

10.15. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, у которых площадь, заключенная между осями координат, этой кривой и переменной ординатой, пропорциональна четвертой степени этой ординаты.

2. Графический метод построения интегральных кривых (метод изоклин). Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ в плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат Oxy определяет *поле направлений* равенством $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$.

Изоклиной уравнения (поля направлений) называется всякая кривая, определяемая уравнением

$$f(x, y) = k$$

при фиксированном k.

Для приближенного (графического) решения уравнения $y' = f(x, y)$ построим на плоскости изоклины для нескольких значений k. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая начальная точка. Изоклина L_0, проходящая через эту точку, соответствует значению k, равному $k_0 = f(x_0, y_0)$. Проведем отрезок M_0M_1 с угловым коэффициентом k_0 до пересечения в точке M_1 с ближайшей изоклиной L_1 (тем самым мы заменим дугу интегральной кривой отрезком ее касательной). Далее, из точки $M_1(x_1, y_1)$ проведем новый отрезок M_1M_2 с угловым коэффициентом $k_1 = f(x_1, y_1)$ до пересечения в точке M_2 со следующей изоклиной L_2 и т. д.

В результате такого построения мы получим ломаную, являющуюся приближенным изображением интегральной кривой, проходящей через начальную точку M_0. Чем гуще взята сеть изоклин, тем более точно можно изобразить интегральную кривую.

Изменяя положение начальной точки M_0, аналогично можно построить приближенно и другие интегральные кривые.

Пример 4. Методом изоклин построить интегральную кривую уравнения $y' = 2x$, проходящую через начало координат.

◁ Изоклины данного уравнения — параллельные прямые $2x = k$. Полагая $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, получаем изоклины $x = 0$, $x = \pm 1/2$, $x = \pm 1$, $x = \pm 3/2$ и т. д. Построим их (рис. 49).

Отправляясь из начала координат влево и вправо, строим ломаную $\ldots M_{-3} M_{-2} M_{-1} M_0 M_1 M_2 M_3 \ldots$, звенья которой имеют угловые коэффи-

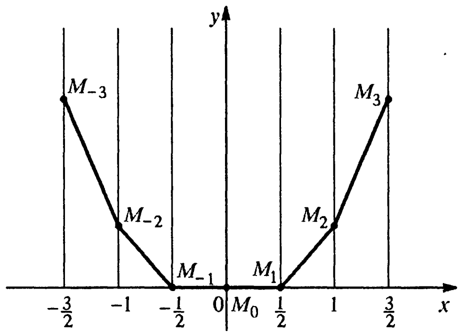


Рис. 49

циенты соответственно $\ldots, -2, -1, 0, 0, 1, 2, \ldots$ Эта ломаная и есть приближенное изображение интегральной кривой.

Рекомендуем читателю построить график соответствующего частного решения $y = x^2$ и сравнить его с построенной ломаной. ▷

Методом изоклин построить приближенно семейство интегральных кривых следующих дифференциальных уравнений:

10.16. $y' = x + y$. **10.17.** $y' = 1 + y$.

10.18. $y' = -\dfrac{y}{x}$. **10.19.** $y' = y - x^2$.

10.20. $y' = \dfrac{y}{x + y}$. **10.21.** $y' = \dfrac{y - 3x}{x + 3y}$.

3. Уравнения с разделяющимися переменными. Пусть в уравнении

$$y' = f(x, y)$$

функция $f(x, y)$ может быть разложена на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной: $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, или в уравнении

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

коэффициенты при dx и dy могут быть представлены в виде $M(x, y) = M_1(x) M_2(y)$, $N(x, y) = N_1(x) N_2(y)$. Путем деления на $f_2(y)$ и на

$N_1(x)M_2(y)$ соответственно эти уравнения приводятся к виду

$$f_1(x)\,dx = \frac{1}{f_2(y)}\,dy, \quad \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy$$

(уравнения с *разделенными переменными*). Интегрируя левые части этих уравнений по x, а правые по y, приходим в каждом из них к общему интегралу исходного дифференциального уравнения.

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2+1}.$$

◁ Разделяем переменные:

$$(3y^2+1)\,dy = 2x\,dx.$$

Интегрируем:

$$\int (3y^2+1)\,dy = \int 2x\,dx + C,$$

или

$$y^3 + y - x^2 = C$$

(общий интеграл уравнения). ▷

Если в уравнении с разделяющимися переменными $y' = f_1(x)f_2(y)$ функция $f_2(y)$ имеет действительный корень y_0, т. е. если $f_2(y_0) = 0$, то функция $y(x) = y_0$ является решением уравнения (в чем легко убедиться непосредственной подстановкой). При делении обеих частей этого уравнения на $f_2(y)$ (при разделении переменных) решение $y(x) = y_0$ может быть потеряно.

Аналогично, при интегрировании уравнения $M_1(x)M_2(y)\,dx + N_1(x)N_2(y)\,dy = 0$ могут быть потеряны интегральные кривые $x(y) = x_0$ и $y(x) = y_0$, где x_0 — действительный корень уравнения $N_1(x) = 0$, y_0 — действительный корень уравнения $M_2(y) = 0$.

Поэтому, получив указанным выше методом разделения переменных общий интеграл уравнения, надо проверить, входят ли в его состав (при подходящих числовых значениях параметра C) упомянутые решения. Если входят, то потери решений нет. Если не входят, то в окончательном ответе кроме общего интеграла следует указать и эти решения.

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y\operatorname{tg} x.$$

◁ Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x\,dx.$$

Интегрируем:

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + C_1,$$

или

$$\ln|y\cos x| = C_1.$$

Для удобства потенцирования полученного равенства представим параметр C_1 в логарифмической форме, положив $C_1 = \ln|C_2|$, $C_2 \neq 0$ (при этом C_1 принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$). Тогда

$$\ln|y\cos x| = \ln|C_2|$$

и, потенцируя, получаем общий интеграл в виде $y\cos x = C_2$, откуда

$$y = C_2 \sec x. \tag{3}$$

Заметим теперь, что исходное дифференциальное уравнение имеет, очевидно, еще решение $y = 0$, которое не входит в запись (3), так как $C_2 \neq 0$. Введем новый параметр C, принимающий, в отличие от C_2, также и нулевое значение. Тогда решение $y = 0$ войдет в состав общего решения

$$y = C\sec x. \ \triangleright$$

С помощью подстановки $u(x) = ax + by(x) + d$ к уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(ax + by + d), \quad b \neq 0.$$

Решить дифференциальные уравнения:

10.22. $y' = \dfrac{x}{y}$. **10.23.** $y^2 y' + x^2 = 1$.

10.24. $yy' + x = 0$. **10.25.** $xy' = 2y$.

10.26. $(x+1)y' + xy = 0$. **10.27.** $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$.

10.28. $y' = e^{x+y}$. **10.29.** $y' + \dfrac{x\sin x}{y\cos y} = 0$.

10.30. $(1+y^2)x\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$.

10.31. $xy\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

10.32. $ye^{2x}\,dx - (1+e^{2x})\,dy = 0$.

10.33. $2e^x \operatorname{tg} y\,dx + (1+e^x)\sec^2 y\,dy = 0$.

10.34. $(1+y)(e^x\,dx - e^{2y}\,dy) - (1+y^2)\,dy = 0$.

10.35. $(1+x^2)\,dy + y\sqrt{1+x^2}\,dx - xy\,dx = 0$.

10.36. $dy - 2\sqrt{y}\ln x\,dx = 0$.

10.37. $y' = \cos(x+y)$. **10.38.** $y' = \dfrac{1}{2x+y}$.

10.39. $y' = (4x + y + 1)^2$. **10.40.** $y' = \sin(y - x - 1)$.

10.41. $y' + 2y = 3x + 5$. **10.42.** $y' = \sqrt[3]{(4x - y + 1)^2}$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

10.43. $(1 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$; $y(1) = 0$.

10.44. $(xy^2 + x)\,dy + (x^2y - y)\,dx = 0$; $y(1) = 1$.

10.45. $y' \operatorname{tg} x = y$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

4. Однородные уравнения. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется *однородным*, если его можно привести к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

или к виду

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{5}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — *однородные функции* одного порядка, т.е. существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что $M(tx, ty) = t^k M(x, y)$ и $N(tx, ty) = t^k N(x, y)$ тождественно относительно x, y и $t \neq 0$.

С помощью подстановки $y/x = u(x)$ однородные уравнения (4) и (5) преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 7. Решить уравнение

$$y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}.$$

$\lhd$ Положим $\dfrac{y}{x} = u$, или $y = ux$. Тогда $y' = u + x\dfrac{du}{dx}$, что после подстановки в исходное уравнение дает уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{du}{dx} = \cos u.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{dx}{x}$$

и интегрируем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = Cx.$$

Получаем общее решение:

$$u = 2\operatorname{arctg} Cx - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к функции y, находим:

$$y = x\left(2\,\mathrm{arctg}\,Cx - \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При делении на $\cos u$ могли быть потеряны решения $y = x\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Но для $k = 2n - 1$ они входят в общее решение (при $C = 0$). Следовательно, окончательно получаем:

$$y = x\left(2\,\mathrm{arctg}\,Cx + \frac{\pi}{2} + \pi(2n-1)\right) \quad \text{и} \quad y = x\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right); \quad n \in \mathbb{Z}. \ \triangleright$$

Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{6}$$

в случае $\dfrac{a_2}{a_1} \neq \dfrac{b_2}{b_1}$ приводятся к однородным уравнениям с помощью замены переменных

$$x = u + m, \quad y = v + n,$$

где m и n находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} a_1m + b_1n + c_1 &= 0, \\ a_2m + b_2n + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку здесь $dx = du$, $dy = dv$, то уравнение (6) преобразуется к виду (4) относительно функции $v(u)$:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1m + b_1n + c_1}{a_2u + b_2v + a_2m + b_2n + c_2}\right) = \\ = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1(v/u)}{a_2 + b_2(v/u)}\right) = \varphi\left(\frac{v}{u}\right).$$

Если в уравнении (6) $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = \lambda$ и, следовательно, $a_2x + b_2y = \lambda(a_1x + b_1y)$, то оно примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = \varphi(a_1x + b_1y).$$

Подстановкой $u(x) = a_1x + b_1y(x)$ это уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными.

Решить дифференциальные уравнения:

10.46. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$. **10.47.** $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$. **10.48.** $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$.

10.49. $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

10.50. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$. **10.51.** $y^2\,dx + x^2\,dy = xy\,dy$.

10.52. $x(y' + e^{y/x}) = y$. **10.53.** $x\,dy - y\cos\ln\dfrac{y}{x}\,dx = 0$.

10.54. $xy' = y + x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$. **10.55.** $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$.

10.56. $(x^2 + y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0$.

10.57. $3x^4y^2\,dy = (4x^6 - y^6)\,dx$.

10.58. $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0$.

10.59. $(y + 2)\,dx - (2x + y - 4)\,dy = 0$.

10.60. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$.

10.61. $(x + y - 1)^2\,dy = 2(y + 2)^2\,dx$.

10.62. $y' - \operatorname{tg}\dfrac{y - 2x}{x + 1} = \dfrac{y + 2}{x + 1}$.

10.63. $y'\ln\dfrac{y + x}{x + 3} = \dfrac{y + x}{x + 3} - \ln\dfrac{y + x}{x + 3}$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям:

10.64. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$; $y(1) = 1$.

10.65. $(\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0$; $y(1) = 1$.

10.66. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx - x\,dy = 0$; $y(1) = 0$.

5. Линейные уравнения. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется *линейным*, если оно содержит y и y' в первой степени, т. е. имеет вид

$$y' = P(x)y + Q(x). \tag{7}$$

При $Q(x) \equiv 0$ уравнение (7) принимает вид

$$y' = P(x)y$$

и называется *линейным однородным*. Оно является уравнением с разделяющимися переменными, и его общее решение имеет вид

$$y = Ce^{\int P(x)\,dx}, \tag{8}$$

где C — произвольная постоянная, а $\displaystyle\int P(x)\,dx$ — одна из первообразных функции $P(x)$.

Интегрирование *линейного неоднородного* уравнения (7) можно провести одним из следующих методов.

а) Метод вариации постоянной. Будем искать решение уравнения (7) в виде

$$y = C(x)e^{\int P(x)\,dx}, \tag{9}$$

который получается из (8), если заменить постоянную C на функцию $C(x)$. Подставляя выражение (9) в уравнение (7), получим для неизвестной функции $C(x)$ уравнение с разделяющимися переменными:

$$C'(x) = Q(x)e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Его общее решение:

$$C(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)\,dx}dx + C,$$

где C — произвольная постоянная, а $\int Q(x)e^{-\int P(x)\,dx}dx$ — одна из первообразных. Подставляя полученное выражение для $C(x)$ в формулу (9), находим общее решение уравнения (7):

$$y = e^{\int P(x)\,dx}\left(C + \int Q(x)e^{-\int P(x)\,dx}dx\right). \tag{10}$$

б) Метод подстановки. Положим $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда уравнение (7) приводится к виду

$$v\left(\frac{du}{dx} - P(x)u\right) + \left(\frac{dv}{dx}u - Q(x)\right) = 0. \tag{11}$$

Выберем функцию $u(x)$ так, чтобы первая скобка в левой части уравнения (11) обратилась в нуль. Для этого интегрируем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx} - P(x)u = 0$$

и выбираем какое-либо частное его решение $u = u_1(x)$. Подставляя функцию $u_1(x)$ вместо u в левую часть уравнения (11), получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx}u_1(x) - Q(x) = 0.$$

Находим общее решение этого уравнения $v = v(x,\, C)$. Перемножая найденные функции $u_1(x)$ и $v(x,\, C)$, получаем общее решение уравнения (7):

$$y = u_1(x)v(x,\, C).$$

Пример 8. Решить уравнение $y' = y \operatorname{ctg} x + \sin x$.
$\lhd$ Применим метод вариации постоянной. Рассмотрим сначала соответствующее однородное линейное уравнение

$$y' = y \operatorname{ctg} x.$$

Его общее решение $y = C \sin x$. Следовательно, общее решение исходного уравнения ищем в виде $y = C(x) \sin x$. Подставляем y и $y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x$ в данное уравнение:

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x = \operatorname{ctg} x \cdot C(x) \sin x + \sin x,$$

откуда $C'(x) = 1$, и тогда $C(x) = x + C$. Следовательно, общее решение уравнения есть $y = (x + C) \sin x$. $\rhd$

Пример 9. Решить уравнение $y' = \dfrac{y^2}{2xy + 3}$.
$\lhd$ Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x}{y} + \frac{3}{y^2}$$

и заметим, что оно линейно относительно x и $\dfrac{dx}{dy}$. Решим его методом подстановки.

Положим $x = uv$ и приведем уравнение к виду

$$v\left(\frac{du}{dy} - \frac{2u}{y}\right) + \left(\frac{dv}{dy}u - \frac{3}{y^2}\right) = 0. \qquad (12)$$

Найдем функцию $u_1(y)$, решая уравнение

$$\frac{du}{dy} - \frac{2u}{y} = 0$$

и выбирая из его общего решения $u = y^2 + C$ одно частное решение, например, $u_1(y) = y^2$. Подставляя $u_1(y)$ в уравнение (12), получим:

$$\frac{dv}{dy}y^2 - \frac{3}{y^2} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dy} = \frac{3}{y^4}.$$

Общее решение этого уравнения:

$$v(y, C) = C - \frac{1}{y^3}.$$

Перемножая $u_1(y)$ и $v(y, C)$, получаем общее решение данного уравнения:

$$x = Cy^2 - \frac{1}{y}. \ \rhd$$

Решить дифференциальные уравнения:

10.67. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

10.68. $y' = \dfrac{3y}{x} + x$. **10.69.** $y' + y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$.

10.70. $(1 + x^2)y' = 2xy + (1 + x^2)^2$.

10.71. $y' + 2y = e^{3x}$. **10.72.** $y' + \dfrac{y}{x} = 2 \ln x + 1$.

10.73. $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2$. **10.74*.** $y' = \dfrac{y}{x + y^3}$.

10.75. $(1 + y^2)\,dx = (\operatorname{arctg} y - x)\,dy$.

10.76. $xy' = y + x^2 \cos x$. **10.77.** $xy' = e^x + xy$.

10.78. $xy' + x^2 + xy = y$. **10.79.** $y + y' \ln^2 y = (x + 2 \ln y)y'$.

10.80. $y - y' = y^2 + xy'$. **10.81.** $(x + 2y^3)y' = y$.

10.82*. $y' + \operatorname{tg} y = \dfrac{x}{\cos y}$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

10.83. $y' + y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$; $y(0) = 0$.

10.84. $y' = 2y + e^x - x$; $y(0) = \dfrac{1}{4}$.

10.85. $y' = \dfrac{y}{2y \ln y + y - x}$; $y(1) = 1$.

6. Уравнение Бернулли. *Уравнением Бернулли* называется дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$y' = P(x)y + Q(x)y^m, \tag{13}$$

где $m \neq 0$, $m \neq 1$ (при $m = 0$ уравнение (13) является линейным, а при $m = 1$ — уравнением с разделяющимися переменными).

Так же как и линейное, уравнение Бернулли можно проинтегрировать с помощью подстановки $y = uv$ или свести к линейному уравнению с помощью подстановки $z = y^{1-m}$. Следует учесть, что при $m > 1$ может быть потеряно решение $y = 0$.

Пример 10. Решить уравнение

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}.$$

◁ Полагая $y = uv$, приводим уравнение к виду

$$v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) + \left(\frac{dv}{dx}u - \frac{x^2}{uv}\right) = 0. \tag{14}$$

Из общего решения $u = Cx$ уравнения

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$$

выбираем частное решение, например, $u_1 = x$.

Подставляя u_1 в уравнение (14), получаем новое уравнение $\frac{dv}{dx}x - \frac{x^2}{xv} = 0$, или $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$. Его общий интеграл $v^2 = 2x + C$, откуда $v = \pm\sqrt{2x + C}$.

Перемножая u_1 и v, получаем, что все решения исходного уравнения определяются формулой $y = \pm x\sqrt{2x + C}$. ▷

Пример 11. Решить уравнение

$$y' = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2y}.$$

◁ Это уравнение Бернулли с $m = -1$. Поэтому полагаем $z = y^2$ и приводим уравнение к виду

$$z' = \frac{z}{x} - 1.$$

Это уравнение является линейным. Решая однородное уравнение $z' = z/x$, находим $z = Cx$. Отсюда методом вариации постоянной, т. е. полагая $z = xC(x)$, получаем общее решение линейного уравнения в виде

$$z = x \ln \frac{C}{x},$$

или, окончательно,

$$y^2 = x \ln \frac{C}{x}. \ ▷$$

Решить дифференциальные уравнения:

10.86. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$. **10.87.** $dy = (y^2e^x - y)\,dx$.

10.88. $y' = y(y^3 \cos x + \operatorname{tg} x)$. **10.89.** $y' = y \operatorname{ctg} x + \dfrac{y^3}{\sin x}$.

10.90*. $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + \sin 2y}$. **10.91.** $y' = \dfrac{x(x^2 + y^2 - 1)}{2y(x^2 - 1)}$.

10.92. $xy' + y = 2x^2 y \ln y \cdot y'$. **10.93.** $y'x^3 \sin y + 2y = xy'$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

10.94. $3dy = -(1 + 3y^3)y \sin x\, dx$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

10.95. $y\,dx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right)dy = 0;\;\; y\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$

7. Уравнения в полных дифференциалах. Дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$P(x,\, y)\,dx + Q(x,\, y)\,dy = 0 \tag{15}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,\, y)$, т. е.

$$P(x,\, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q(x,\, y) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Для того чтобы уравнение (15) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{16}$$

Если уравнение (15) есть уравнение в полных дифференциалах, то оно может быть записано в виде

$$dU(x,\, y) = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения:

$$U(x,\, y) = C,$$

где C — произвольная постоянная.

Функция $U(x,\, y)$ может быть найдена следующим образом. Интегрируя равенство $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,\, y)$ по x при фиксированном y и замечая, что произвольная постоянная в этом случае может зависеть от y, имеем

$$U(x,\, y) = \int P(x,\, y)\,dx + \varphi(y). \tag{17}$$

Затем из равенства

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,\, y)\,dx + \varphi'(y) = Q(x,\, y)$$

находим функцию $\varphi(y)$, подставив которую в (17), получим функцию $U(x,\, y)$.

Очевидно, что искомая функция $U(x,\, y)$ определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Для записи общего интеграла исходного уравнения достаточно выбрать одну из функций получаемого семейства.

Другой метод отыскания функции $U(x, y)$ состоит в вычислении криволинейного интеграла 2-го рода:

$$U(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx,$$

где точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ и путь интегрирования лежат в области непрерывности функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частных производных, причем $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая фиксированная точка.

Пример 12. Решить уравнение

$$\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0,$$

предварительно убедившись, что это есть уравнение в полных дифференциалах.

◁ Проверим условие (16):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^3 + \ln x) = \frac{1}{x}.$$

Условие (16) выполнено, следовательно, заданное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Найдем функцию $U(x, y)$.

Первый способ. Интегрируя по x при постоянном y равенство

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) = \frac{y}{x},$$

получим

$$U(x, y) = \int \frac{y}{x}\,dx + \varphi(y) = y \ln x + \varphi(y). \tag{18}$$

Заметим, что при вычислении первообразной мы здесь пишем $\ln x$, а не $\ln |x|$, так как исходное уравнение содержит $\ln x$ и, следовательно, имеет смысл лишь при $x > 0$.

Подставляя (18) в равенство

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) = y^3 + \ln x,$$

имеем

$$\ln x + \varphi'(y) = y^3 + \ln x,$$

откуда

$$\varphi(y) = \frac{1}{4}y^4 + C_1. \tag{19}$$

Положив, например, $C_1 = 0$, находим из (18) и (19)

$$U(x, y) = y \ln x + \frac{1}{4}y^4.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$y \ln x + \frac{1}{4}y^4 = C.$$

Второй способ:

$$U(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy.$$

Положим, например, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Тогда $P(x, y_0) = 0$ и

$$U(x, y) = \int\limits_0^y (y^3 + \ln x)\,dy = \frac{1}{4}y^4 + y \ln x. \ \triangleright$$

Решить дифференциальные уравнения, предварительно убедившись, что они являются уравнениями в полных дифференциалах:

10.96. $(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0.$

10.97. $(10xy - 8y + 1)\,dx + (5x^2 - 8x + 3)\,dy = 0.$

10.98. $(3x^2 + 6xy - 2y^2)\,dx + (3x^2 - 4xy - 3y^2)\,dy = 0.$

10.99. $\left(y + \dfrac{2}{x^2}\right)dx + \left(x - \dfrac{3}{y^2}\right)dy = 0.$

10.100. $\dfrac{3x^2 + y}{y^2}\,dx - \dfrac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3}\,dy = 0.$

10.101. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + y\right)dx + \left(x + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)dy = 0.$

10.102. $(2x - ye^{-x})\,dx + e^{-x}\,dy = 0.$

10.103. $(2x + e^{x/y})\,dx + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)e^{x/y}\,dy = 0.$

10.104. $2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)\,dy = 0.$

10.105. $\left(\sin y - y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y + \cos x - \dfrac{1}{y}\right)dy = 0.$

8. Теорема о существовании и единственности решения. Особые решения. *Задачей Коши* для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ называется задача об отыскании частного решения этого уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. *Если в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D плоскости Oxy и имеет в этой области ограниченную частную производную $f'_y(x, y)$, то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ в некотором интервале $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$ существует и притом единственное решение $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.*

Геометрически это означает, что через каждую точку M области D проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$.

Точки области D, в которых нарушается единственность решения задачи Коши, называются *особыми точками* дифференциального уравнения.

Решение (интегральная кривая) уравнения $y' = f(x, y)$, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением* (*особой интегральной кривой*) этого уравнения. Особое решение не может быть получено из общего ни при каких значениях C (включая и $C = \pm\infty$).

Огибающая семейства интегральных кривых, определяемых общим решением $y = \varphi(x, C)$ или общим интегралом $\Phi(x, y, C) = 0$, является особой интегральной кривой. Она находится путем исключения, если это возможно, параметра C из системы двух уравнений

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C), \\ 0 = \varphi'_C(x, C) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0. \end{cases}$$

Найденную таким путем функцию следует подставить в данное дифференциальное уравнение и убедиться, что она является его решением.

Пример 13. Найти область, в которой уравнение

$$y' = x\sqrt{1 - y^2}$$

имеет единственное решение.

◁ Здесь $f(x, y) = x\sqrt{1 - y^2}$ — функция, непрерывная при $|y| \leqslant 1$; частная производная $f'_y(x, y) = -\dfrac{xy}{\sqrt{1 - y^2}}$ ограничена при $|x| \leqslant M$ и $|y| \leqslant a < 1$. Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение в любом прямоугольнике $D = \{(x, y)\,|\,|x| \leqslant M,\ |y| \leqslant a < 1\}$. ▷

Пример 14. Найти особые решения уравнения

$$y' = \sqrt{1-y^2},$$

зная его общее решение $y = \sin(x+C)$, $|x+C| \leqslant \pi/2$.
◁ Составим систему уравнений

$$\begin{aligned} y &= \sin(x+C), \\ 0 &= \cos(x+C), \end{aligned} \qquad |x+C| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Исключая C, найдем две функции $y = \pm 1$, которые, очевидно, являются решениями данного уравнения и не получаются из общего решения ни при каких значениях C. Следовательно, $y = \pm 1$ — особые решения. ▷

Найти области существования и единственности решения для дифференциальных уравнений:

10.106. $y' = x^2 - y^2$. **10.107.** $y' = \dfrac{y}{y-x}$.

10.108. $y' = 1 + \operatorname{tg} y$. **10.109.** $y' = x^2 + \sqrt{x-y^2}$.

Найти особые решения следующих дифференциальных уравнений, зная общие решения (там, где это указано).

10.110. $y' = \dfrac{2\sqrt{y}}{x}$.

10.111. $y' = 4x\sqrt{y-1}$; $y = (x^2+C)^2 + 1$.

10.112. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$; $(y-C)^2 = 4Cx$.

10.113. $y = y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{2}$; $y = \dfrac{x^2}{2} + Cx + C^2$.

9. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Пусть дифференциальное уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешимо либо относительно искомой функции, т. е. имеет вид

$$y = f(x, y'), \tag{20}$$

либо относительно аргумента, т. е. записывается в виде

$$x = f(y, y'). \tag{21}$$

Тогда оно интегрируется путем введения параметра $p = y'$. Уравнения (20) и (21) переходят в алгебраические уравнения, дифференцируя которые соответственно по x или по y, получим системы уравнений

$$\begin{cases} y = f(x, p), \\ p = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial p} \cdot \dfrac{dp}{dx} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = f(y, p), \\ \dfrac{1}{p} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial p} \cdot \dfrac{dp}{dy}. \end{cases}$$

Из этих систем находится соответственно общее решение уравнения (20) или (21) в явном или параметрическом виде.

Пример 15. Решить уравнение

$$y = y'^2 + xy' - x.$$

$\lhd$ Введем параметр $p = y'$. Тогда

$$y = p^2 + x(p-1). \tag{22}$$

Дифференцируя это равенство по x, получим

$$p = 2p\frac{dp}{dx} + p - 1 + x\frac{dp}{dx},$$

или

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2p+x}.$$

Запишем последнее уравнение в форме

$$\frac{dx}{dp} = x + 2p.$$

Это линейное уравнение, его общее решение:

$$x = Ce^p - 2(p+1). \tag{23}$$

Подставляя выражение (23) в формулу (22), получим

$$y = Ce^p(p-1) - p^2 + 2. \tag{24}$$

Система соотношений (23) и (24) определяет общее решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$x = Ce^p - 2(p+1), \quad y = Ce^p(p-1) - p^2 + 2. \ \rhd$$

Пример 16. Решить уравнение

$$x = y'^2 + \frac{y}{y'}.$$

$\lhd$ Полагая $p = y'$, имеем

$$x = p^2 + \frac{y}{p}.$$

Дифференцируем это равенство по y:

$$\frac{1}{p} = 2p\frac{dp}{dy} + \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy},$$

или

$$\frac{dp}{dy}\left(2p - \frac{y}{p^2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$p_1 = C \quad \text{и} \quad p_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}y}.$$

Подставляя поочередно оба результата в выражение для x, найдем общее решение

$$y = Cx - C^3$$

и решение

$$y = \frac{2}{3\sqrt{3}}x^{3/2},$$

которое, как легко убедиться, является особым. ▷

Решить дифференциальные уравнения:

10.114. $y = y'^2 + 4y'^3$. **10.115.** $y = y'\sqrt{1 + y'^2}$.

10.116. $y = (y' - 1)e^{y'}$. **10.117.** $y = \dfrac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2$.

10.118. $x = y'^3 - y' + 2$. **10.119.** $x = y' \cos y'$.

10.120. $x = 2y' - \ln y'$. **10.121.** $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$.

Частным случаем уравнений вида (20) является так называемое *уравнение Лагранжа*

$$y = xf(y') + \varphi(y'), \tag{25}$$

которое при $f(y') \equiv y'$ называют *уравнением Клеро*. Введением параметра $p = y'$ уравнение (25) приводится к виду

$$y = xf(p) + \varphi(p)$$

в случае общего уравнения Лагранжа и к виду

$$y = xp + \varphi(p)$$

в случае уравнения Клеро.

Уравнение Лагранжа имеет особые решения

$$y = xf(p_0) + \varphi(p_0),$$

где p_0 — любой из корней уравнения $f(p) = p$.

Уравнение Клеро имеет общее решение

$$y = Cx + \varphi(C) \tag{26}$$

и особое решение

$$x = -\varphi'(p), \quad y = -\varphi'(p)p + \varphi(p), \tag{27}$$

являющееся огибающей семейства интегральных кривых (26).

Таким образом, можно сформулировать следующее практическое правило. Заменив в уравнении Клеро символ y' символом C, мы сразу получаем общее решение (26). Дифференцируя его по C и исключая C из системы двух уравнений (общего решения и результата дифференцирования), получаем особое решение (27).

Пример 17. Решить уравнение Лагранжа

$$y = xy'^2 + y'.$$

◁ Полагая $y' = p$, найдем

$$y = xp^2 + p.$$

Дифференцируя это равенство по x, получим

$$p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx},$$

или

$$\frac{dx}{dp} = x\frac{2p}{p-p^2} + \frac{1}{p-p^2}.$$

Это линейное уравнение имеет общее решение

$$x = \frac{1}{(1-p)^2}(C + \ln|p| - p),$$

подставляя которое в формулу для y получаем общее решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$x = \frac{C + \ln|p| - p}{(1-p)^2}, \quad y = \frac{(C + \ln|p| - p)p^2}{(1-p)^2} + p.$$

Кроме того, уравнение имеет особые решения $y = 0$ и $y = x + 1$, соответствующие корням $p_1 = 0$ и $p_2 = 1$ уравнения $p^2 = p$. ▷

Пример 18. Решить уравнение

$$y = xy' - y'^4.$$

◁ Данное уравнение имеет вид (25) при $f(y') = y'$, т. е. является уравнением Клеро. Следуя практическому правилу, получаем общее решение

$$y = Cx - C^4.$$

Исключая, далее, параметр C из системы уравнений

$$\begin{aligned} y &= Cx - C^4, \\ 0 &= x - 4C^3, \end{aligned}$$

получим особое решение

$$y = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}x^{4/3}. \ ▷$$

Решить дифференциальные уравнения:

10.122. $y = x\dfrac{1+y'^2}{2y'}$. **10.123.** $y = 2xy' + \dfrac{1}{y'^2}$.

10.124. $y = xy'^2 + y'^3$. **10.125.** $y = \dfrac{1}{2}(xy' + y'\ln y')$.

10.126. $y = xy' - \dfrac{1}{y'}$. **10.127.** $y = xy' + y' + \sqrt{y'}$.

10.128. $y = xy' - e^{y'}$. **10.129.** $y = xy' + \cos y'$.

10. Смешанные задачи на дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Определить типы дифференциальных уравнений и указать в общем виде методы их решения:

10.130. $\sin x^3 = e^{\frac{y'-x^2}{y}}$. **10.131.** $\sqrt{x^2-y^2} = \dfrac{2x^2}{y-3x+xy'}$.

10.132. $1 + x + (1+x^2)(e^x - e^{2y}y') = 0$.

10.133. $2y'(1-x^2) - xy - 2xy^2 + 2x^3y^2 = 0$.

10.134. $y\,dx + (2x - y^2)\,dy = 0$.

10.135. $\left(\dfrac{x}{y} - x + y^2\right)dx + \left(2xy + y - \dfrac{x^2}{2y^2}\right)dy = 0$.

10.136. $y\,dx + (x - 2\sqrt{xy})\,dy = 0$.

10.137. $(x^2 + y^2 + 1)\,dy + xy\,dx = 0$.

10.138. $y' = \sin(y - x)$.

10.139. $x = \arccos\dfrac{y'-a^x}{y}$. **10.140.** $\sqrt{y} = \dfrac{y' - ye^{x^2\sin x}}{x^2+2x-1}$.

Решить дифференциальные уравнения:

10.141. $y' + xy = x^3$. **10.142.** $(x-y)\,dy - y\,dx = 0$.

10.143. $(x\cos 2y + 1)\,dx - x^2\sin 2y\,dy = 0$.

10.144. $y' = y\operatorname{tg} x - y^2\cos x$. **10.145.** $y' = \dfrac{1-2x}{y^2}$.

10.146. $2y\,dx + (y^2 - 6x)\,dy = 0$.

10.147. $(xye^{x/y} + y^2)\,dx = x^2e^{x/y}\,dy$.

10.148. $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0$.

10.149. $(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0$.

10.150. $xy' + y = y^2\ln x$.

10.151. $3x + y - 2 + y'(x-1) = 0$.

10.152. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$. **10.153.** $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$.

10.154. $(2x + \ln y)\,dx + \left(\dfrac{x}{y} + \sin y\right) dy = 0$.

10.155. $y = xy' - \ln y'$. **10.156.** $y' = \dfrac{1}{xy + x^2y^3}$.

10.157. $\left(x - y\sin\dfrac{y}{x}\right) dx + x\sin\dfrac{y}{x}\,dy = 0$.

10.158*. $xy' = x^2e^{-y} + 2$. **10.159.** $(2xe^y + y^4)y' = ye^y$.

10.160*. $(1 + y^2)\,dx = (\sqrt{1+y^2}\cos y - xy)\,dy$.

10.161. $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - 1\right) dx - \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$.

10.162. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\sin^2 x}$. **10.163.** $y = y'^2 + 2xy' + \dfrac{x^2}{2}$.

10.164*. $(x - 2y^3)\,dx + 3y^2(2x - y^3)\,dy = 0$.

11. Геометрические и физические задачи, приводящие к решению дифференциальных уравнений 1-го порядка. В задачах геометрии, в которых требуется найти уравнение кривой по заданному свойству ее касательной, нормали или площади криволинейной трапеции, используются

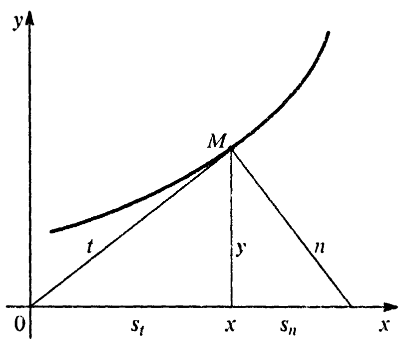


Рис. 50

геометрическое истолкование производной (угловой коэффициент касательной) и интеграла с переменным пределом (площадь криволинейной трапеции с подвижной ограничивающей ординатой), а также следующие общие формулы для определения длин отрезков касательной t, нормали n, подкасательной s_t и поднормали s_n (рис. 50):

$$t = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|, \quad n = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right|, \quad s_t = \left|\frac{y}{y'}\right|, \quad s_n = |yy'|.$$

Пример 19. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если в каждой ее точке $M(x, y)$ подкасательная s_t в k раз меньше поднормали s_n.

◁ Пусть $y = f(x)$ — уравнение искомой кривой. Используя выражения подкасательной s_t и поднормали s_n, мы сразу получаем дифференциальное уравнение

$$|yy'| = k\left|\frac{y}{y'}\right|,$$

или

$$(y')^2 = k.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $y(0) = 0$, получим искомые уравнения

$$y = \pm\sqrt{k}\cdot x$$

(две прямые). ▷

Пример 20. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 1), если для любого отрезка $[1, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, на 2 больше удвоенного произведения координат точки $M(x, y)$ кривой ($x > 0$, $y > 0$).

◁ Согласно условию задачи имеем

$$\int_1^x y(t)\,dt + 2 = 2xy(x).$$

Дифференцируя это равенство по x, получаем дифференциальное уравнение $y = 2(y + xy')$, или

$$y' = -\frac{y}{2x}.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $y(1) = 1$, найдем уравнение искомой кривой:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}.\ ▷$$

10.165. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(\sqrt{2}, 0)$, если сумма длин ее касательной и подкасательной равна произведению координат точки касания.

10.166. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 2), если ее подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

10.167. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1/2, -1)$, если длина отрезка полуоси абсцисс, отсекаемого ее касательной, равна квадрату абсциссы точки касания.

10.168. Найти уравнения кривых, у которых длина отрезка нормали постоянна и равна a.

10.169. Найти уравнения кривых, у которых поднормаль имеет постоянную длину a.

10.170. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(0, 2)$, если площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой этой кривой, в два раза больше длины соответствующей дуги.

10.171. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1, 1/2)$, если для любого отрезка $[1, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, на 2 больше отношения абсциссы x концевой точки к ординате.

10.172. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(0, 3)$, если подкасательная в любой точке равна сумме абсциссы точки касания и расстояния от начала координат до точки касания (ограничиться рассмотрением случая $\dfrac{y}{y'} > 0$).

10.173. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1, 0)$, если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого ее нормалью, на 2 больше абсциссы точки касания.

10.174. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если для любого отрезка $[a, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, равна кубу ординаты концевой точки дуги.

10.175. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с полярными координатами $r = 2$, $\varphi = 0$, если угол α между ее касательной и радиус-вектором точки касания есть постоянная величина: $\operatorname{tg}\alpha = a$.

10.176. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1, 1)$, если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого любой ее касательной, равна длине этой касательной.

10.177. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(3, 1)$, если длина отрезка, отсекаемого любой ее касательной на оси ординат, равна поднормали.

10.178. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если середина отрезка ее нормали от любой точки кривой до оси Ox лежит на параболе $2y^2 = x$.

10.179. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1, 0)$, если площадь трапеции, образованной касательной, осями координат и ординатой точки касания, постоянна и равна $3/2$.

10.180. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(0, 1)$, если площадь треугольника, образуемого осью абсцисс, касательной и радиус-вектором точки касания, постоянна и равна 1.

10.181. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1, 2)$, если произведение абсциссы точки касания на абсциссу точки пересечения нормали с осью Ox равно удвоенному квадрату расстояния от начала координат до точки касания.

10.182. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с полярными координатами $r = \pi$, $\varphi = \pi/2$, если площадь сектора, ограниченного этой кривой, полярной осью и переменным полярным радиусом, в шесть раз меньше куба полярного радиуса.

Ортогональными траекториями для однопараметрического семейства S_1 линий $y = \Phi(x, a)$ называется другое семейство S_2 линий, которые пересекают линии первого семейства под прямым углом.

Пример 21. Найти ортогональные траектории семейства кубических парабол $y = ax^3$.

◁ Найдем дифференциальное уравнение данного семейства, исключая a из системы уравнений

$$y = ax^3,$$
$$y' = 3ax^2.$$

Получим $y' = 3y/x$. Дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий есть

$$y' = -\frac{x}{3y}.$$

Его общий интеграл

$$x^2 + 3y^2 = C^2$$

является уравнением семейства ортогональных траекторий (эллипсов). ▷

Найти ортогональные траектории данных семейств кривых (a — параметр):

10.183. $ay^2 = x^3$. **10.184.** $y = ax^2$.

10.185. $x^2 - 2y^2 = a^2$. **10.186.** $y = ae^{2x}$.

При составлении дифференциальных уравнений 1-го порядка в физических задачах часто применяется *метод дифференциалов*, по которому приближенные соотношения между малыми приращениями величин заменяются соотношениями между их дифференциалами. Такая замена не отражается на результатах, так как дело сводится к отбрасыванию бесконечно малых высших порядков. Другим методом составления дифференциальных уравнений является использование физического смысла производной как скорости протекания процесса.

Пример 22. В резервуаре первоначально содержится A кг вещества, растворенного в B литрах воды. Затем каждую минуту в резервуар поступает M литров воды и вытекает N литров раствора ($M \geqslant N$), причем однородность раствора достигается путем перемешивания. Найти массу вещества в резервуаре через T минут после начала процесса.

◁ Обозначим через $x(t)$ массу вещества в резервуаре в момент времени t и через $x + \Delta x$ — в момент времени $t + \Delta t$ (время измеряется в минутах, момент времени $t = 0$ соответствует началу процесса). Заметим, что $\Delta x < 0$ при $\Delta t > 0$ (т. е. раствор «обедняется»).

Пусть $V(t)$ — объем смеси в момент t:

$$V(t) = B + Mt - Nt.$$

Концентрация вещества в момент времени t равняется, очевидно, x/V. За бесконечно малый отрезок времени $[t,\, t + \Delta t]$ масса вещества изменяется на бесконечно малую величину Δx, для которой справедливо приближенное равенство

$$\Delta x \approx -\frac{x}{V} N \Delta t = -\frac{Nx}{B + (M - N)t} \Delta t.$$

Заменяя приращения Δx и Δt дифференциалами dx и dt, получаем дифференциальное уравнение:

$$dx = -\frac{Nx}{B + (M - N)t}\, dt.$$

Интегрируя то уравнение с разделяющимися переменными и считая $M > N$, найдем общее решение:

$$x(t) = \frac{C}{(B + (M - N)t)^{N/(M-N)}}.$$

Используя начальное условие $x = A$ при $t = 0$, найдем частное решение:

$$x(t) = A \left(\frac{B}{B + (M - N)t} \right)^{N/(M-N)}.$$

Полагая $t = T$, получим ответ:

$$x(T) = A \left(\frac{B}{B + (M - N)T} \right)^{N/(M-N)}.$$

Случай $M = N$ требует отдельного рассмотрения (см. задачу 10.195). $\triangleright$

10.187. Скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей его среды (закон Ньютона). Найти зависимость температуры T от времени t, если тело, нагретое до T_0 градусов, внесено в помещение, температура которого постоянна и равна a градусам.

10.188. Через сколько времени температура тела, нагретого до 100 °C, понизится до 25 °C, если температура помещения равна 20 °C и за первые 10 мин тело охладилось до 60 °C?

10.189*. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начавший вращаться со скоростью 5 об/с, по истечении двух минут вращается со скоростью 3 об/с. Через сколько времени он будет иметь угловую скорость 1 об/с?

10.190. Скорость распада радия пропорциональна наличному его количеству. В течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

10.191*. Скорость истечения воды из сосуда через малое отверстие определяется формулой $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня воды над отверстием, g — ускорение свободного падения (принять $g = 10\,\text{м/с}^2$). За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака диаметром $2R = 1$ м и высотой $H = 1{,}5$ м через отверстие в дне диаметром $2r = 0{,}05$ м?

10.192*. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Зная, что при прохождении слоя воды толщиной 2 м поглощается 1/3 первоначального светового потока, найти, какая часть его дойдет до глубины 12 м.

10.193. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с, скорость ее через 4 секунды 1 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 см/с? Какой путь пройдет лодка до остановки?

10.194*. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/с, пробивает стену толщиной $h = 20$ см и вылетает, имея скорость 100 м/с. Полагая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время прохождения пули через стену.

10.195. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак вливается вода со скоростью 5 л/мин, и смесь вытекает из него с той же скоростью. Однородность раствора достигается путем перемешивания. Сколько соли останется в баке через час?

10.196. Некоторое вещество преобразуется в другое вещество со скоростью, пропорциональной массе непреобразованного вещества. Если масса первого есть 31,4 г по истечении одного часа и 9,7 г по истечении трех часов, то определить: а) массу вещества в начале процесса; б) через сколько времени после начала процесса останется лишь 1% первоначальной массы исходного вещества?

10.197*. В помещении цеха вместимостью 10 800 м^3 воздух содержит 0,12% углекислоты. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий 0,04% углекислоты, со скоростью 1500 м^3/мин. Предполагая, что углекислота распределяется по помещению равномерно в каждый момент времени, найти объемную долю углекислоты через 10 мин после начала работы вентиляторов.

10.198. Сила тока i в цепи с сопротивлением R, индуктивностью L и напряжением u удовлетворяет уравнению

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u.$$

Найти силу тока i в момент времени t, если $u = E\sin\omega t$ и $i = 0$ при $t = 0$ (L, R, E, ω — постоянные).

§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Основные понятия. Теорема Коши. Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Задачей Коши для дифференциального уравнения (2) называется задача отыскания решения $y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{3}$$

Общим решением уравнения (1) или (2) называется такая функция $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, которая при любых допустимых значениях параметров $C_1, \ldots, C_n$ является решением этого дифференциального уравнения и для любой задачи Коши с условиями (3) найдутся постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, определяемые из системы уравнений:

$$\begin{gathered}
y_0 = \varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\
y_0' = \varphi'(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n).
\end{gathered}$$

Уравнение

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{4}$$

определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. *Если дифференциальное уравнение* (2) *таково, что функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *в некоторой области* D *изменения своих аргументов непрерывна и имеет непрерывные частные производные* $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, $\ldots$, $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, *то для любой точки*

$(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_n^{(n-1)}) \in D$ *существует такой интервал* $x_0 - h < x < x_0 + h$, *на котором существует и притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям* (3).

Пример 1. Показать, что функция $y = C_1 e^{C_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, является решением дифференциального уравнения $yy'' = y'^2$.

◁ Имеем:

$$y' = C_1 C_2 e^{C_2 x}, \quad y'' = C_1 C_2^2 e^{C_2 x}.$$

Подставив выражения y, y' и y'' в данное уравнение, получим тождество

$$C_1 e^{C_2 x} \cdot C_1 C_2^2 e^{C_2 x} \equiv (C_1 C_2 e^{C_2 x})^2.$$

Следовательно, функция $y = C_1 e^{C_2 x}$ есть решение данного уравнения. ▷

Пример 2. Найти область существования и единственности решения уравнения

$$y'' = \frac{y\sqrt{y'}}{x}.$$

◁ Функция $f(x, y, y') = \dfrac{y\sqrt{y'}}{x}$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\sqrt{y'}}{x}$ непрерывны при $x \neq 0$, $y' \geqslant 0$; частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = \dfrac{y}{2x\sqrt{y'}}$ непрерывна при $x \neq 0$, $y' > 0$.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение при $x \neq 0$, $y' > 0$. ▷

Найти область существования и единственности решения уравнений:

10.199. $y'' = x + \sqrt{x^2 - y'}$. **10.200.** $y'' = y' \ln y'$.

Показать, что данные выражения при любых действительных значениях входящих в них параметров определяют решения соответствующих дифференциальных уравнений:

10.201. $y = x \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt + \cos x + C_1 x + C_2$; $xy'' = \sin x$.

10.202. $y = x^2 \ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$; $xy''' = 2$.

10.203. $e^y \sin^2 (C_1 x + C_2) = 2C_1^2$; $y'' = e^y$.

10.204. $C_1 y = \sin (C_1 x + C_2)$; $yy'' + 1 = y'^2$.

Показать, что данные функции являются частными решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

10.205. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2}$; $1 + y'^2 = 2yy''$.

10.206. $y = e^x$; $y^2 + y'^2 = 2yy''$.

Путем исключения параметров вывести дифференциальные уравнения семейств следующих линий:

10.207. Прямых на плоскости, не параллельных оси Oy.

10.208. Окружностей постоянного радиуса R.

10.209. Синусоид $y = A\sin(x+\alpha)$, где A и α — параметры.

10.210. Парабол с осью, параллельной оси Oy.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка. Ниже приводятся некоторые виды дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка.

а) Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$. Общее решение получается путем n-кратного интегрирования $y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx + P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x) = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$, или по формуле

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt + P_{n-1}(x).$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ и его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

◁ Интегрируя первый раз, получаем $y' = \operatorname{tg} x + C_1$. Повторное интегрирование дает $y = -\ln|\cos x| + C_1x + C_2$. Это и есть общее решение. Подставив теперь в полученное общее решение и в выражение для первой производной $x = \dfrac{\pi}{4}$ и соответственно $y = \dfrac{\ln 2}{2}$ и $y' = 1$, получим систему двух уравнений с неизвестными C_1 и C_2. Решив эту систему, найдем значения параметров $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, соответствующие искомому частному решению, которое, следовательно, имеет вид $y = -\ln|\cos x|$. ▷

б) Уравнения вида $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, т.е. уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно. С помощью замены $y^{(k)} = p(x)$ порядок уравнения понижается на k единиц: $F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0$. Предположим, что для полученного уравнения мы можем найти общее решение $p(x) = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$. Тогда искомая функция $y(x)$ получается путем k-кратного интегрирования функции $\varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$.

Пример 4. Найти частное решение уравнения $x^4y''' + 2x^3y'' = 1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = \dfrac{1}{2}$, $y''(1) = -1$.

◁ Данное уравнение не содержит y и y'. Положим $y'' = p$, тогда $y''' = \dfrac{dp}{dx}$, и уравнение принимает вид $x^4\dfrac{dp}{dx} + 2x^3p = 1$, или $\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{2}{x}p = \dfrac{1}{x^4}$. Это линейное уравнение первого порядка. Его общее решение $p = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{C_1}{x^2}$. Используя начальное условие $y''(1) = p(1) = -1$, получаем $C_1 = 0$. Следовательно, $y'' = -\dfrac{1}{x^3}$, откуда $y' = \dfrac{1}{2x^2} + C_2$. Начальное условие $y'(1) = 1/2$ позволяет определить $C_2 = 0$. Интегрируя еще раз, получаем $y = -\dfrac{1}{2x} + C_3$, а из условия $y(1) = 1/2$ следует, что $C_3 = 1$. Итак, искомое частное решение есть $y = 1 - \dfrac{1}{2x}$ (равносторонняя гипербола). $\triangleright$

в) Уравнения вида $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, не содержащие явно независимой переменной. Подстановкой $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, $y''' = p\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\dfrac{d^2p}{dy^2}$, и т. д. порядок уравнения понижается на единицу.

Пример 5. Найти общий интеграл уравнения $y'y''' - 3y''^2 = 0$.

$\triangleleft$ Положим $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, $y''' = p\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\dfrac{d^2p}{dy^2}$. Тогда уравнение преобразуется к виду

$$p\left(p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}\right) - 3p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0.$$

Приведя подобные члены и сократив на p^2 (при этом мы теряем решение $p = 0$, или $y = C$), получим

$$p\frac{d^2p}{dy^2} - 2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0.$$

Положив здесь $\dfrac{dp}{dy} = z$, $\dfrac{d^2p}{dy^2} = z\dfrac{dz}{dp}$, придем к уравнению

$$pz\frac{dz}{dp} - 2z^2 = 0.$$

Сократив на z (при этом возможна также потеря решения $z = \dfrac{dp}{dy} = 0$, т. е. $p = C_1$ и $y = C_1x + C_2$, в состав которого при $C_1 = 0$ входит и прежнее потерянное решение), получим $\dfrac{dz}{z} - \dfrac{2dp}{p} = 0$, откуда $\ln|z| - \ln p^2 = \ln|C_1|$, или $z = \dfrac{dp}{dy} = C_1p^2$. Интегрируя последнее уравнение, находим

$$-\frac{1}{p} = C_1y + C_2, \quad \text{или} \quad -\frac{dx}{dy} = C_1y + C_2.$$

Окончательно получим общий интеграл $x = \overline{C}_1 y^2 + \overline{C}_2 y + C_3$, где $\overline{C}_1 = -\dfrac{C_1}{2}$, $\overline{C}_2 = -C_2$, т.е. семейство парабол. Заметим, что последняя запись содержит в себе и решения $y = C_1 x + C_2$ (только при $C_1 \neq 0$). $\triangleright$

г) Уравнения вида $\dfrac{d}{dx}G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$, т.е. такие уравнения, в которых левая часть может быть представлена как полная производная по x от некоторой функции $G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Интегрируя по x, получим новое уравнение, порядок которого на единицу ниже порядка исходного уравнения.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3.$$

$\triangleleft$ Левая часть уравнения есть полная производная по x от функции $(1 + x^2)y'$, а правая — от функции $\dfrac{x^4}{4}$, т.е. уравнение можно переписать так: $\left((1 + x^2)y'\right)' = \left(\dfrac{x^4}{4}\right)'$. Отсюда интегрированием получаем $(1 + x^2)y' = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{C_1}{4}$, или $dy = \dfrac{x^4 + C_1}{4(1 + x^2)}\,dx$. Следовательно,

$$y = \int \frac{x^4 + C_1}{4(1 + x^2)}\,dx = \int \left(\frac{1}{4}(x^2 - 1) + \frac{C_1 + 1}{4}\frac{1}{x^2 + 1}\right) dx$$

и, окончательно,

$$y = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x + \overline{C}_1 \operatorname{arctg} x + C_2,$$

где $\overline{C}_1 = \dfrac{C_1 + 1}{4}$. Это и есть общее решение. $\triangleright$

д) Уравнение $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, однородное относительно функции и ее производных, т.е. такое, что

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), \quad t \neq 0.$$

Подстановкой $y' = yz$ порядок уравнения понижается на единицу.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$.
$\triangleleft$ Положим $y' = yz$. Тогда $y'' = y(z^2 + z')$ и уравнение принимает вид

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 - y^2z = 0.$$

Сокращая на y^2 (при этом получается решение $y = 0$), находим $xz' - z = 0$, или $\dfrac{dz}{z} - \dfrac{dx}{x} = 0$, откуда $z = C_1 x$. Так как $z = \dfrac{y'}{y}$, то приходим к уравнению $y' = C_1 xy$, или $\dfrac{dy}{y} = C_1 x\,dx$, откуда $\ln|y| = \dfrac{C_1 x^2}{2} + \ln|C_2|$, или $y = C_2 e^{\overline{C}_1 x^2}$ (где $\overline{C}_1 = C_1/2$) — это и есть общее решение. Заметим, что при $C_2 = 0$ в этой записи содержится и решение $y = 0$, которое было нами потеряно при сокращении на y^2. $\triangleright$

В некоторых случаях найти решение в виде явной или неявной функции затруднительно, однако удается получить решение в параметрической форме.

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y''(1 + 2\ln y') = 1$.

$\triangleleft$ Положим $y' = p$, $y'' = \dfrac{dp}{dx}$. Уравнение примет вид $\dfrac{dp}{dx}(1 + 2\ln p) = 1$, или $dx = (1 + 2\ln p)\,dp$, откуда $x = -p + 2p\ln p + C_1$. Так как $dy = p\,dx$, то находим $dy = p(1 + 2\ln p)\,dp$, откуда $y = p^2 \ln p + C_2$. Общее решение получаем в параметрическом виде:

$$x = p(-1 + 2\ln p) + C_1, \quad y = p^2 \ln p + C_2. \ \triangleright$$

Решить дифференциальные уравнения, используя методы понижения порядка:

10.211. $y'' = \dfrac{1}{1 + x^2}$. **10.212.** $y'' = x + \sin x$.

10.213. $y^{\mathrm{IV}} = \dfrac{1}{x}$. **10.214.** $xy''' = 2x + 3$.

10.215. $x^2 y'' = y'^2$. **10.216.** $y'' - 2yy' = 0$.

10.217. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$. **10.218.** $xy'' - y' = e^x x^2$.

10.219. $2yy'' = 1 + y'^2$. **10.220.** $yy'' + y'^3 = y'^2$.

10.221. $y'' + 2xy'^2 = 0$. **10.222.** $xy'' - y' - x\sin\dfrac{y'}{x} = 0$.

10.223. $xy'' = y' \ln\dfrac{y'}{x}$. **10.224.** $x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$.

10.225. $(1 - x^2)y'' + xy' - 2 = 0$. **10.226.** $(1 + e^x)y'' + y' = 0$.

10.227. $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$. **10.228.** $x^2 y''' = y''^2$.

10.229. $y''' = y''^2$. **10.230.** $(2y + y')y'' = y'^2$.

10.231. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$. **10.232.** $y^3 y'' + 1 = 0$.

10.233. $yy'' + y - y'^2 = 0$. **10.234.** $yy'' - 2yy' \ln y - y'^2 = 0$.

10.235. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$. **10.236.** $(y - 1)y'' = 2y'^2$.

10.237. $xy''' + y'' - x - 1 = 0$. **10.238.** $yy'' + y'^2 = x$.

10.239. $y'' = \dfrac{y - xy'}{x^2}$. **10.240.** $\dfrac{y''^2 - y'y'''}{y'^2} = \dfrac{1}{x^2}$.

10.241*. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

10.242. $xy'(yy'' - y'^2) - yy'^2 = x^4y^3$.

10.243. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$. **10.244.** $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

10.245. $y'' = xe^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

10.246. $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2},\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 2$.

10.247. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'},\ y(2) = 0,\ y'(2) = 4$.

10.248. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$.

10.249. $y'' = e^{2y},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

10.250. $y''\cos y + y'^2\sin y - y' = 0,\ y(-1) = \dfrac{\pi}{6},\ y'(-1) = 2$.

10.251. $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{2yy'}{1 + y^2},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

10.252. $yy'' - y'^2 = y^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

10.253. $yy'' = 2xy'^2,\ y(2) = 2,\ y'(2) = 0{,}5$.

10.254. $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$.

10.255. Найти интегральную кривую уравнения $yy'y'' = y'^3 + y''^2$, касающуюся в начале координат прямой $x + y = 0$.

10.256. Найти интегральную кривую уравнения $yy''+y'^2-1 = 0$, проходящую через точку $M_0(0,\ 1)$ и касающуюся в этой точке прямой $x + y = 1$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений в параметрической форме:

10.257. $(x + 2y')y'' = 1$. **10.258.** $y''^2 - 2y'y'' + 3 = 0$.

10.259. $(2 + y')e^{y'}y'' = 1$. **10.260.** $(3y - 2y')y'' - y'^2 = 0$.

10.261. Найти уравнение кривой, касающейся оси абсцисс в начале координат, если ее кривизна в любой точке равна $\cos x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$.

10.262. Найти уравнения кривых, у которых радиус кривизны в любой точке равен длине отрезка нормали, заключенного между этой точкой и осью абсцисс, если кривая:

а) вогнута вверх; б) вогнута вниз.

10.263*. Найти уравнения кривых, у которых радиус кривизны в любой точке вдвое больше длины отрезка нормали, заключенного между этой точкой и осью абсцисс, если известно, что кривая:

а) вогнута вверх; б) вогнута вниз.

10.264. Найти форму гибкой однородной нерастяжимой нити с закрепленными концами, находящуюся в равновесии под действием силы тяжести, если линейная плотность нити равна q (горизонтальная проекция силы натяжения нити $H = \text{const}$). Расположить нить так, чтобы вершина кривой совпадала с точкой $(a,\ 0)$, где $a = H/qg$.

10.265. Гибкая тяжелая однородная нерастяжимая нить в положении равновесия подвергается натяжению, пропорциональному переменной площади ее поперечного сечения. Найти форму нити, если линейная плотность нити равна q (горизонтальная проекция силы натяжения нити $H = \text{const}$). Расположить нить так, чтобы кривая проходила через начало координат и имела в ней горизонтальную касательную.

10.266. Тело массы m движется прямолинейно под действием постоянной силы F. Найти скорость движения тела и пройденный им путь как функции времени, если в начальный момент они оба равны нулю, а сопротивление среды пропорционально квадрату скорости.

10.267*. Мяч массы 400 г падает с высоты 16,7 м без начальной скорости. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости мяча и равно 0,0048 Н при скорости 1 м/с. Вычислить время падения и скорость мяча в конце падения. Принять $g = 10\,\text{м/с}^2$.

10.268. Тело массы m поднимается вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Полагая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости тела (коэффициент пропорциональности $k > 0$), найти высоту подъема тела и скорость, с которой оно вернется в исходное положение, а также время подъема и спуска тела.

10.269*. Мяч массы 400 г брошен вверх со скоростью 20 м/с. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема, если сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости мяча (коэффициент пропорциональности $k > 0$), причем оно равно 0,0048 Н при скорости 1 м/с. Принять $g = 10\,\text{м/с}^2$.

10.270. Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m под действием отталкивающей силы, обратно пропорциональной кубу расстояния от точки до неподвижного центра (коэффициент пропорциональности $k > 0$). В начальный момент точка находится в покое и отстоит от центра на расстояние x_0.

10.271. Материальная точка массы m движется прямолинейно к неподвижному центру, притягивающему ее с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния от центра (коэффициент пропорциональности $k > 0$). Найти закон движения, если оно начинается с состояния покоя, когда точка отстоит от центра на расстояние x_0. Определить время, по истечении которого точка достигнет центра.

10.272. Ракета движется вертикально вверх под действием силы отдачи от истечения газов. Масса ракеты изменяется в зависимости от времени по закону $m = m_0\varphi(t)$, где $m_0 = \mathrm{const}$ (закон сгорания топлива). Относительная скорость истечения газов постоянна и равна u_0. Начальная скорость ракеты у поверхности Земли равна нулю. Найти высоту подъема ракеты как функцию времени, если сопротивление воздуха не учитывается. Рассмотреть также частный случай, когда $m = m_0(1 - \alpha t)$, и вычислить для этого случая, на какую высоту поднимается ракета через 10 с, 30 с и 50 с при $u_0 = 2000$ м/с и $\alpha = 0{,}01\ \text{с}^{-1}$. Положить $g = 9{,}8$ м/с^2.

10.273. Определить, через сколько времени упадет на Землю тело, притягиваемое Землей по закону Ньютона (с ускорением, обратно пропорциональным квадрату расстояния между ними), если в начальный момент скорость тела равна нулю, а расстояние его от центра Земли равно H. Сопротивлением атмосферы пренебречь. Ускорение свободного падения на поверхности Земли постоянно и равно g.

10.274*. Тело, находящееся от центра Земли на расстоянии $x_{\text{л}} = 60{,}27\, R_{\text{з}}$ (что соответствует расстоянию от Луны до Земли), падает на Землю из состояния покоя под действием силы тяжести с ускорением, обратно пропорциональным квадрату его расстояния от центра Земли. Пренебрегая сопротивлением атмосферы, определить, через сколько времени оно упадет на Землю. Принять $R_{\text{з}} = 6{,}377 \cdot 10^6$ м, $g = 9{,}8$ м/с^2.

10.275. Определить скорость, с которой метеор ударяется о Землю, если он падает с неограниченно большого расстояния из состояния покоя и если при его движении к Земле ускорение принимается обратно пропорциональным квадрату его расстояния от центра Земли. Принять радиус Земли $R_{\text{з}} = 6377$ км, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

10.276. По оси Oy в положительном направлении движется с постоянной скоростью v точка A (цель). На плоскости Oxy движется точка M (преследователь) с постоянной скоростью u $(u > v)$ так, что вектор скорости всегда направлен в точку A. Найти траекторию точки M (кривую погони), если в начальный момент времени $t = 0$ точка A находилась в начале координат, а точка M — на оси Ox на расстоянии $a > 0$ от цели.

10.277*. Балка длины l, лежащая концами на двух опорах, находится под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q. Найти уравнение изогнутой оси балки и ее максимальный прогиб, выбрав начало координат в середине ненагруженной балки.

10.278*. Балка длины l, заделанная правым концом в стену, изгибается силой F, приложенной к левому концу, и равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q. Найти уравнение изогнутой оси балки и ее максимальный прогиб.

10.279*. Балка длины l с заделанным левым концом изгибается под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q. Какова должна быть приложенная к правому концу балки действующая вверх сила F, чтобы прогиб в правом конце балки был равен нулю?

3. Линейные однородные уравнения. Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (5)$$

называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением n-го порядка. Если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$ уравнения (5), то подстановка $y(x) = y_1(x)z(x)$ приводит это уравнение к линейному уравнению относительно функции $z(x)$, не содержащему явно эту функцию. Поэтому, полагая $z'(x) = u(x)$, получим линейное однородное уравнение порядка $n-1$ относительно функции $u(x)$.

Пример 9. Найти общее решение уравнения

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

убедившись в том, что функция $y_1(x) = x$ есть одно из его частных решений.

◁ Так как $y_1'(x) = 1$, а $y_1''(x) = 0$, то, подставив выражения $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_1''(x)$ в данное уравнение, убеждаемся в том, что функция $y_1(x) = x$ действительно является его частным решением. Положим $y = xz$, найдем $y' = xz' + z$, $y'' = xz'' + 2z'$ и подставим выражения y, y' и y'' в уравнение. Получим

$$(x^2+1)(xz''+2z') - 2x(xz'+z) + 2xz = 0,$$

или

$$x(x^2+1)z'' + 2z' = 0.$$

Теперь, полагая $z' = u$, $z'' = u'$, приходим к уравнению первого порядка относительно u:

$$x(x^2+1)u' + 2u = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид

$$u = C_1\frac{x^2+1}{x^2},$$

откуда, учитывая $u = z'$, получаем уравнение первого порядка относительно z:

$$dz = C_1\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим $z = C_1\left(x - \dfrac{1}{x}\right) + C_2$, а так как $y = xz$, то окончательно получаем общее решение исходного уравнения

$$y = C_1(x^2 - 1) + C_2 x. \ \triangleright$$

Изложенный выше метод обобщается на случай, когда известно k частных линейно независимых решений уравнения (5). В этом случае путем надлежащих подстановок порядок уравнения может быть понижен на k единиц.

10.280. Доказать теорему: если $y_1(x)$ есть частное решение линейного однородного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, то функция $y_2(x) = y_1(x)\displaystyle\int e^{-\int p(x)\,dx}\frac{dx}{y_1^2(x)}$ тоже является решением этого уравнения, а функция $y = y_1(x)\left(C_1 + C_2\displaystyle\int e^{-\int p(x)\,dx}\frac{dx}{y_1^2(x)}\right)$ есть его общее решение.

10.281. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 5y = 0$, если функция e^x есть его частное решение.

10.282. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$, если функция e^{-x} есть его частное решение.

10.283. Найти общее решение уравнения $xy'' + 2y' + xy = 0$, если функция $\dfrac{\sin x}{x}$ есть его частное решение.

10.284. Найти общее решение уравнения $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, если функция x есть его частное решение.

10.285. Найти общее решение уравнения $x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, если известны два его частных решения $y_1 = x$ и $y_2 = 1/x$.

Определителем Вронского (*вронскианом*) системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Если система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ линейно зависима на интервале $(a,\,b)$, то ее вронскиан равен нулю всюду на этом интервале. Если же хотя бы в одной точке $x_0 \in (a,\,b)$ имеем $W(x_0) \neq 0$, то система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ линейно независима на $(a,\,b)$.

Всякая система из n линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, … …, $y_n(x)$ уравнения (5) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения. Вронскиан фундаментальной системы решений отличен от нуля на всем интервале, где эти решения определены (см. задачу 10.304). Если известна фундаментальная система решений уравнения (5), то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Пример 10. Дана система функций x, $\cos x$, $\sin x$. Найти вронскиан системы $W(x)$ и убедиться в том, что на некотором интервале система линейно независима. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система функций является фундаментальной системой решений, и записать общее решение уравнения.

◁ Составим вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}.$$

Так как $W(x) = x$, то система линейно независима на всей оси Ox, за исключением точки $x = 0$ и, следовательно, образует фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения 3-го порядка в области $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, общим решением которого является функция $y = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. Для составления дифференциального уравнения найдем производные y', y'', y''' и исключим произвольные постоянные из выражений для y, y', y'', y'''. Имеем:

$$\begin{aligned} y\ &= C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \sin x, \\ y'\ &= C_1 \quad - C_2 \sin x + C_3 \cos x, \\ y''\ &= \qquad\ \ - C_2 \cos x - C_3 \sin x, \\ y'''\ &= \qquad\qquad C_2 \sin x - C_3 \cos x. \end{aligned}$$

Легко видеть, что, умножив первое и третье равенство на -1, а второе и четвертое на x и сложив все четыре равенства, получим

$$xy''' - y'' + xy' - y = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) можно было получить и другим путем, если учесть, что решение y искомого уравнения вместе с функциями x, $\cos x$, $\sin x$ образует линейно зависимую систему и поэтому вронскиан системы функций y, x, $\cos x$, $\sin x$ равен нулю:

$$\begin{vmatrix} y & x & \cos x & \sin x \\ y' & 1 & -\sin x & \cos x \\ y'' & 0 & -\cos x & -\sin x \\ y''' & 0 & \sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим то же самое уравнение (6) (проверить!). Деля обе части уравнения (6) на x, получаем

$$y''' - \frac{1}{x}y'' + y' - \frac{1}{x}y = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) и является искомым линейным однородным дифференциальным уравнением. ▷

Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций:

10.286. $x,\ \ln x$.

10.287. $\sin 2x,\ \sin x,\ \cos x$.

10.288. $e^{-x},\ xe^{-x}$.

10.289. $x,\ 2x,\ x^2$.

10.290. $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$.

10.291. $\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x$.

10.292. $\operatorname{ch} x,\ \operatorname{sh} x$.

10.293. $e^x,\ e^{x+1}$.

10.294. $x,\ 0,\ e^x$.

10.295. $1,\ \sin x,\ \cos 2x$.

Зная фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения, составить это уравнение:

10.296. $1,\ e^{-x}$.

10.297. $e^{2x}\cos x,\ e^{2x}\sin x$.

10.298. $x^3,\ x^4$.

10.299. $1,\ x,\ e^x$.

10.300. $1,\ \sin x,\ \cos x$.

10.301. $2x,\ x-2,\ e^x+1$.

10.302. $e^{3x},\ e^{5x}$.

10.303. $e^{2x},\ \sin x,\ \cos x$.

10.304.** Доказать, что если $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ — решения линейного однородного дифференциального уравнения порядка n с непрерывными в некотором интервале $(a,\ b)$ коэффициентами и вронскиан $W(x)$ этой системы равен нулю при $x_0 \in (a,\ b)$, то $W(x) \equiv 0$ при $a < x < b$.

10.305*. Дана система функций $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$, причем на некотором интервале вронскиан $W(x)$ этой системы отличен от нуля. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система является фундаментальной системой решений.

10.306. Зная фундаментальную систему решений e^x, $\cos x$, $\sin x$ линейного однородного дифференциального уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 3,\ y'(0) = 4,\ y''(0) = -1$.

10.307. Зная фундаментальную систему решений e^x, e^{2x}, e^{3x} линейного однородного дифференциального уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 6,\ y'(0) = 14,\ y''(0) = 36$.

4. Линейные неоднородные уравнения. Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{8}$$

в котором $f(x) \not\equiv 0$, называется *линейным неоднородным* дифференциальным уравнением n-го порядка.

Общее решение уравнения (8) определяется формулой

$$y(x) = y_0(x) + \widetilde{y}(x), \tag{9}$$

где $y_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (5), а $\widetilde{y}(x)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (8).

Пример 11. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение $xy''' - y'' + xy' - y = 2x^3$. Известно, что функция x^3 есть его частное решение. Требуется найти общее решение этого уравнения.

◁ Согласно формуле (9) общее решение неоднородного уравнения составляется как сумма общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $\widetilde{y}(x)$ неоднородного уравнения. В нашем случае $y_0(x) = C_1x + C_2\cos x + C_3\sin x$ (см. пример 10), а $\widetilde{y}(x) = x^3$. Следовательно, искомое общее решение есть $y = C_1x + C_2\cos x + {}$ $+C_3\sin x + x^3$. ▷

Если известно общее решение $y_0(x) = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ соответствующего уравнению (8) однородного уравнения (5), то для определения частного решения $\widetilde{y}(x)$ уравнения (8) можно воспользоваться методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Именно, будем искать частное решение неоднородного уравнения (8) в виде $\widetilde{y}(x) = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$, где от функций $C_1(x), \ldots$ $\ldots, C_n(x)$ дополнительно потребуем, чтобы они удовлетворяли условиям $\sum\limits_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(k)}\dfrac{dC_\nu(x)}{dx} = 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n-2$ (где $y_\nu^{(0)} = y_\nu$). Тогда для функций $C_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, получим систему уравнений

$$\begin{gathered}
y_1\frac{dC_1}{dx} + y_2\frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n\frac{dC_n}{dx} = 0, \\
y_1'\frac{dC_1}{dx} + y_2'\frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n'\frac{dC_n}{dx} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_1^{(n-1)}\frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)}\frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n^{(n-1)}\frac{dC_n}{dx} = f(x).
\end{gathered} \tag{10}$$

Определитель этой системы есть отличный от нуля вронскиан фундаментальной системы решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, поэтому система имеет единственное решение относительно $\dfrac{dC_\nu}{dx}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 12. Зная, что функции $y_1(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ и $y_2(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$

(см. задачу 10.283), найти общее решение уравнения

$$xy'' + 2y' + xy = x. \tag{11}$$

◁ Общее решение соответствующего однородного уравнения записывается в виде $y_0(x) = C_1\dfrac{\cos x}{x} + C_2\dfrac{\sin x}{x}$. Считая C_1 и C_2 функциями x, для определения частного решения уравнения (11) составим систему вида (10):

$$C_1'(x)\frac{\cos x}{x} + C_2'(x)\frac{\sin x}{x} = 0,$$
$$C_1'(x)\left(\frac{\cos x}{x}\right)' + C_2'(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = 1$$

(уравнение (11) следует привести к виду (8), т. е. разделить все его члены на x). Подставляя $C_2'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin x}C_1'(x)$ во второе уравнение, получаем $C_1'(x)\left(\dfrac{-x\sin x - \cos x}{x^2} - \dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right) = 1$. Отсюда имеем $C_1' = -x\sin x$, $C_2' = x\cos x$. После интегрирования получаем

$$C_1(x) = x\cos x - \sin x + \overline{C}_1,$$
$$C_2(x) = x\sin x + \cos x + \overline{C}_2.$$

Положив, например, $\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0$, получим частное решение уравнения (11):

$$\widetilde{y}(x) = (x\cos x - \sin x)\frac{\cos x}{x} + (x\sin x + \cos x)\frac{\sin x}{x} \equiv 1.$$

Следовательно, общее решение уравнения (11) имеет вид

$$y(x) = y_0(x) + \widetilde{y}(x) = C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x} + 1. \ ▷$$

Если правая часть линейного неоднородного уравнения (8) есть сумма нескольких функций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_r(x)$$

и $\widetilde{y}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — некоторые частные решения уравнений $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ соответственно, что сумма

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x) + \ldots + \widetilde{y}_r(x)$$

есть некоторое частное решение уравнения (8) (*принцип суперпозиции решений*).

Пример 13. Проверив, что функция $\widetilde{y}_1 = -\frac{1}{4}e^x$ является частным решением уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^x$, а функция $\widetilde{y}_2 = -\frac{1}{3}e^{2x}$ — частным решением уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$, найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = e^x + e^{2x}.$$

$\lhd$ Согласно принципу суперпозиции частным решением последнего уравнения является функция $\widetilde{y} = -\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}$. Общее решение соответствующего линейного однородного уравнения есть функция $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$ (см. задачу 10.282). По формуле (9) общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}. \ \rhd$$

10.308. Используя решение задачи 10.298, написать общее решение уравнения $x^2y'' - 6xy' + 12y = 3x$, предварительно убедившись в том, что функция $x/2$ есть одно из решений этого уравнения.

10.309. Используя решение задачи 10.303, написать общее решение уравнения $y''' - 2y'' + y' - 2y = 10e^{3x}$, предварительно убедившись в том, что функция e^{3x} есть одно из решений этого уравнения.

10.310. Проверив, что функции $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$, найти общее решение уравнения $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$.

10.311. Проверив, что функции $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = x\cos x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 2\operatorname{tg} x \cdot y' + (2\operatorname{tg}^2 x + 1)y = 0$, найти общее решение уравнения $\operatorname{ctg} x \cdot y'' + 2y' + (2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)y = \cos^2 x$.

10.312. Проверив, что функция $\widetilde{y}_1(x) = 5x + 6$ является частным решением уравнения $y'' - 6y' + 5y = 25x$, а функция $\widetilde{y}_2(x) = -e^{2x}$ — частным решением уравнения $y'' - 6y' + 5y = 3e^{2x}$, найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 5y = 25x + 3e^{2x}$ (см. задачу 10.281).

10.313. Проверив, что функция $\widetilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}e^x$ является частным решением уравнения $y''' + y' = e^x$, а функция $\widetilde{y}_2(x) = -\sin 2x$ — частным решением уравнения $y''' + y' = 6\cos 2x$, найти общее решение уравнения $y''' + y' = e^x + 6\cos 2x$ (см. задачу 10.300).

5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общий вид линейного дифференциального уравнения порядка n с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{12}$$

где a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — действительные постоянные.

Уравнение

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{13}$$

полученное заменой производных $y^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ искомой функции степенями λ^k, называется *характеристическим уравнением* для уравнения (12). Каждому действительному корню λ уравнения (13) кратности r соответствуют r линейно независимых решений уравнения (12):

$$e^{\lambda x},\quad xe^{\lambda x},\quad \ldots,\quad x^{r-1}e^{\lambda x},$$

а каждой паре комплексных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности s соответствуют s пар линейно независмых решений:

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \ldots, & x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \ldots, & x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{array}$$

Таким образом, если характеристическое уравнение имеет k действительных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратностей $r_1, \ldots, r_k$ и l пар комплексно сопряженных корней $\alpha_1 + i\beta_1$, $\alpha_1 - i\beta_1$, $\ldots$, $\alpha_l + i\beta_l$, $\alpha_l - i\beta_l$ кратностей $s_1, \ldots, s_l$ $(r_1 + \ldots + r_k + 2s_1 + \ldots + 2s_l = n)$, то общее решение уравнения (12) запишется в виде

$$\begin{aligned} y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_k(x)e^{\lambda_k x} + (Q_1(x)\cos\beta_1 x +\\ + R_1(x)\sin\beta_1 x)e^{\alpha_1 x} + \ldots + (Q_l(x)\cos\beta_l x + R_l(x)\sin\beta_l x)e^{\alpha_l x}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $P_\nu(x)$ — произвольный многочлен степени $r_\nu - 1$, $\nu = 1, \ldots, k$, а $Q_\mu(x)$ и $R_\mu(x)$ — произвольные многочлены степени $s_\mu - 1$, $\mu = 1, \ldots, l$.

Пример 14. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

$\lhd$ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Запишем фундаментальную систему решений $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-2x}$. Следовательно, общее решение имеет вид $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$. $\rhd$

Пример 15. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

$\lhd$ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Следовательно, функции $y_1 = e^{-x}\cos 2x$, $y_2 = e^{-x}\sin 2x$ составляют фундаментальную систему решений, а общее решение имеет вид

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x). \quad \rhd$$

Пример 16. Найти частное решение уравнения

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.
$\triangleleft$ Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ имеет единственный корень $\lambda = 1$ кратности $r = 3$. Поэтому фундаментальная система решений имеет вид $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$. Следовательно,

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$$

— общее решение уравнения.

Для определения произвольных постоянных найдем производные

$$y' = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + (C_2 + 2C_3x)e^x,$$
$$y'' = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + 2(C_2 + 2C_3x)e^x + 2C_3e^x$$

и используем начальные условия. Получаем: $C_1 = 1$, $C_1 + C_2 = 2$, $C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 3$, откуда $C_2 = 1$, $C_3 = 0$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y = (1 + x)e^x$. $\triangleright$

Пример 17. Найти общее решение уравнения

$$4y^{\text{IV}} + 4y'' + y = 0.$$

$\triangleleft$ Характеристическое уравнение $4\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1 = 0$, или $(2\lambda^2 + 1)^2 = 0$, имеет два комплексно сопряженных корня $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$ кратности 2. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид $\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$, $x\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$, $\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$, $x\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$. Отсюда получаем общее решение:

$$y = (C_1 + C_2x)\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + (C_3 + C_4x)\sin\frac{x}{\sqrt{2}}. \ \triangleright$$

10.314. Известно частное решение $y_1 = e^{kx}$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Соответствующее характеристическое уравнение имеет дискриминант, равный нулю. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = y'(0) = 1$.

По данным корням характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами составить дифференциальное уравнение и написать его общее решение.

10.315. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$. **10.316.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

10.317. $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. **10.318.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

10.319. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

10.320. Показать, что общее решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha^2x=0$$

может быть представлено в виде $x=A\sin(\alpha t+\varphi)$ или $x=$ $=A\cos(\alpha t+\varphi)$, где A и φ — произвольные постоянные.

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

10.321. $y''-2y'-2y=0$. **10.322.** $y''+6y'+13y=0$.

10.323. $y''-6y'+9y=0$. **10.324.** $3y''-2y'-8y=0$.

10.325. $4y''-8y'+5y=0$. **10.326.** $4y''+4y'+y=0$.

10.327. $y'''-5y''+17y'-13y=0$.

10.328. $y^{\mathrm{IV}}+4y''+3y=0$. **10.329.** $y^{\mathrm{IV}}+2y'''+y''=0$.

10.330. $y^{\mathrm{IV}}-y''=0$. **10.331.** $y^{\mathrm{IV}}+2y''+y=0$.

10.332. $y^{\mathrm{IV}}-8y''+16y=0$. **10.333.** $y^{\mathrm{V}}+8y'''+16y'=0$.

10.334. $y^{\mathrm{V}}-6y^{\mathrm{IV}}+9y'''=0$.

10.335. $y^{\mathrm{VI}}-2y^{\mathrm{V}}+3y^{\mathrm{IV}}-4y'''+3y''-2y'+y=0$.

10.336. $y^{\mathrm{VI}}+2y^{\mathrm{V}}+y^{\mathrm{IV}}=0$.

Найти частные решения уравнений по данным начальным условиям:

10.337. $y''-5y'+4y=0$; $y(0)=y'(0)=1$.

10.338. $y''-2y'+y=0$; $y(2)=1$, $y'(2)=-2$.

10.339. $y'''-y'=0$; $y(0)=3$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=1$.

10.340*. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y''-y=0$, касающуюся в точке $O(0,\,0)$ прямой $y=x$.

10.341. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y''-4y'+3y=0$, касающуюся в точке $M_0(0,\,2)$ прямой $x-y+2=0$.

6. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, т. е. уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \tag{15}$$

где a_i $(i=1,\,2,\,\ldots,\,n)$ — действительные постоянные, а $f(x)\not\equiv 0$.

Согласно формуле (9) общее решение уравнения (15) записывается в виде $y(x)=y_0(x)+\widetilde{y}(x)$, где $y_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\widetilde{y}(x)$ — любое частное решение уравнения (15). Общее решение $y_0(x)$ дается формулой (14). Для отыскания $\widetilde{y}(x)$ в общем случае можно воспользоваться методом Лагранжа вариации произвольных постоянных (см. п. 4).

Пример 18. Найти общее решение уравнения

$$y''' + y' = \operatorname{tg} x.$$

◁ Общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, так как $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом вариации постоянных. Система (10) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} C_1' + C_2' \cos x + C_3' \sin x &= 0, \\ - C_2' \sin x + C_3' \cos x &= 0, \\ - C_2' \cos x - C_3' \sin x &= \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Умножив обе части второго уравнения на $\sin x$, третьего на $\cos x$ и сложив, получим $C_2' = -\sin x$. Тогда из второго уравнения следует $C_3' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. Сложив обе части первого и третьего уравнений, найдем $C_1' = \operatorname{tg} x$. Интегрирование дает:

$$C_1 = -\ln|\cos x|, \quad C_2 = \cos x, \quad C_3 = \sin x - \ln \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right|.$$

Следовательно, искомое общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \ln|\cos x| - \sin x \cdot \ln \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right|. \ ▷$$

Методом вариации произвольных постоянных решить следующие уравнения:

10.342. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$. **10.343.** $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

10.344. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

10.345. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

В частных случаях, когда функция $f(x)$ в уравнении (15) имеет вид $f_1(x) = (d_0 x^m + \ldots + d_m)e^{\lambda x}$ или $f_2(x) = \big((b_0 x^{m_1} + \ldots + b_{m_1}) \cos \beta x + (c_0 x^{m_2} + \ldots + c_{m_2}) \sin \beta x\big)e^{\alpha x}$, частное решение $\widetilde{y}(x)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. Именно, если λ или $\alpha \pm i\beta$ не совпадают ни с одним из действительных или соответственно комплексных корней характеристического уравнения (13), то $\widetilde{y}(x)$ ищется в виде

$$\widetilde{y}(x) = (D_0 x^m + D_1 x^{m-1} + \ldots + D_m)e^{\lambda x} \tag{16}$$

для $f(x) = f_1(x)$ или в виде

$$\widetilde{y}(x) = \big((B_0x^{\widetilde{m}} + \ldots + B_{\widetilde{m}})\cos\beta x + (C_0x^{\widetilde{m}} + \ldots + C_{\widetilde{m}})\sin\beta x\big)e^{\alpha x} \quad (17)$$

для $f(x) = f_2(x)$. Здесь D_ν, B_ν и C_ν — неопределенные коэффициенты, $\widetilde{m} = \max(m_1, m_2)$.

Если же λ или $\alpha \pm i\beta$ совпадают с некоторым корнем уравнения (13) кратности r (случай *резонанса*), то выражения в правой части (16) или (17) следует домножить на x^r, т.е. искать решение соответственно в виде

$$\widetilde{y}(x) = x^r(D_0x^m + \ldots + D_m)e^{\lambda x} \quad (18)$$

для $f(x) = f_1(x)$ или

$$\widetilde{y}(x) = x^r\big((B_0x^{\widetilde{m}} + \ldots + B_{\widetilde{m}})\cos\beta x + (C_0x^{\widetilde{m}} + \ldots + C_{\widetilde{m}})\sin\beta x\big)e^{\alpha x} \quad (19)$$

для $f(x) = f_2(x)$.

Пример 19. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}.$$

◁ Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, а общее решение однородного уравнения есть $y_0(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Так как $\lambda = 3$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде $\widetilde{y} = (D_0x^2 + D_1x + D_2)e^{3x}$. Найдя производные $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ и подставив $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$ и $\widetilde{y}''$ в исходное уравнение, получим (после сокращения на e^{3x})

$$2D_0x^2 + (6D_0 + 2D_1)x + (2D_0 + 3D_1 + 2D_2) \equiv x^2 + x.$$

Сравнивая коэффициенты обеих частей этого тождества, получим систему уравнений для определения неизвестных D_0, D_1, D_2:

$$\begin{aligned} 2D_0 &= 1, \\ 6D_0 + 2D_1 &= 1, \\ 2D_0 + 3D_1 + 2D_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда $D_0 = 1/2$, $D_1 = -1$, $D_2 = 1$.

Итак, $\widetilde{y} = \left(\dfrac{1}{2}x^2 - x + 1\right)e^{3x} = \dfrac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x}$, и, следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = y_0 + \widetilde{y} = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x}. \ \triangleright$$

Пример 20. Найти частное решение уравнения

$$y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x),$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$.

◁ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0 \pm \pm 2i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\widetilde{y} = x(B\cos 2x + C\sin 2x)$, так как $0 \pm 2i$ — корни характеристического уравнения кратности 1. Найдя $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ и подставив $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ в исходное уравнение, получим $-4B\sin 2x + 4C\cos 2x \equiv 4\sin 2x + 4\cos 2x$, откуда $B = -1$, $C = 1$ и, следовательно,

$$\widetilde{y} = x(\sin 2x - \cos 2x).$$

Общее решение будет $y = y_0 + \widetilde{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x(\sin 2x - \cos 2x)$.

Для нахождения C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями, предварительно продифференцировав общее решение:

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + x(2\cos 2x + 2\sin 2x) + (\sin 2x - \cos 2x).$$

Имеем: $2\pi = C_1 - \pi \Rightarrow C_1 = 3\pi$, $2\pi = 2C_2 + 2\pi - 1 \Rightarrow C_2 = 1/2$. Искомым частным решением является функция

$$y = 3\pi\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + x(\sin 2x - \cos 2x). \ \triangleright$$

Пример 21. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$$

◁ Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda = 2$. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$.

Частное решение данного уравнения будем искать в виде $\widetilde{y} = x^2(D_0 x + D_1)e^{2x}$, так как показатель экспоненты в правой части уравнения совпадает с двукратным корнем характеристического уравнения. Методом неопределенных коэффициентов (т. е. найдя $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$, подставив $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$ и $\widetilde{y}''$ в исходное уравнение, сократив на e^{2x} и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях x) находим $D_0 = 1/6$, $D_1 = 0$. Следовательно, $\widetilde{y} = \dfrac{1}{6}x^3 e^{2x}$, а общее решение принимает вид

$$y = y_0 + \widetilde{y} = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{2x} = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{6}x^3\right)e^{2x}. \ \triangleright$$

Для каждого из данных неоднородных дифференциальных уравнений написать вид его частного решения с неопределенными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить):

10.346. $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$.

10.347. $y'' + 16y = \sin(4x + \alpha)$ $(\alpha = \text{const})$.

10.348. $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$.

10.349. $y^{\mathrm{IV}} + 4y'' + 4y = x\sin 2x$.

10.350. $y'' - 4y' = xe^{4x}$. **10.351.** $y'' - 7y' = (x-1)^2$.

10.352. $y'' + 2y' + 5y = e^x\big((x+1)\cos 2x + 3\sin 2x\big)$.

10.353. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}(x^2\cos 3x - x\sin 3x)$.

Найти общие решения следующих уравнений:

10.354. $y'' - y = e^{-x}$. **10.355.** $y'' - y = \operatorname{ch} x$.

10.356. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

10.357. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.

10.358. $y'' - 2my' + m^2y = \sin nx \quad (m \neq n)$.

10.359. $y'' - 2my' + m^2y = \sin mx$.

10.360. $y'' + y = 4x\cos x$. **10.361.** $y'' + 4y = \cos^2 x$.

10.362. $4y'' - y = x^3 - 24x$.

10.363. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$.

10.364. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$. **10.365.** $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$.

10.366. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$. **10.367.** $y^{\mathrm{IV}} + y'' = x^2 + x$.

10.368. $y^{\mathrm{IV}} - y = xe^x + \cos x$. **10.369.** $y^{\mathrm{V}} - y^{\mathrm{IV}} = xe^x - 1$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

10.370. $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

10.371. $y''' - y' = -2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

10.372. $y'' + 4y = x$; $y(0) = 1$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

10.373. $y'' + y = 4e^x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

10.374. $y^{\mathrm{IV}} - y = 8e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 6$.

10.375. $y^{\mathrm{IV}} - y = 8e^x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

10.376. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x$; $y(\pi) = \pi e^\pi$, $y'(\pi) = e^\pi$.

7. Дифференциальные уравнения Эйлера. Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad x \neq 0,$$

где a_j $(i = 1, 2, \ldots, n)$ постоянные, есть частный случай линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами и называется *уравнением Эйлера.* Введем новую независимую переменную t с помощью подстановки $x = e^t$ (если $x > 0$) или подстановки $x = -e^t$ (если $x < 0$). Пусть для определенности $x > 0$. Тогда $y'_x = e^{-t}y'_t$, $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$, $y'''_{xxx} = e^{-3t}(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t)$ и т. д., и уравнение Эйлера преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x),$$

где a, b, a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные, приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой $ax + b = e^t$ (в области $ax + b > 0$).

Решение однородного уравнения Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_n y = 0$$

можно (при $x > 0$) искать в виде $y = x^\lambda$.

Подставляя выражения для y', y'', ..., $y^{(n)}$ в однородное уравнение Эйлера, находим характеристическое уравнение для определения показателя степени λ. При этом, если λ — действительный корень характеристического уравнения кратности r, то ему соответствуют r линейно независимых решений

$$x^\lambda,\ \ x^\lambda \ln x,\ \ x^\lambda(\ln x)^2,\ \ \ldots,\ \ x^\lambda(\ln x)^{r-1},$$

а если $\alpha \pm i\beta$ — пара комплексных корней кратности s, то ей соответствуют s пар линейно независимых решений

$$\begin{array}{llll} x^\alpha \cos(\beta\ln x), & x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), & \ldots, & x^\alpha(\ln x)^{s-1}\cos(\beta\ln x), \\ x^\alpha \sin(\beta\ln x), & x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x), & \ldots, & x^\alpha(\ln x)^{s-1}\sin(\beta\ln x). \end{array}$$

Пример 22. Найти общее решение неоднородного уравнения Эйлера $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

◁ Положим $x = e^t$, считая $x > 0$. Тогда $y'_x = e^{-t}y'_t$, $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$, и наше уравнение примет вид $e^{2t}\cdot e^{-2t}(y''_{tt}-y'_t) - 3e^t\cdot e^{-t}y'_t + 5y = 3e^{2t}$, или

$$y''_{tt} - 4y'_t + 5y = 3e^{2t}.$$

Общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения есть $y_0 = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$, а частное решение $\widetilde{y}$ неоднородного уравнения будем искать в виде $\widetilde{y} = Ae^{2t}$. Тогда $\widetilde{y}' = 2Ae^{2t}$, $\widetilde{y}'' = 4Ae^{2t}$, и, подставляя $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ в неоднородное уравнение, приходим к тождеству $Ae^{2t} \equiv 3e^{2t}$, откуда $A = 3$. Следовательно, $\widetilde{y} = 3e^{2t}$, и общее решение неоднородного уравнения есть $y = y_0 + \widetilde{y} = e^{2t}(C_1\cos t + C_2 \sin t + 3)$. Возвращаясь к первоначальной независимой переменной x, получим окончательно

$$y = x^2(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x + 3).$$

Если учитывать случай $x < 0$, то общее решение можно записать в виде, охватывающем оба случая:

$$y = x^2(C_1\cos\ln|x| + C_2\sin\ln|x| + 3). \ \triangleright$$

Пример 23. Найти общее решение однородного уравнения Эйлера $(x+2)^2y''+3(x+2)y'-3y=0$.

$\lhd$ Положим $y=(x+2)^\lambda$. Тогда имеем $y'=\lambda(x+2)^{\lambda-1}$, $y''=$ $=\lambda(\lambda-1)(x+2)^{\lambda-2}$. Подставляем выражения y, y', y'' в заданное уравнение, получим характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda-3=0$, корни которого $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-3$. Следовательно, общее решение есть функция

$$y=C_1(x+2)+\frac{C_2}{(x+2)^3}.\ \rhd$$

Найти общие решения уравнений Эйлера:

10.377. $x^2y''+xy'+y=0$. **10.378.** $x^2y''+xy'+4y=10x$.

10.379. $x^2y''-6y=12\ln x$.

10.380. $x^2y'''-3xy''+3y'=0$. **10.381.** $x^2y'''-2y'=0$.

10.382. $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0$.

8. Краевые задачи в случае линейных дифференциальных уравнений. Во многих физических задачах приходится искать решение дифференциальных уравнений не по заданным начальным условиям, а по их значениям на концах интервала. Такие задачи получили название *краевых* (*граничных*) задач. Общий вид краевых условий для интервала $(a,\ b)$ в случае уравнений 2-го порядка таков:

$$\alpha_0y(a)+\beta_0y'(a)=A,\quad \alpha_1y(b)+\beta_1y'(b)=B, \tag{20}$$

где α_0, α_1, β_0, β_1 — одновременно не равные нулю заданные постоянные. Краевые условия называются *однородными*, если из того, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют этим условиям, следует, что и их линейная комбинация $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ также удовлетворяет этим условиям. Краевые условия (20) при $A=B=0$, очевидно, однородны.

Краевые задачи не всегда разрешимы. При решении краевой задачи сначала находится общее решение данного дифференциального уравнения, и из граничных условий получается система для определения значений постоянных C_1, C_2, ..., C_n, при которых из общего решения получается решение данной краевой задачи.

Пример 24. Найти решение уравнения $y''+y=1$, удовлетворяющее условиям $y'(0)=y'(\pi)=0$.

$\lhd$ Исходное уравнение имеет общее решение вида

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+1.$$

Из граничных условий получаем: $y'(0)=C_2=0$ и $y'(\pi)=-C_2=0$, так что функция $y(x)=C_1\cos x+1$ удовлетворяет граничным условиям при любом C_1. $\rhd$

Пример 25. Найти частное решение уравнения

$$y''-2y'+2y=e^x,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) + y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}, \quad y'(0) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$\lhd$ Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $y_0 = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\widetilde{y} = Ae^x$. Подставив $\widetilde{y}' = Ae^x$ и $\widetilde{y}'' = Ae^x$ в данное уравнение, получим $Ae^x = e^x$, откуда $A = 1$. Итак, $\widetilde{y} = e^x$, и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1).$$

Найдя

$$y' = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1) + e^x(-C_1 \sin x + C_2 \cos x),$$

используем краевые условия. Получим систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\begin{aligned} (C_1 + 1) + e^{\pi/2}(C_2 + 1) &= e^{\pi/2}, \\ (C_1 + C_2 + 1) + e^{\pi/2}(-C_1 + C_2 + 1) &= 1. \end{aligned}$$

Решив эту систему, находим

$$C_1 = \frac{e^{\pi} - 1 - e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}}, \quad C_2 = \frac{1 - 2e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}},$$

т. е. искомым частным решением является функция

$$y = e^x\left(\frac{e^{\pi} - 1 - e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}} \cos x + \frac{1 - 2e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}} \sin x + 1\right). \rhd$$

Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

10.383. $y'' - y = 0$; $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$.

10.384. $y'' - y = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

10.385. $y'' + y = 0$; $y'(0) = 0$, $y'(1) = 1$.

10.386. $y'' + y = 0$; $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 1$.

10.387. $yy'' + y'^2 + 1 = 0$; $y(0) = 1$, $y(1) = 2$.

10.388. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

10.389. $yy' + y'^2 + yy'' = 0$; $y(0) = 1$, $y(-1) = 0$.

10.390. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2$; $y(0) + 2y'(0) = 1$, $y(1) - y'(1) = 0$.

9. Задачи физического характера.

10.391*. Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы притяжения к неподвижному центру, пропорциональной расстоянию от точки до центра (коэффициент пропорциональности $k > 0$). Сила сопротивления среды пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности $\lambda > 0$). В начальный момент расстояние от точки до центра равно a, а скорость направлена по прямой, соединяющей точку с центром, и равна v_0. Найти закон движения точки при условии, что $\lambda^2 < 4mk$.

10.392*. Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы отталкивания от неподвижного центра, пропорциональной расстоянию от точки до центра (коэффициент пропорциональности $k > 0$). Сила сопротивления среды пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности $\lambda > 0$). В начальный момент точка находится на расстоянии a от центра, скорость равна v_0 и направлена по прямой, соединяющей точку с центром. Найти закон движения точки.

10.393*. Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси. Шарик, находящийся внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти закон движения шарика относительно трубки, если:

а) в начальный момент шарик находился на расстоянии a от оси вращения, начальная скорость шарика равна нулю;

б) в начальный момент шарик находился на оси вращения и имел начальную скорость v_0.

10.394. Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси. Шарик, находящийся внутри трубки, скользит по ней с трением, величина которого $R = 2m\mu\omega\dfrac{dr}{dt}$, где μ — коэффициент трения скольжения. Найти закон движения шарика, если в начальный момент шарик находился на расстоянии a от оси вращения и начальная скорость его равна нулю.

10.395*. Тяжелая однородная цепь переброшена через гладкий гвоздь так, что с одной стороны свисает часть ее длиной 8 м, а с другой стороны — часть длиной 10 м. За какое время T цепь соскользнет с гвоздя?

10.396*. Груз массой 4 кг подвешен на пружине и увеличивает ее длину на 1 см. Найти закон движения груза, если верхний конец пружины совершает вертикальное гармоническое колебание $y = 2\sin 30t$ (см) и в начальный момент груз находился в состоянии покоя (сопротивлением среды пренебречь).

10.397*. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока с э. д. с. $e(t) = E\sin\omega t$, индуктивности L, сопротивления R и емкости C, причем $R^2C-4L<0$, $\omega \neq \neq \sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}$. Найти ток i в цепи как функцию времени t, если $i|_{t=0} = \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

10.398*. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока с э. д. с. $e(t) = E\sin\omega t$, индуктивности L и емкости C, причем $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (случай резонанса). Найти ток i в цепи как функцию времени t, если $i|_{t=0} = \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

10.399. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока с э. д. с. $e(t) = E\cos(\omega t+\varphi)$, индуктивности L и емкости C, причем $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Найти ток i в цепи как функцию времени t, если $i|_{t=0} = \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

§ 3. Системы дифференциальных уравнений

1. Основные понятия. Связь с дифференциальными уравнениями n-го порядка. Если система k дифференциальных уравнений, связывающая независимую переменную x и k функций $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, разрешена относительно старших производных этих функций $y_1^{(p_1)}(x), \ldots \ldots, y_k^{(p_k)}(x)$, т. е. имеет вид

$$\begin{aligned}
y_1^{(p_1)}(x) &= f_1(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}),\\
y_2^{(p_2)}(x) &= f_2(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_k^{(p_k)}(x) &= f_k(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}),
\end{aligned} \tag{1}$$

то она называется *канонической*, причем число $n = p_1+p_2+\ldots+p_k$ называется *порядком* системы. Каноническая система (1) при $p_1 = = p_2 = \ldots = p_k = 1$, т. е. система дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{aligned}
y_1'(x) &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n),\\
y_2'(x) &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n'(x) &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n),
\end{aligned} \tag{2}$$

называется *нормальной* системой *порядка* n.

Решением системы (2) на интервале $a < x < b$ называется совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на (a, b) и обращающих уравнения системы (2) в тождества относительно $x \in (a, b)$.

Интегралом нормальной системы (2) называется функция $\Psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}, \dfrac{\partial\Psi}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial\Psi}{\partial y_n}$ в некоторой области D изменения переменных и принимающая при любых $x \in (a, b)$ постоянное значение при подстановке в нее произвольного решения системы.

Равенство

$$\Psi(x, y_1, \ldots, y_n) = C,$$

где $\Psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ — интеграл нормальной системы, а C — произвольная постоянная, называется *первым интегралом* системы (2).

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

можно свести к нормальной системе (2). Обратно, системы (1) или (2) в большинстве случаев сводятся к дифференциальному уравнению n-го порядка, решая которое можно найти и решение исходной системы.

Пример 1. Привести каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y_1'' &= 2y_1 - 3y_2, \\ y_2'' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

к нормальному виду.

$\triangleleft$ Положим $\dfrac{dy_1}{dx} = y_3$ и $\dfrac{dy_2}{dx} = y_4$. Тогда данную систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3, \\ y_2' &= y_4, \\ y_3' &= 2y_1 - 3y_2, \\ y_4' &= y_1 - 2y_2, \end{aligned}$$

которая и является нормальной системой 4-го порядка. $\triangleright$

Пример 2. Привести к нормальной системе дифференциальное уравнение $y''(x) + k^2y(x) = 0$.

$\triangleleft$ Положим $y' = z$, тогда $y'' = z'$, и уравнение приводится к нормальной системе уравнений

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= -k^2y. \ \triangleright \end{aligned}$$

Пример 3. Свести систему уравнений

$$\begin{aligned} y' &= y - z, \\ z' &= -4y + z, \end{aligned} \tag{3}$$

где $y = y(x)$, $z = z(x)$, к уравнению 2-го порядка и найти решение системы.

◁ Найдем $z(x)$ из первого уравнения: $z = y - y'$. Отсюда имеем $z' = y' - y''$. Подставив значения z и z' во второе уравнение системы, получим уравнение $y'' - 2y' - 3y = 0$, общим решением которого является функция

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Отсюда, используя равенство $z = y - y'$, найдем

$$z(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{3x} = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}.$$

Таким образом, при любых постоянных C_1 и C_2 система функций

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \\ z &= 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x} \end{aligned} \tag{4}$$

является решением исходной системы (3). ▷

Задача Коши для системы (2) ставится следующим образом: найти решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ системы (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_n^0, \tag{5}$$

где $y_1^0, \ldots, y_n^0$ — заданные числа.

Теорема Коши. *Пусть правые части $f_1, f_2, \ldots, f_n$ нормальной системы (2) определены в $(n+1)$-мерной области D изменения переменных $x, y_1, \ldots, y_n$. Если в некоторой окрестности Δ точки $M_0(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in D$ функции f_ν непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f_\nu}{\partial y_j}$ по переменным $y_1, \ldots, y_n$, то существует интервал $x_0 - h < x < x_0 + h$ изменения переменной x, в котором существует и притом единственное решение системы (2), удовлетворяющее начальным условиям (5).*

Общим решением системы (2) называется совокупность функций

$$y_\nu(x, C_1, \ldots, C_n), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

зависящих от n произвольных постоянных, которые при любых допустимых значениях постоянных $C_1, \ldots, C_n$ обращают уравнения системы (2) в тождества, и в области, в которой выполнены условия теоремы Коши, из совокупности функций (6) можно получить решение любой задачи Коши.

Пример 4. Показать, что определенная равенствами (4) система функций является общим решением системы (3) (см. пример 3).

◁ В качестве области D для (3) можно взять область $-\infty < x, y, z < +\infty$; при этом для любых x_0, y_0 и z_0 из этой области выполнены условия теоремы Коши. Подставив значения x_0, y_0, z_0 в систему (4), получим систему для определения C_1 и C_2:

$$y_0 = C_1 e^{-x_0} + C_2 e^{3x_0},$$
$$z_0 = 2C_1 e^{-x_0} - 2C_2 e^{3x_0}.$$

Определитель этой системы

$$\Delta = 2e^{2x_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4e^{2x_0}$$

отличен от нуля при любом x_0. Следовательно, при любых y_0 и z_0 числа C_1 и C_2 определяются однозначно, т. е. из системы функций (4) можно получить любое решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (3). ▷

Путем исключения параметров a и b найти систему дифференциальных уравнений, определяющих семейства линий в пространстве:

10.400. $\begin{cases} y = ax + b, \\ x^2 + y^2 = z^2 - 2bz. \end{cases}$ **10.401.** $\begin{cases} ax + z = b, \\ y^2 + z^2 = b^2. \end{cases}$

Дифференциальные уравнения или системы заменить нормальными системами дифференциальных уравнений (x — независимая переменная):

10.402. $y''' - xyy' + y'^3 = 0.$

10.403. $y^{\mathrm{IV}} - y^2 = 0.$

10.404. $y'' = y' + z', \ \ z'' = z' + u', \ \ u'' = u' + y'.$

10.405. $z'' + z - 2y = 0, \ \ y''' + z - y = x.$

10.406. $y'' - z - u = 0, \ \ z' + uz = x^2, \ \ u''' = -xy.$

Проверить, что функции $y(x)$ и $z(x)$ являются решениями систем дифференциальных уравнений:

10.407. $\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{z}, \\ z' = \dfrac{1}{y}; \end{cases} \qquad y = e^{-x/2}, \ \ z = 2e^{x/2}.$

10.408. $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{2y}{x}, \\ z' = y + z + \dfrac{2y}{x} - 1; \end{cases} \qquad y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x^2}, \ \ z = e^x - \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{x^2}.$

Проверить, что функции $\Psi(x, y, z)$ являются интегралами данных нормальных систем:

10.409. $\Psi(x, y, z) = x + y + z;$ $\begin{cases} y' = \dfrac{z}{y - z}, \\ z' = \dfrac{y}{z - y}. \end{cases}$

10.410. $\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$ $\begin{cases} y' = \dfrac{3x - 4z}{2z - 3y}, \\ z' = \dfrac{4y - 2x}{2z - 3y}. \end{cases}$

10.411. $\Psi(x, y, z) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z};$ $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{z}, \\ z' = \dfrac{z}{y}. \end{cases}$

2. Методы интегрирования нормальных систем. Одним из методов решения систем дифференциальных уравнений является метод исключения неизвестных, который сводит систему уравнений к одному или нескольким дифференциальным уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом. Поясним это на примерах (см. также пример 3).

Пример 5. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = -z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{y}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, $z(1) = -1/2$.

◁ Продифференцируем обе части первого уравнения по x, получим $y'' = -z'$. Так как из второго уравнения $z' = \dfrac{z^2}{y}$, то $y'' = -\dfrac{z^2}{y}$, но из первого уравнения $z^2 = (y')^2$, поэтому система двух уравнений первого порядка свелась к одному уравнению второго порядка $y'' = -\dfrac{(y')^2}{y}$, т. е. к уравнению $yy'' + (y')^2 = 0$.

Левая часть полученного уравнения есть $(yy')'$, поэтому $yy' = \dfrac{1}{2}C_1$, откуда $y\,dy = \dfrac{1}{2}C_1\,dx$ и $\dfrac{1}{2}y^2 = \dfrac{1}{2}C_1x + \dfrac{1}{2}C_2$, т. е. $y = \pm\sqrt{C_1x + C_2}$. Из первого уравнения системы имеем: $z = -y'$, т. е. $z = \mp\dfrac{C_1}{2\sqrt{C_1x + C_2}}$. Система функций $y = \pm\sqrt{C_1x + C_2}$, $z = \mp\dfrac{C_1}{2\sqrt{C_1x + C_2}}$ образует общее решение заданной системы дифференциальных уравнений.

Для нахождения частного решения используем начальные условия $y(1) = 1$, $z(1) = -\frac{1}{2}$. Имеем: $1 = \sqrt{C_1 + C_2}$, $-\frac{1}{2} = -\frac{C_1}{2\sqrt{C_1 + C_2}}$, откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Итак, пара функций $y = \sqrt{x}$, $z = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ и есть искомое частное решение системы. ▷

Не всякую систему дифференциальных уравнений можно свести к одному уравнению.

Пример 6. Показать, что систему уравнений

$$y' = xy, \quad z' + y' = z + xy$$

нельзя свести к одному уравнению.

◁ Действительно, подставив во второе уравнение вместо y' его значение xy, получим два не связанных между собой дифференциальных уравнения, каждое из которых содержит только одну функцию:

$$y' = xy, \quad z' = z.$$

(Из этих уравнений находим $y = C_1 e^{x^2/2}$ и $z = C_2 e^x$.) ▷

Другим методом интегрирования систем дифференциальных уравнений является метод выделения интегрируемых комбинаций, т.е. получения из системы (2) такого уравнения, которое можно проинтегрировать и получить первый интеграл системы. Если найдены n независимых первых интегралов системы (2), то их совокупность дает общий интеграл этой системы.

Пример 7. Найти общий интеграл системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z + e^y}{z + e^x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - e^{x+y}}{z + e^x}.$$

◁ Умножим обе части второго уравнения системы на e^{-x} и сложим их с соответствующими частями первого уравнения и с тождеством $-e^{-x}z \equiv \equiv -e^{-x}z$, получим $(e^{-x}z)' + y' = 0$, откуда $e^{-x}z + y = C_1$. Это первый интеграл системы.

Теперь умножим обе части второго уравнения на e^{-y} и сложим с равенствами $-e^{-y}zy' = -e^{-y}z\frac{z + e^y}{z + e^x}$ и $x' = 1$, получим $(e^{-y}z)' + x' = 0$, откуда $e^{-y}z + x = C_2$. Это тоже первый интеграл системы. Так как якобиан системы

$$\begin{aligned} e^{-x}z + y &= C_1, \\ e^{-y}z + x &= C_2 \end{aligned}$$

отличен от нуля (проверьте!), то оба первых интеграла независимы между собой, поэтому их совокупность неявно определяет общее решение заданной системы уравнений. ▷

Для выделения интегрируемых комбинаций из системы (2) последнюю удобнее записать в так называемой симметрической форме:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dx}{1} \tag{7}$$

и использовать следующее свойство равных дробей: если $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \ldots$ $\ldots = \frac{u_n}{v_n} = \gamma$, то при любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеет место соотношение

$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n} = \gamma. \tag{8}$$

Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ подбираются обычно таким образом, чтобы числитель в (8) был полным дифференциалом знаменателя или же знаменатель был равен нулю.

В соотношении (7) независимая переменная и искомые функции равноправны.

Пример 8. Найти общее решение системы уравнений

$$y' = \frac{mz - lx}{ly - nz}, \quad z' = \frac{nx - my}{ly - nz}.$$

◁ Запишем систему в симметрической форме:

$$\frac{dx}{ly - nz} = \frac{dy}{mz - lx} = \frac{dz}{nx - my} = \gamma$$

и воспользуемся соотношением (8). Выбираем $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = n$ и $\alpha_3 = l$, тогда имеем

$$\frac{d(mx + ny + lz)}{0} = \gamma,$$

т. е. $d(mx + ny + lz) = 0$, откуда

$$mx + ny + lz = C_1. \tag{9}$$

Аналогичным образом, выбирая $\alpha_1 = 2x$, $\alpha_2 = 2y$ и $\alpha_3 = 2z$, приходим к равенству $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2. \tag{10}$$

Соотношения (9) и (10) образуют два первых интеграла системы, неявно определяющих общее решение. ▷

Найти общие решения систем дифференциальных уравнений:

10.412. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}$. **10.413.** $\frac{dt}{xy} = \frac{dx}{ty} = \frac{dy}{tx}$.

10.414. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{z}{(z-y)^2},\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{y}{(z-y)^2}.$

10.415. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x-y}{z-t},\quad \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x-y}{z-t},\quad \dfrac{dz}{dt}=x-y+1.$

10.416. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-z^2},\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2xz}{x^2-y^2-z^2}.$

10.417. $\dfrac{dt}{xt}=\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{dy}{txy-2t^2}.$

10.418. $\dfrac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\dfrac{dy}{1}=\dfrac{dz}{2}.$

10.419. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y^2}{x},\quad \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x^2}{y}.$

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений, а также частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

10.420. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{z-1}{z},\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{y-x};\quad y(0)=-1,\ z(0)=1.$

10.421. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{yz},\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x}{y^2};\quad y(0)=z(0)=1.$

10.422*. Для системы дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x^2-t}{y}$, $\dfrac{dy}{dt}=-x$ и функций а) $\varphi_1=t^2+2xy$; б) $\varphi_2=x^2-ty$ проверить, являются ли соотношения $\varphi_i=C$ $(i=1,\ 2)$ первыми интегралами этой системы.

3. Физический смысл нормальной системы. Для простоты ограничимся рассмотрением системы двух дифференциальных уравнений, причем будем считать, что независимая переменная t есть время:

$$\begin{aligned}\dot x&=f_1(t,\,x,\,y),\\ \dot y&=f_2(t,\,x,\,y).\end{aligned}\tag{11}$$

Решение $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ этой системы есть некоторая кривая в плоскости Oxy с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат. Плоскость Oxy называется *фазовой плоскостью*, а кривая $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ — *фазовой траекторией* системы (11). Сама система (11) называется *динамической системой*. Динамическая система называется *автономной* (*стационарной*), если в правые части уравнений этой системы время t не входит явным образом.

Динамическая система определяет поле скоростей движущейся в плоскости точки в любой момент времени t. Решение динамической системы $x = x(t)$, $y = y(t)$ — это уравнение движения точки: они определяют положение движущейся точки в любой момент времени t. Начальные условия задают положение точки в начальный момент: $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Уравнения движения определяют также и траекторию движения, будучи уравнениями этой кривой в параметрической форме.

Пример 9. Найти фазовую траекторию автономной динамической системы

$$\dot{x} = \frac{x^2}{y}, \quad \dot{y} = x,$$

проходящую через точку $M_0(2,\ 3)$.

◁ Продифференцируем второе уравнение по t и подставим выражение $\dot{x} = \ddot{y}$ и $x = \dot{y}$ в первое уравнение. Получим $\ddot{y} = \dfrac{(\dot{y})^2}{y}$, или $y\ddot{y} - (\dot{y})^2 = 0$, т.е. одно уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией y.

Разделим обе части последнего уравнения на y^2 и перепишем его так: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{y}}{y}\right) = 0$. Отсюда следует, что $\dfrac{\dot{y}}{y} = C_1$, или $\dfrac{dy}{y} = C_1\,dt$, откуда $y = C_2e^{C_1t}$.

Найдем $\dot{y} = C_1C_2e^{C_1t}$ и подставим во второе уравнение системы; получим $x = C_1C_2e^{C_1t}$. Итак, система функций $x = C_1C_2e^{C_1t}$, $y = C_2e^{C_1t}$ есть общее решение нашей системы дифференциальных уравнений.

Исключая из общего решения время t $(C_2e^{C_1t} = y)$, получим, что фазовыми траекториями системы являются прямые $x = C_1y$, причем через заданную точку $M_0(2,\ 3)$ проходит прямая $y = \dfrac{3}{2}x$. ▷

Для указанных систем найти фазовые траектории, проходящие через заданные точки M_0:

10.423. $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$, $\dot{y} = 2x$; $M_0(1,\ 2)$.

10.424. $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$, $\dot{y} = 2xy$; $M_0(2,\ 1)$.

10.425. $\dot{x} = 2x$, $\dot{y} = x + 2y$; $M_0(1,\ 1)$.

10.426. $\dot{x} = y - x$, $\dot{y} = y - 2x$; $M_0(1,\ 1)$.

4. Линейные однородные системы. Нормальная линейная однородная система n-го порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n, \end{aligned} \tag{12}$$

или, в матричной форме,

$$X(t) = A(t)X(t), \tag{13}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

В области непрерывности коэффициентов $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, система (12) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Фундаментальной системой решений системы (12) называется совокупность произвольных n линейно независимых решений $X_k(t) = \left(x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \ldots, x_n^{(k)}(t)\right)^{\top}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Если $X_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — фундаментальная система решений системы (12), то общее решение имеет вид $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k X_k(t)$, где C_1, C_2, …, C_n — произвольные постоянные.

Интегрирование системы (12) обычно проводится методом исключения (см. пример 3).

Решить системы линейных дифференциальных уравнений:

10.427. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x} + xz, \quad \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{2y}{x^3} + \dfrac{z}{x}.$

10.428. $x\dfrac{dy}{dx} = -y + zx, \quad x^2\dfrac{dz}{dx} = -2y + zx.$

10.429. $\dot{x} = -\dfrac{y}{t}, \quad \dot{y} = -\dfrac{x}{t}.$

10.430. $\dot{x} = -\dfrac{2}{t}x, \quad \dot{y} = y + \dfrac{t+2}{t}x.$

В частном случае систем с постоянными коэффициентами, когда матрица $A(t)$ в правой части (13) не зависит от t, для отыскания фундаментальной системы решений $X_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, могут быть использованы методы линейной алгебры.

Из характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{14}$$

находятся различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ и для всякого корня λ (с учетом его кратности) определяется соответствующее ему частное решение

$X^{(\lambda)}(t)$. Общее решение системы имеет вид

$$X(t) = \sum_{k=1}^{s} C_k X^{(\lambda_k)}(t). \tag{15}$$

При этом возможны следующие случаи:

а) λ — действительный корень кратности 1. Тогда

$$X^{(\lambda)}(t) = Y^{(\lambda)} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} y_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ y_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

где $Y^{(\lambda)}$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ (т. е. $AY^{(\lambda)} = \lambda Y^{(\lambda)}$, $Y^{(\lambda)} \neq 0$).

Пример 10. Найти частное решение однородной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, \end{aligned}$$

удовлетворяющее условиям $x_1(0) = 6$, $x_2(0) = -6$, $x_3(0) = 24$.

◁ Характеристическое уравнение (14) для этой системы имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$. Собственные векторы, например, таковы:

$$Y^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$X^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t}, \quad X^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad X^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Отсюда общее решение системы в соответствии с (15) имеет вид

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Для нахождения частного решения константы C_1, C_2, C_3 определяем из следующей системы:

$$X(0)=\begin{pmatrix}6\\-6\\24\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}3\\-9\\7\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3C_1+ & & C_3\\-9C_1+ & & C_3\\7C_1+C_2+5C_3\end{pmatrix},$$

откуда $C_1=1$, $C_2=2$, $C_3=3$. Окончательно для искомого частного решения получаем

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-9\\7\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}e^{4t}+\begin{pmatrix}3\\3\\15\end{pmatrix}e^{5t}. \ \triangleright$$

б) λ — комплексный корень кратности 1. Тогда корнем характеристического уравнения (14) является также сопряженное с λ число $\overline{\lambda}$. Вместо комплексных частных решений $X^{(\lambda)}(t)$ и $X^{(\overline{\lambda})}(t)$ следует взять действительные частные решения $X_1^{(\lambda)}(t)=\operatorname{Re}X^{(\lambda)}(t)$ и $X_2^{(\lambda)}(t)=$ $=\operatorname{Im}X^{(\lambda)}(t)$.

Пример 11. Найти общее решение системы

$$\dot{x}_1(t)=x_1+x_2,$$
$$\dot{x}_2(t)=-2x_1+3x_2.$$

$\triangleleft$ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\-2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2}=2\pm i$. Для нахождения собственного вектора, соответствующего корню $\lambda=2+i$, получаем систему

$$(-1-i)y_1^{(\lambda)}+\qquad y_2^{(\lambda)}=0,$$
$$-2y_1^{(\lambda)}+(1-i)y_2^{(\lambda)}=0.$$

Полагая $y_1^{(\lambda)}=1$, находим $y_2^{(\lambda)}=1+i$, т.е.

$$Y^{(\lambda)}=\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad X^{(\lambda)}(t)=\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}e^{(2+i)t}.$$

Отсюда пара действительных частных решений имеет следующий вид:

$$X_1^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t},$$

$$X_2^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Окончательно (см. формулу (15)) получаем общее решение

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t \end{pmatrix} e^{2t}. \ \triangleright$$

в) λ — корень кратности $r \geqslant 2$. Соответствующее этому корню решение системы (13) ищется в виде вектора

$$X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} t + \ldots + \alpha_1^{(r)} t^{r-1} \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} t + \ldots + \alpha_2^{(r)} t^{r-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} t + \ldots + \alpha_n^{(r)} t^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \tag{16}$$

коэффициенты которого $\alpha_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$, определяются из системы линейных уравнений, получающейся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях t в результате подстановки вектора (16) в исходную систему (13).

Пример 12. Найти общее решение системы

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1 - x_2,$$
$$\dot{x}_2(t) = 4x_1 + 6x_2.$$

◁ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 = 0$$

имеет корень $\lambda = 4$ кратности $r = 2$. Поэтому ищем решение системы в виде

$$X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t \\ \alpha_2 + \beta_2 t \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Подставляем это выражение в исходную систему и сокращаем на e^{4t}:

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}t = \begin{pmatrix}2\alpha_1 - \alpha_2\\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\beta_1 - 4\beta_2\\ 4\beta_1 + 6\beta_2\end{pmatrix}t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем:

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0,\\ \beta_2 - 4\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0,\\ 2\beta_1 + \beta_2 &= 0,\\ -2\beta_2 - 4\beta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Полагая $\alpha_1 = C_1$ и $\beta_1 = C_2$, имеем $\beta_2 = -2C_2$ и $\alpha_2 = -2C_1 - C_2$. Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$X(t) = X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t\\ -2(C_1 + C_2) - 2C_2 t\end{pmatrix} e^{4t}. \ \triangleright$$

Решить следующие системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Там, где даны начальные условия, кроме общего решения, найти соответствующее частное решение:

10.431. $\dot{x} = y,\ \dot{y} = -2x + 3y.$

10.432. $\dot{x} = x + 3y,\ \dot{y} = -x + 5y;\ x(0) = 3,\ y(0) = 1.$

10.433. $\dot{x} = 3x - 2y,\ \dot{y} = 4x + 7y;\ x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

10.434. $\dot{x} = 2x - 5y;\ \dot{y} = 5x - 6y.$

10.435. $\dot{x} = x - 4y,\ \dot{y} = x - 3y.$

10.436. $\dot{x} = -x + 2y,\ \dot{y} = -2x - 5y;\ x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

10.437. $\dot{x} = y,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = x;\ x(0) = y(0) = z(0) = 1.$

10.438. $\dot{x} = y + z,\ \dot{y} = z + x,\ \dot{z} = x + y;\ x(0) = y(0) = 2,\ z(0) = -1.$

10.439. $\dot{x} = x - 2y - z,\ \dot{y} = -x + y + z,\ \dot{z} = x - z.$

10.440. $\dot{x} = 5x + 2y - 3z,\ \dot{y} = 4x + 5y - 4z,\ \dot{z} = 6x + 4y - 4z.$

5. Линейные неоднородные системы. Нормальная линейная неоднородная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t),\\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{aligned} \qquad (17)$$

где по крайней мере одна из функций $f_k(t)$ не равна тождественно нулю. В матричной форме система (17) имеет вид

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + F(t), \tag{18}$$

где $F(t) = \big(f_1(t),\, f_2(t),\, \ldots,\, f_n(t)\big)^{\top}$. Интегрирование системы (17) можно проводить методом исключения (см. пример 3), однако иногда предпочтительнее найти предварительно решение $X_0(t)$ соответствующей (18) однородной системы

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \tag{19}$$

и какое-либо частное решение $\widetilde{X}(t)$ системы (18). Тогда общее решение системы (18) имеет вид

$$X(t) = X_0(t) + \widetilde{X}(t). \tag{20}$$

Если известна фундаментальная система $X_k(t)$, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$, решений однородной системы (19), то общее решение $X(t)$ можно найти методом вариации произвольных постоянных. Именно, полагая

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)X_k(t), \tag{21}$$

определяем функции $C_k(t)$ подстановкой (21) в систему (18). Учитывая при этом равенства

$$\dot{X}_k(t) - A(t)X_k(t) = 0, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

приходим к системе уравнений относительно $\dot{C}_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t)X_k(t) = F(t). \tag{22}$$

Из этой системы находим $\dot{C}_k(t) = \varphi_k(t)$ и, интегрируя, получаем функции $C_k(t)$ с точностью до произвольных постоянных. Подставляя их в (21), получаем искомое общее решение неоднородной системы (18).

Пример 13. Зная фундаментальную систему решений

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t}$$

однородной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 6x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 + 2x_2, \end{aligned}$$

найти общее решение неоднородной системы

$$\dot{x}_1 = 6x_1 + x_2 + t,$$
$$\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2 + 1.$$

◁ Воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Для функций $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_2(t)$ составим систему вида (22)

$$\dot{C}_1(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t} + \dot{C}_2(t)\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}e^{t} = \begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}.$$

Найдя

$$\dot{C}_1(t) = \frac{5t+1}{6}e^{-7t}, \quad \dot{C}_2(t) = \frac{1-t}{6}e^{-t}$$

и проинтегрировав, получим

$$C_1(t) = -\left(\frac{5}{42}t + \frac{2}{49}\right)e^{-7t} + C_1, \quad C_2(t) = \frac{1}{6}te^{-t} + C_2.$$

Таким образом, общее решение системы запишется в виде

$$X(t) = \left(-\left(\frac{5}{42}t + \frac{2}{49}\right)e^{-7t} + C_1\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t} + \left(\frac{1}{6}te^{-t} + C_2\right)\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}e^{t} =$$
$$= C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t} + C_2\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix}-\frac{2}{7}t - \frac{2}{49}\\ \frac{5}{7}t - \frac{2}{49}\end{pmatrix}. \ ▷$$

Если коэффициенты $a_{ij}(t)$ системы (17) постоянны, т.е. $a_{ij}(t) = a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, а функции $f_i(t)$ имеют вид произведений

$$(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}, \tag{23}$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены, то частное решение $\widetilde{X}(t)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов, записав $\widetilde{X}(t)$ в виде, аналогичном (23), с учетом совпадения или несовпадения чисел $\alpha \pm i\beta$ с корнями характеристического уравнения.

Следует иметь в виду, что если k — наибольшая степень многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ в (23) и $\lambda = \alpha + i\beta$ — корень кратности r характеристического уравнения, то частное решение $\widetilde{X}(t)$ ищется в виде

$$\widetilde{X}(t) = \mathrm{Re}\left(t^{r-1}\begin{pmatrix}\gamma_{10}t^{k+1} + \gamma_{11}t^{k} + \ldots + \gamma_{1,\,k+1}\\ \gamma_{20}t^{k+1} + \gamma_{21}t^{k} + \ldots + \gamma_{2,\,k+1}\\ \dotfill \\ \gamma_{n0}t^{k+1} + \gamma_{n1}t^{k} + \ldots + \gamma_{n,\,k+1}\end{pmatrix}e^{\lambda t}\right).$$

Пример 14. Найти частное решение системы

$$\dot{x}_1 = -x_2 + t^2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + e^t.$$

◁ Так как характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, ищем частное решение системы в виде суммы многочлена второй степени и функции вида De^t:

$$x_1 = A_1 t^2 + B_1 t + C_1 + D_1 e^t, \quad x_2 = A_2 t^2 + B_2 t + C_2 + D_2 e^t.$$

Подставляя эти функции в заданную систему, получим равенства

$$2A_1 t + B_1 + D_1 e^t = -A_2 t^2 - B_2 t - C_2 - D_2 e^t + t^2,$$
$$2A_2 t + B_2 + D_2 e^t = A_1 t^2 + B_1 t + C_1 + D_2 e^t + e^t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t и при e^t, получим систему

$$2A_1 = -B_2, \quad B_1 = -C_2, \quad D_1 = -D_2, \qquad 1 - A_2 = 0,$$
$$2A_2 = B_1, \qquad B_2 = C_1, \qquad D_2 = D_1 + 1, \qquad A_1 = 0.$$

Отсюда $A_1 = B_2 = C_1 = 0$, $A_2 = 1$, $B_1 = 2$, $C_2 = -2$, $D_2 = 1/2$, $D_1 = -1/2$, и искомое частное решение имеет вид

$$x_1 = 2t - \frac{1}{2}e^t,$$
$$x_2 = t^2 - 2 + \frac{1}{2}e^t. \ \triangleright$$

Пример 15. Найти общее решение системы

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t),$$

где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $F = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix} e^{3t}$.

◁ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 + 1 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

имеет корень $\lambda = 3$ кратности 2. Общее решение однородной системы ищем в виде $X_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix} e^{3t}$, подставив которое в однородную систему и сокращая на e^{3t}, имеем

$$3\begin{pmatrix}\alpha t+\beta\\ \gamma t+\delta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha t+\beta\\ \gamma t+\delta\end{pmatrix}.$$

Получим систему

$$\begin{aligned}&3(\alpha t+\beta)+\beta=2(\alpha t+\beta)-(\gamma t+\delta),\\ &3(\gamma t+\delta)+\delta=\alpha t+\beta+4(\gamma t+\delta),\end{aligned}$$

из которой следуют два независимых соотношения $\alpha=-\gamma$ и $\beta+\alpha=-\delta$. Полагая $\alpha=C_1$ и $\beta=C_2$, имеем $\gamma=-C_1$ и $\delta=-C_1-C_2$, т.е.

$$X_0(t)=\begin{pmatrix}C_1t+C_2\\ -C_1t-(C_1+C_2)\end{pmatrix}e^{3t}.$$

Так как $F(t)$ содержит множитель e^{3t}, причем $\lambda=3$ — корень характеристического уравнения кратности 2, то ищем частное решение в виде

$$\widetilde{X}(t)=t\begin{pmatrix}A_1t^2+B_1t+D_1\\ A_2t^2+B_2t+D_2\end{pmatrix}e^{3t}=\begin{pmatrix}A_1t^3+B_1t^2+D_1t\\ A_2t^3+B_2t^2+D_2t\end{pmatrix}e^{3t}$$

$\left(\text{а не в виде } t^2\begin{pmatrix}A_1t+B_1\\ A_2t+B_2\end{pmatrix}e^{3t}\right)$.

Подставив $\widetilde{X}(t)$ в заданную систему и сократив на e^{3t}, получаем матричное равенство

$$3\begin{pmatrix}A_1t^3+B_1t^2+D_1t\\ A_2t^3+B_2t^2+D_2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3A_1t^2+2B_1t+D_1\\ 3A_2t^2+2B_2t+D_2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1t^3+B_1t^2+D_1t\\ A_2t^3+B_2t^2+D_2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t+1\\ 2t\end{pmatrix},$$

которое можно записать в виде равенств

$$\begin{aligned}&A_1t^3+B_1t^2+D_1t+3A_1t^2+2B_1t+D_1=-A_2t^3-B_2t^2-D_2t+t+1,\\ &-A_2t^3-B_2t^2-D_2t+3A_2t^2+2B_2t+D_2=A_1t^3+B_1t^2+D_1t+2t.\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}A_1+A_2&=0, & A_1+A_2&=0,\\ B_1+3A_1+B_2&=0, & B_1+B_2-3A_2&=0,\\ D_1+2B_1+D_2&=1, & D_1+D_2-2B_2&=-2,\\ D_1&=1, & D_2&=0.\end{aligned}$$

Находим $D_1 = 1$, $D_2 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 3/2$, $A_1 = -1/2$, $A_2 = 1/2$. Следовательно,

$$\widetilde{X}(t) = t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + 1 \\ \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t \end{pmatrix} e^{3t},$$

и искомое общее решение запишется в виде

$$X(t) = X_0(t) + \widetilde{X}(t) = \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 - \frac{1}{2}t^3 + t \\ -C_1 t - (C_1 + C_2) + \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix} e^{3t}. \ \triangleright$$

Найти решения следующих систем уравнений:

10.441. $\dot{x} = 3x - 2y + t$, $\dot{y} = 3x - 4y$.

10.442. $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = x + y + e^t$.

10.443. $\dot{x} = 5x - 3y + te^{2t}$, $\dot{y} = 3x - y + e^{3t}$.

10.444. $\dot{x} = x + y - \cos t$, $\dot{y} = -2x - y + \sin t + \cos t$.

10.445. $\dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1$, $\dot{y} = -x + \operatorname{tg} t$.

10.446*. $\ddot{x} = 2x + 3y$, $\ddot{y} = 4x - 2y$.

10.447*. Вещество A разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из них пропорциональна массе неразложившегося вещества A. Найти законы изменения масс x и y веществ P и Q в зависимости от времени t, если через час после начала процесса разложения $x = \frac{a}{8}$, $y = \frac{3a}{8}$, a — первоначальная масса вещества A.

10.448*. Материальная точка массы m притягивается центром O с силой, пропорциональной расстоянию. Движение начинается из точки A на расстоянии a от центра с начальной скоростью v_0, перпендикулярной к отрезку OA. Найти траекторию движения.

§ 4. Элементы теории устойчивости

1. Основные понятия. Пусть задана нормальная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

с начальными условиями в точке t_0. Решение $X_0(t) = \big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)^\top$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого решения $X(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)^\top$ той же системы, значения которого в точке t_0 удовлетворяют неравенствам

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

для всех $t > t_0$ справедливы неравенства

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Если же при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $X(t)$ неравенства (3) не выполняются, то решение $X_0(t)$ называется *неустойчивым.*

Если решение $X_0(t)$ не только устойчиво, но, кроме того, при условии (2) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t\to+\infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

то это решение называется *асимптотически устойчивым.*

Пример 1. Исследовать на устойчивость решение дифференциального уравнения $\dot{x} = ax$ $(a \in \mathbb{R})$, определяемое начальным условием $x_0(t_0) = C_0$.

$\lhd$ Если $a \neq 0$, то решение имеет вид

$$x_0(t) = C_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Пусть $x(t) = Ce^{a(t-t_0)}$ — произвольное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $|C - C_0| < \delta = \varepsilon$. Тогда при $a < 0$ получаем

$$|x(t) - x_0(t)| = |Ce^{a(t-t_0)} - C_0e^{a(t-t_0)}| = e^{a(t-t_0)}|C - C_0| < \varepsilon,$$

откуда

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t) - x_0(t)| = |C - C_0| \lim_{t\to+\infty} e^{a(t-t_0)} = 0,$$

т. е. решение асимптотически устойчиво.

При $a > 0$

$$|x(t) - x_0(t)| = e^{a(t-t_0)}|C - C_0|$$

может быть сколь угодно большим числом при достаточно больших t. Значит, при $a > 0$ решение неустойчиво.

Если $a = 0$, то решение имеет вид $x_0(t) = C_0$.

Для всякого решения $x(t) = C$ с условием $|C - C_0| < \delta = \varepsilon$ имеем

$$|x(t) - x_0(t)| = |C - C_0| < \varepsilon.$$

Но

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - x_0(t)| = |C - C_0| \neq 0,$$

а потому решение устойчиво, но не асимптотически устойчиво. $\triangleright$

Исследование на устойчивость решения $X_0(t)$ системы (1) может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального (нулевого) решения — *точки покоя* некоторой системы, аналогичной системе (1) (см. задачу 10.454).

Исследовать на устойчивость решения следующих уравнений и систем уравнений:

10.449. $\dot{x} = t(x - 1)$, $x(0) = 1$.

10.450. $\dot{x} = t - 1$, $x(0) = -1$.

10.451. $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = x - y$; $x(0) = y(0) = 0$.

10.452. $\dot{x} = -2x - 3y$, $\dot{y} = x + y$; $x(0) = y(0) = 0$.

10.453. $\dot{x} = \alpha x - y$, $\dot{y} = \alpha y - z$, $\dot{z} = \alpha z - x$; $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

10.454*. Написать систему дифференциальных уравнений, исследование на устойчивость точки покоя которой равносильно исследованию на устойчивость решения $X_0(t)$ системы (1).

10.455. Сформулировать определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для точки покоя системы дифференциальных уравнений.

2. Простейшие типы точек покоя. Для исследования на устойчивость точки покоя системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

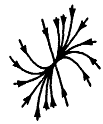
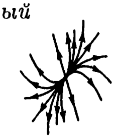
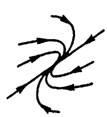
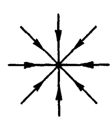
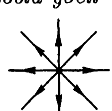
$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4}$$

надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \Delta = 0$$

и найти его корни λ_1 и λ_2. В табл. 4.1 приведена классификация точек покоя системы (4) в зависимости от корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения.

Таблица 4.1

Корни λ_1, λ_2		Характер точки покоя	Устойчивость точки покоя
Действительные: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$	*Устойчивый узел* 	Асимптотически устойчива
	$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$	*Неустойчивый узел* 	Неустойчива
	$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$	*Седло* 	Неустойчива
Комплексные: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha < 0$, $\beta \neq 0$	*Устойчивый фокус* 	Асимптотически устойчива
	$\alpha > 0$, $\beta \neq 0$	*Неустойчивый фокус* 	Неустойчива
	$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$	*Центр* 	Устойчива
Действительный, кратности 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\lambda < 0$	*Устойчивый узел*  	Асимптотически устойчива
	$\lambda > 0$	*Неустойчивый узел*  	Неустойчива

Пример 2. Определить характер и исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x} = -2x + \alpha y,$$
$$\dot{y} = x + y$$

в зависимости от параметра α $(\alpha \neq -2)$.

◁ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & \alpha \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - (\alpha + 2) = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{9+4\alpha}$. Исследуя поведения корней λ_1, λ_2 в зависимости от параметра α и используя табл. 4.1, получаем:

если $\alpha < -9/4$ (корни комплексные, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$) — устойчивый фокус;

если $-9/4 \leqslant \alpha < -2$ (корни действительные и отрицательные) — устойчивый узел;

если $-2 < \alpha$ (корни действительные и разных знаков) — седло, точка покоя неустойчива. ▷

Определить характер точек покоя следующих систем:

10.456. $\dot{x} = x + 2y$, $\dot{y} = -3x + y$.

10.457. $\dot{x} = -2x + \dfrac{1}{3}y$, $\dot{y} = -2x + \dfrac{1}{2}y$.

10.458. $\dot{x} = -x + 3y$, $\dot{y} = -x + 2y$.

10.459. $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x - 2y$.

10.460. $\dot{x} = -6x - 5y$, $\dot{y} = -2x - 5y$.

10.461. $\dot{x} = -x + 2y$, $\dot{y} = -2x - 5y$.

Определить, при каких значениях параметра α точка покоя системы устойчива.

10.462. $\dot{x} = \alpha x - y$, $\dot{y} = x + 2y$.

10.463. $\dot{x} = -3x + \alpha y$, $\dot{y} = -\alpha x + y$.

10.464*. Исследовать на устойчивость решение уравнения упругих колебаний $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta^2 x = 0$ $(\alpha > 0)$.

10.465*. Пусть задана система n линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказать, что если все корни характеристического уравнения этой системы имеют отрицательную действительную часть, то точка покоя системы асимптотически устойчива. Если же хотя бы один из корней характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то точка покоя неустойчива.

Используя результат задачи 10.465, исследовать на устойчивость точку покоя каждой из следующих систем:

10.466. $\dot{x} = 2x$, $\dot{y} = 3x + 2y$, $\dot{z} = -x - y - z$.

10.467. $\dot{x} = -2x - y$, $\dot{y} = x - 2y$, $\dot{z} = x + 3y - z$.

3. Метод функций Ляпунова. Этот метод в применении к автономной системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{5}$$

где $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, состоит в непосредственном исследовании устойчивости ее точки покоя при помощи подходящим образом подобранной *функции Ляпунова* $V(x_1, \ldots, x_n)$.

Верны следующие теоремы Ляпунова:

Теорема 1 (об устойчивости). *Если существует дифференцируемая функция $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:*

а) $V(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, *причем* $V = 0$ *лишь при* $x_1 = \ldots = x_n = 0$;

б) $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$,

то точка покоя системы (5) *устойчива.*

Теорема 2 (об асимптотической устойчивости). *Если существует дифференцируемая функция $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:*

а) $V(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, *причем* $V = 0$ *лишь при* $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

б) $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$, *причем* $\dfrac{dV}{dt} = 0$ *лишь при* $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

то точка покоя системы (5) *асимптотически устойчива.*

Теорема 3 (о неустойчивости). *Если существует дифференцируемая функция $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат условиям:*

а) $V(0, \ldots, 0) = 0$ *и сколь угодно близко от начала координат имеются точки, в которых* $V(x_1, \ldots, x_n) > 0$;

б) $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, *причем* $\dfrac{dV}{dt} = 0$ *лишь при* $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

то точка покоя системы (5) *неустойчива.*

Пример 3. С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x} = -x + y,$$
$$\dot{y} = -2y^3 - x.$$

◁ В качестве функции Ляпунова возьмем $V = x^2 + y^2$. Тогда $\dfrac{dV}{dt} = 2x(-x + y) + 2y(-2y^3 - x) = -2(x^2 + 2y^4)$, и функция V вместе с $\dfrac{dV}{dt}$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Значит, точка покоя системы асимптотически устойчива. ▷

Пример 4. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x} = x(2 + \cos x),$$
$$\dot{y} = -y.$$

◁ Возьмем функцию $V(x, y) = x^2 - y^2$. Тогда $\dfrac{dV}{dt} = 2x^2(2 + \cos x) + 2y^2 = 2(2x^2 + y^2 + x^2\cos x) = 2\left(x^2 + 2x^2\cos^2\dfrac{x}{2} + y^2\right) > 0$ всюду, кроме начала координат. Кроме того, сколь угодно близко к началу координат найдутся точки, в которых $V > 0$ (например, вдоль прямой $y = 0$ $V = x^2 > 0$). Следовательно, выполнены условия теоремы 3, и точка покоя неустойчива. ▷

Общего метода построения функций Ляпунова не существует. В простейших случаях ее следует искать в виде: $V = ax^2 + by^2$, $V = ax^4 + by^4$, $V = ax^2 + by^4$, подбирая надлежащим образом постоянные $a > 0$ и $b > 0$.

Пример 5. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x} = -x + \frac{3}{2}y + 3xy^3,$$
$$\dot{y} = -x - \frac{1}{3}y - 2x^2y^2.$$

◁ Функцию Ляпунова будем искать в виде $V = ax^2 + by^2$, $a > 0$, $b > 0$. Тогда имеем:

$$\frac{dV}{dt} = 2ax\left(-x + \frac{3}{2}y + 3xy^3\right) + 2by\left(-x - \frac{y}{3} - 2x^2y^2\right) =$$
$$= -\left(2ax^2 + \frac{2}{3}by^2\right) + (xy + 2x^2y^3)(3a - 2b).$$

Полагая $b = \dfrac{3}{2}a$, получим, что $\dfrac{dV}{dt} = -a(2x^2 + y^2) \leqslant 0$ при всяком $a > 0$. Из теоремы 2 вытекает, что точка покоя системы асимптотически устойчива. ▷

Исследовать на устойчивость точки покоя следующих систем:

10.468. $\dot{x} = -x - y - x^3 - y^2,\ \ \dot{y} = x - y + xy.$

10.469. $\dot{x} = y + x^3,\ \ \dot{y} = -x + y^3.$

10.470. $\dot{x} = xy^4,\ \ \dot{y} = -x^4 y.$

10.471. $\dot{x} = -y + x^5,\ \ \dot{y} = x + y^5.$

10.472. $\dot{x} = y + x^2y^2 - \dfrac{1}{4}x^5,\ \ \dot{y} = -2x - 2x^3y - \dfrac{1}{2}y^3.$

10.473. $\dot{x} = -2x + 4xy^2,\ \ \dot{y} = y + 2x^2y.$

4. Устойчивость по первому приближению. Предположим, что правые части системы (5), т. е. функции $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, дифференцируемы в начале координат достаточное число раз. Разложим их по формуле Тейлора в окрестности начала координат:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + F_i(x_1, \ldots, x_n),$$

где $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i(0, \ldots, 0)}{\partial x_j}$, а F_i — члены второго порядка малости относительно $x_1, \ldots, x_n$. Тогда исходная система (5) может быть записана в виде

$$\dot{x}_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + F_1(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{x}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j + F_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

называемую системой уравнений *первого приближения* для системы (5).

Справедливо следующее утверждение: если все корни характеристического уравнения системы (6) имеют отрицательные действительные части, то точка покоя системы (6), а также исходной системы (5) асимптотически устойчива; если хотя бы один из корней характеристического уравнения системы (6) имеет положительную действительную часть, то точка покоя системы (6) (и системы (5)) неустойчива.

Говорят, что в этих случаях возможно исследование системы (5) на *устойчивость по первому приближению.* В остальных случаях такое исследование, вообще говоря, невозможно, так как начинает сказываться влияние членов 2-го порядка малости.

Пример 6. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x} = 2x + 8\sin y,$$
$$\dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y.$$

◁ Разлагая функции $\sin y$, $\cos y$, e^x по формуле Тейлора и выделяя члены 1-го порядка малости, можем переписать исходную систему в виде

$$\dot{x} = 2x + 8y + F_1(x, y),$$
$$\dot{y} = -x - 3y + F_2(x, y),$$

где F_1, F_2 — члены 2-го порядка малости относительно x и y. Соответствующая система уравнений первого приближения вида (6) запишется следующим образом:

$$\dot{x} = 2x + 8y,$$
$$\dot{y} = -x - 3y.$$

Корни ее характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ имеют отрицательные действительные части. Следовательно, точка покоя этой, а также исходной систем устойчива. ▷

Исследовать на устойчивость по первому приближению точки покоя следующих систем дифференциальных уравнений:

10.474. $\dot{x} = \dfrac{1}{4}(e^x - 1) - 9y, \quad \dot{y} = \dfrac{1}{5}x - \sin y.$

10.475. $\dot{x} = 5x + y\cos y, \quad \dot{y} = 3x + 2y - y^3e^y.$

10.476. $\dot{x} = 7x + 2\sin y, \quad \dot{y} = e^x - 3y - 1.$

10.477. $\dot{x} = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}\sin 2y, \quad \dot{y} = -y - 2x.$

10.478. $\dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \quad \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}.$

10.479. $\dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \quad \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y.$

10.480. Показать, что исследование на устойчивость по первому приближению точки покоя системы

$$\dot{x} = -4y - x^3, \quad \dot{y} = 3x - y^3$$

невозможно. Провести исследование методом функций Ляпунова.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава 5

5.1. Приближение с недостатком 0,1; 0,10; 0,101. Приближение с избытком: 0,2; 0,11; 0,102. **5.2.** а) $\frac{11}{9}$; б) $\frac{901}{300}$; в) $\frac{2183}{19800}$. **5.11.** $\log_{1/2}\frac{1}{3} > \log_{1/3}\frac{1}{2}$. **5.12.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$. **5.13.** $\log_{\log_3 2}\frac{1}{2} > 1$. **5.18.** $\left\{\frac{7}{6}, \frac{3}{2}\right\}$. **5.19.** $\{-1, 0\}$. **5.20.** $\varnothing$. **5.21.** $\{0, 2\}$. **5.22.** $(-\infty, 2]$. **5.23.** $(-\infty, 1] \cup \cup [3, +\infty)$. **5.24.** $(3, 4)$. **5.25.** $[1-\sqrt{17}, -1+\sqrt{5}]$.

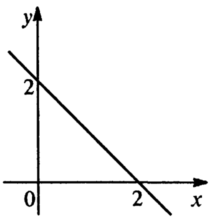


Рис. 51

5.26. $\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. **5.27.** $(-\infty, -1]$. **5.28.** а) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$; б) обе записи верны. **5.29.** $A = \{0, 1, 2\}$. **5.30.** $A = \{1\}$. **5.31.** $A = \{1, 2, 3, 4\}$. **5.32.** $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. **5.33.** $A = \{1, 2, 3\}$. **5.34.** $A = \{\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$. **5.35.** См. рис. 51. **5.36.** См. рис. 52 (граница заштрихованной области не принадлежит множеству). **5.37.** См. рис. 53. **5.38.** См. рис. 54 (штриховая линия не принадлежит множеству). **5.39.** См. рис. 55 (граница заштрихованной области не принадлежит множеству). **5.40.** Точка (2, 2). **5.41.** См. рис. 56. **5.42.** См. рис. 57 (граница заштрихованной области не принадлежит множеству).

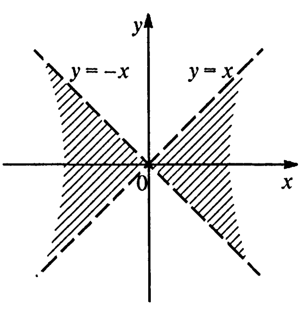


Рис. 52

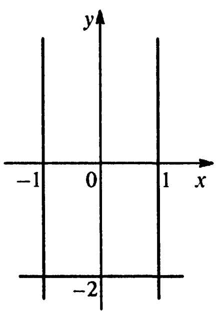


Рис. 53

5.43. $A \cup B = \{-5, 3, 4\}$; $A \cap B = \{4\}$; $A \setminus B = \{-5\}$; $B \setminus A = \{3\}$. **5.44.** $\{2, 4, 8\}$. **5.45.** $\{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. **5.46.** $\{1, 2, 4\}$. **5.47.** $\{24k \mid k \in \mathbb{N}\}$. **5.49.** $A \cup B = (-1, 4)$; $A \cap B = [1, 2]$; $A \setminus B = (-1, 1)$; $B \setminus A = (1, 4)$. **5.50.** $(0, 1)$. **5.51.** $[0, 1/4] \cup [1/2, 1]$. **5.52.** $\{0\} \cup (1/2, 1)$. **5.53.** $[0, 1/4) \cup (1/4, 3/4) \cup \{1\}$.

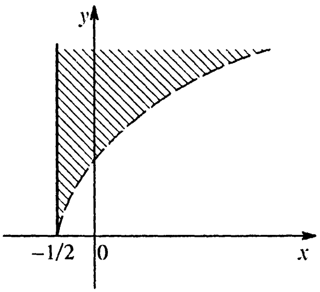


Рис. 54

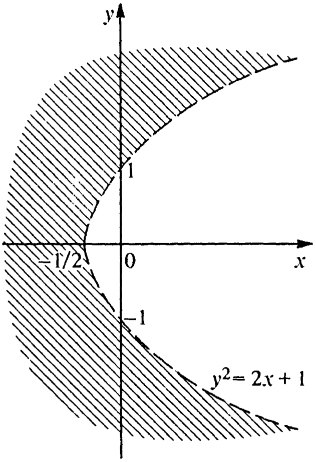


Рис. 55

5.60. $\mathbb{Z}$; $\{-1, 0, 1\}$. **5.61.** $\{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 3k,\ k \in \mathbb{N}\}$; $\varnothing$. **5.62.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\{1\}$. **5.63.** а) Все точки данного круга; $\varnothing$; б) все точки кольца между данной окружностью и концентрической окружностью вдвое меньшего радиуса; $\varnothing$; в) все точки круга; центр круга.

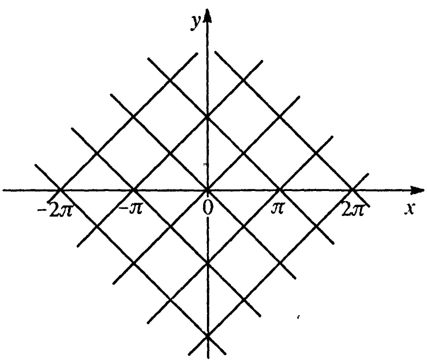


Рис. 56

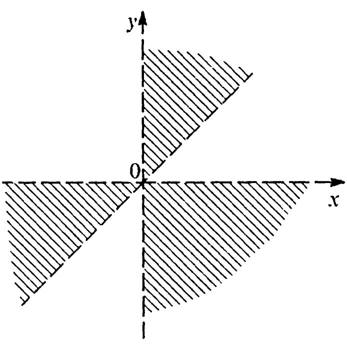


Рис. 57

5.73. а) $\min X$ не существует; $\max X = 1$; б) $[1, +\infty)$; $(-\infty, 0]$; $\sup X = 1$; $\inf X = 0$. **5.74.** $1/2$; не существует; $1/2$; 0. **5.75.** 1; -1; 1; -1. **5.76.** Не существует; -5; 0; -5. **5.77.** Не существует; не существует; 0; не существует. **5.78.** Не существует; не существует; 1; 0. **5.79.** $\sup X = \sqrt{2}$. **5.83.** а) Истинно; б) ложно; в) истинно; г) ложно. **5.84.** Ложно. **5.85.** Истинно. **5.86.** Ложно. **5.87.** Истинно. **5.88.** Истинно. **5.89.** Ложно. **5.90.** а) Истинно; б) истинно. **5.91.** а) Истинно; б) истинно; в) ложно. **5.92.** а) $f(x_0) = 0$; $f(x_0) \neq 0$. б) $f(x_0) = 0 \wedge \forall x(x \neq x_0 \Rightarrow f(x_0) \neq 0)$; $f(x_0) \neq 0 \vee \big(f(x_0) = 0 \wedge \exists x(x \neq x_0 \wedge f(x) = 0)\big)$. в) $\exists x_0(f(x_0) = 0) \wedge \wedge\big(\forall x(x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq 0)\big)$; $\forall x(f(x) \neq 0) \vee \big(\exists x_1, x_2(x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = = f(x_2) = 0)\big)$. **5.93.** а) $\exists M \forall x \in X \quad (x \leqslant M)$; $\forall M \exists x \in X \quad (x > M)$. б) $(m \in X) \wedge \big(\forall x \in X \ (m \leqslant x)\big)$; $(m \notin X) \vee \big(\exists x \in X \ (x < m)\big)$. в) $(\exists m \in X) \wedge \big(\forall x \in X \ (m \leqslant x)\big)$; $\forall x' \in X \exists x \in X \quad (x < x')$. **5.94.** а) $\exists k \in \mathbb{Z} \quad (n = km)$; $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (n \neq km)$. б) $(2\,|\,n \wedge 3\,|\,n) \Rightarrow 6\,|\,n$; $(2\,|\,n \wedge 3\,|\,n) \wedge 6 \nmid n$. (Замечание. Так как исходное высказывание истинно, то его отрицание ложно.) в) $\forall n \in \mathbb{N} \ \big(n\,|\,p \Rightarrow (n = 1 \vee n = p)\big)$; $\exists n \in \mathbb{N} \ \big(n\,|\,p \wedge (n \neq 1 \wedge n \neq p)\big)$. **5.95.** $R = \sqrt{\dfrac{1}{\pi H}}$. **5.96.** $V = = \dfrac{S^2\sqrt{16\pi^2 - S^2}}{24\pi^2}$. **5.97.** $S = \dfrac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **5.98.** $v = a(t - t_0)$; $s = \dfrac{a}{2}(t - t_0)^2$; $s = \dfrac{v^2}{2a}$, где $t \geqslant t_0$.

$$\textbf{5.99. } S_{ABNM} = \begin{cases} \dfrac{x^2h}{a-b}, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a-b}{2}, \\[2mm] hx + \dfrac{(a-b)h}{4}, & \dfrac{a-b}{2} < x \leqslant \dfrac{a+b}{2}, \\[2mm] \dfrac{a+b}{2}h - \dfrac{(a-x)^2h}{a-b}, & \dfrac{a+b}{2} < x \leqslant a. \end{cases}$$

5.100. $V = \dfrac{1}{4}\pi h(4R^2 - h^2)$, $D = [0, 2R]$. **5.101.** а) $S = \dfrac{\pi l^2}{2R}\sqrt{4R^2 - l^2}$, $D = [0, 2R]$; б) $S = 4\pi R^2 \sin\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$, $D = [0, \pi]$; в) $S = 4\pi R^2 \times \times \cos\beta\sin^2\beta$, $D = [0, \pi/2]$. **5.102.** 0, -6, 4. **5.103.** -1, 0, 1, 2, 4. **5.104.** 0, $a^3 - 1$, $a^3 + 3a^2 + 3a$, $a^3 - 3a^2 + 3a - 2$, $16a^3 - 2$. **5.105.** 1, $\dfrac{1+x}{1-x}$, $-\dfrac{x}{2+x}$, $\dfrac{2}{1+x}$, $\dfrac{x-1}{x+1}$, $\dfrac{1+x}{1-x}$. **5.106.** $D = (-3, +\infty)$, $E = (-\infty, +\infty)$. **5.107.** $D = (-\infty, 5/2)$, $E = [0, +\infty)$. **5.108.** $D = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} [4\pi^2k^2, \pi^2(2k+1)^2]$, $E = [0, 1]$. **5.109.** $D = [-3/2, 5/2]$, $E = [0, \pi]$. **5.110.** $D = = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left(\dfrac{2\pi}{3}\left(3k + \dfrac{1}{2}\right), \dfrac{2\pi}{3}\left(3k + \dfrac{5}{2}\right)\right)$, $E = (-\infty, \ln 3]$. **5.111.** $D = [-1, 1]$,

$E = [0,\ 1]$. **5.112.** $D = (2,\ 3)$, $E = \left(-\infty,\ \lg\frac{1}{4}\right]$. **5.113.** $D = [-1,\ 1]$, $E = \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$. **5.114.** $D = [0,\ 2]$, $E = [1,\ 2^{\pi}]$. **5.115.** $D = (-\infty,\ +\infty)$, $E = [1/e^2,\ +\infty)$. **5.116.** $G = [0,\ 4]$. **5.117.** $G = [1,\ 2]$. **5.118.** $G = (-\infty,\ 0) \cup (1,\ +\infty)$. **5.119.** $G = (0,\ 1/2]$. **5.120.** $G = (1,\ 3]$. **5.121.** $G = [0,\ \sqrt{2}/2)$. **5.122.** $D_0 = \{-1\}$, $D_+ = (-1,\ +\infty)$, $D_- = (-\infty,\ -1)$. **5.123.** $D_0 = \{-1,\ 2\}$, $D_+ = (-1,\ 2)$, $D_- = (-\infty,\ -1) \cup (2,\ +\infty)$. **5.124.** $D_0 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$, $D_+ = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{2n},\ \frac{1}{2n+1}\right)$, $D_- = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{2n+1},\ \frac{1}{2(n+1)}\right)$. **5.125.** $D_0 = \{1\}$, $D_+ = (-\infty,\ 0) \cup (1,\ +\infty)$, $D_- = (0,\ 1)$. **5.131.** $f(x) = x^2 - 2$. **5.132.** $f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. **5.133.** $f(x) = \sin x$. **5.134.** Четная. **5.135.** Ни четная, ни нечетная. **5.136.** Ни четная, ни нечетная. **5.137.** Нечетная. **5.138.** Ни четная, ни нечетная. **5.139.** Нечетная. **5.141.** $T = 2\pi/7$. **5.142.** $T = \pi/2$. **5.143.** Непериодическая. **5.144.** Непериодическая. **5.145.** Непериодическая. **5.146.** $T = 6\pi$. **5.147.** Если $a = 0$, то обратная функция не существует; если $a \neq 0$, то $y = \frac{x-b}{a}$ — обратная функция и $D = (-\infty,\ +\infty)$. **5.148.** Обратная $y = \sqrt[3]{x} + 1$, $D = (-\infty,\ +\infty)$. **5.149.** Обратная не существует. **5.150.** Обратная $y = \frac{1}{2}e^x$, $D = (-\infty,\ +\infty)$. **5.151.** Обратная $y = 2\log_2 x$, $D = (0,\ +\infty)$. **5.152.** Обратная $y = \frac{1-x}{1+x}$, $x \neq -1$. **5.154.** а) $y = -\sqrt{x+1}$, $D = \left[-\frac{3}{4},\ +\infty\right)$; б) $y = \sqrt{x+1}$, $D = \left[-\frac{3}{4},\ +\infty\right)$. **5.155.** а) $y = \arcsin x$, $D = [-1,\ 1]$; б) $y = \pi - \arcsin x$, $D = [-1,\ 1]$. **5.156.** $y = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ x/2, & x > 0. \end{cases}$ **5.157.** а) $y = \frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D = [0,\ 1]$; б) $y = \pi - \frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D = [0,\ 1]$; в) $y = \pi + \frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D = [0,\ 1]$. **5.159.** $f \circ g = 1 - x^2$, $g \circ f = (1-x)^2$. **5.160.** $f \circ g = x$, $x > 0$; $g \circ f = 0$. **5.161.** $f \circ g = x$,

$$g \circ f = \begin{cases} x + \pi, & x \in [-\pi,\ -\pi/2), \\ x, & x \in [-\pi/2,\ \pi/2], \\ x - \pi, & x \in (\pi/2,\ \pi]. \end{cases}$$

5.162. $f\circ g=0$, $g\circ f=g$. **5.163.** а) x; б) $x/\sqrt{1+3x^2}$. **5.164.** $f(u)=\sqrt{u}$, $u=x^2$. **5.165.** $f(u)=\sin u$, $u=\cos v$, $v=\sqrt{x}$. **5.166.** $f(u)=2^u$, $u=\sin v$, $v=x^2$. **5.167.** $f(u)=\arcsin u$, $u=e^v$, $v=\sqrt[3]{x}$. **5.168.** $f(u)=$ $=\sin u$, $u=2^v$, $v=x^2$. **5.169.** $f(u)=u^{-1/3}$, $u=v^2$, $v=\operatorname{tg} t$, $t=\log_3 x$. **5.171.** $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **5.172.** $\{(-1,\,2),\,(1,\,2)\}$. **5.173.** $\{(2k\pi,\,k\pi)\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$. **5.174.** $\{(k\pi,\,1)\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$. **5.175.** а) Прямая, проходящая через начало координат и через точку $(1,\,2)$; б) прямая, параллельная оси Ox, проходящая через точку $(0,\,-2)$; в) прямая, проходящая через точку $(0,\,-1/3)$, параллельная биссектрисе 2-го и 4-го координатных углов. **5.176.** а) Парабола $y=x^2$, смещенная вдоль оси Oy вниз на 1; б) парабола $y=x^2$, растянутая в 2 раза вдоль оси Oy, смещенная вдоль оси Ox вправо на 1; в) парабола $y=x^2$, отраженная относительно оси Ox, сжатая вдоль оси Oy в 2 раза, смещенная вдоль оси Ox влево на 2 и вдоль оси Oy вверх на $3/2$. **5.177.** а) Гипербола $y=1/x$, смещенная вдоль оси Oy вниз на 1 и вдоль оси Ox вправо на 1; б) гипербола $y=1/x$, отраженная относительно оси Ox, растянутая вдоль оси Oy в 2 раза, смещенная вдоль оси Oy вниз на $1/2$ и вдоль оси Ox влево на 1. **5.178.** а) Синусоида $y=\sin x$, сжатая в 2 раза вдоль оси Ox и смещенная вдоль оси Ox влево на $\pi/6$; б) синусоида $y=\sin x$, отраженная относительно оси Ox, растянутая вдоль оси Oy в 2 раза, растянутая вдоль оси Ox в 2 раза и смещенная вдоль оси Ox вправо на $2\pi/3$. **5.179.** а) Тангенсоида $y=\operatorname{tg} x$, растянутая вдоль оси Oy в 3 раза, растянутая вдоль оси Ox в 3 раза и смещенная вдоль оси Ox влево на $3\pi/4$; б) тангенсоида $y=\operatorname{tg} x$, отраженная относительно оси Ox, сжатая вдоль оси Oy в 2 раза, сжатая вдоль оси Ox в 2 раза и смещенная вдоль оси Ox влево на $3\pi/4$. **5.180.** а) График обратной тригонометрической функции $y=\arcsin x$, растянутый вдоль оси Oy в 4 раза и смещенный вдоль оси Ox вправо на 1; б) график функции $y=\arcsin x$, отраженный относительно оси Ox, сжатый вдоль оси Oy в $3/2$ раза и смещенный вдоль оси Ox влево на $1/2$. **5.181.** а) График обратной тригонометрической функции $y=\operatorname{arctg} x$, отраженный относительно оси Ox, растянутый вдоль оси Oy в 3 раза и смещенный вдоль оси Ox влево на $5/2$; б) график функции $y=\operatorname{arctg} x$, сжатый вдоль оси Oy в $5/2$ раза и смещенный вдоль оси Ox вправо на 6. **5.182.** а) График показательной функции $y=2^x$, отраженный относительно оси Oy и смещенный вдоль оси Ox вправо на 1; б) график функции $y = 2^x$, отраженный относительно оси Oy, сжатый вдоль оси Ox в 2 раза и смещенный вдоль оси Ox вправо на 1. **5.183.** а) График логарифмической функции $y = \lg x$, смещенный вдоль оси Oy вверх на 1 и вдоль оси Ox вправо на $1/10$; б) график функции $y = \lg x$, отраженный относительно оси Ox, смещенный вдоль оси Oy вверх на $\lg 2$ и вдоль оси Ox влево на 4.

5.184[1]). $y = \begin{cases} -2x, & x \in (-\infty, -2], \\ 4, & x \in (-2, 2], \\ 2x, & x \in (2, +\infty). \end{cases}$

5.185. $y = \begin{cases} (x+1)^2 - 1, & x \in (-\infty, 0], \\ x^2, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$

5.186. $y = \begin{cases} (x+3)^2, & x \in (-\infty, 0], \\ (x-3)^2, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$

5.187. $y = \begin{cases} 6\left(x + \dfrac{1}{12}\right)^2 - \dfrac{25}{24}, & x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{6}\right] \cup [0, +\infty), \\ -6\left(x + \dfrac{1}{12}\right)^2 - \dfrac{23}{24}, & x \in \left(-\dfrac{1}{6}, 0\right). \end{cases}$

5.188. $y = \begin{cases} -(x+1)^2 + 1, & x \in (-\infty, 1], \\ (x+1)^2 - 1, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$

5.189. $y = \begin{cases} 2(x-1), & x \in (-\infty, 1], \\ 0, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$

5.190. $y = \begin{cases} 2 - \dfrac{7}{x+2}, & x \in (-\infty, -2) \cup [3/2, +\infty), \\ -2 + \dfrac{7}{x+2}, & x \in (-2, 3/2). \end{cases}$

5.191. $y = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x+2}, & x \in (-\infty, -2), \\ -1 + \dfrac{1}{x+2}, & x \in (-2, 0], \\ 1 - \dfrac{3}{x+2}, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$

---

[1]) Здесь и далее ко всем аналогичным задачам этого параграфа в ответе фактически приводится тот вид исходной функции, из которого уже легко получить ее график.

5.192. При $x \in (-\infty, 0)$ — прямая $y = -1$, при $x \in (0, +\infty)$ — прямая $y = 1$, при $x = 0$ $y = 0$. **5.193.** При $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, — прямая $y = n$. **5.194.** При $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, — прямая $y = x - n$.

5.195. $y = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \in (-\infty, 0], \\ 2^x - 1, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$

5.196. $y = \begin{cases} 3^{x+1} + 2, & x \in (-\infty, -1], \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1} + 2, & x \in (-1, +\infty). \end{cases}$

5.197. $y = \begin{cases} \log_{1/2}(3 - x), & x \in (-\infty, 3), \\ \log_{1/2}(x - 3), & x \in (3, +\infty). \end{cases}$

5.198. $y = \begin{cases} -\log_2(x+1), & x \in (-1, 0], \\ \log_2(x+1), & x \in (0, +\infty). \end{cases}$

5.199. $y = \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{4} - 2k\pi, & x \in \left[2k\pi - \dfrac{3\pi}{4}, 2k\pi + \dfrac{\pi}{4}\right], \ k \in \mathbb{Z}, \\ x + \dfrac{\pi}{4} - (2k+1)\pi, & x \in \left((2k+1)\pi - \dfrac{3\pi}{4}, (2k+1)\pi + \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

5.200. $y = \begin{cases} 3x - 2k\pi, & x \in \left[2k\dfrac{\pi}{3}, (2k+1)\dfrac{\pi}{3}\right], \\ 3x - (2k+1)\pi, & x \in \left((2k+1)\dfrac{\pi}{3}, 2(k+1)\dfrac{\pi}{3}\right), \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

5.201. $y = \begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right), & x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \\ \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right), & x \in ((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi), \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

5.202. $y = \begin{cases} -\operatorname{arctg}(x-1), & x \in (-\infty, 1], \\ \operatorname{arctg}(x-1), & x \in (1, +\infty). \end{cases}$

5.203. $y = \begin{cases} x, & x \in \left(2k\pi - \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \\ -x, & x \in \left((2k+1)\pi - \dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\pi + \dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

5.204. $y = \begin{cases} \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right), & x \in \left[k\pi - \dfrac{\pi}{4}, k\pi + \dfrac{\pi}{4}\right], \\ -\operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right), & x \in \left(k\pi + \dfrac{\pi}{4}, (k+1)\pi - \dfrac{\pi}{4}\right), \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

5.205. $y = \dfrac{1}{2}(1-\cos x)$. **5.206.** Отрезок прямой $y = \dfrac{x}{5} + \dfrac{2}{5}$, $x \in [-7, 3]$. **5.207.** Оси координат. **5.208.** Кривая, симметричная относительно обеих осей координат; в первой четверти — часть параболы $y = -(x-1)^2 + 4$ при $x \in [0, 3]$ и часть параболы $y = (x-1)^2 - 4$ при $x \in (3, +\infty)$. **5.209.** Квадрат с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. **5.210.** Квадрат со сторонами $x = \pm 1/2$, $y = \pm 1/2$. **5.211.** Кривая, симметричная относительно обеих осей координат и биссектрисы первого и третьего квадрантов; в области $G = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x \geqslant y\}$ — луч $y = x - 1$. **5.212.** Кривая, симметричная относительно обеих осей координат; в первом квадранте при $y \leqslant \dfrac{1}{2}$ — отрезок прямой $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, при $y > \dfrac{1}{2}$ — отрезок прямой $y = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{3}}$. **5.213.** $0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$ **5.214.** $2, 0, 6, 0, 10, \ldots$ **5.215.** $-8, 11, \dfrac{14}{3}, \dfrac{17}{5}, \dfrac{20}{7}, \ldots$ **5.216.** $\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{3}, \dfrac{13\pi}{3}, \dfrac{14\pi}{3}, \ldots$ **5.217.** $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. **5.218.** $x_n = 1 + (-1)^n$. **5.219.** $x_n = \dfrac{2n}{2n-1}$. **5.220.** $x_n = n\cos\dfrac{\pi(n-1)}{2}$. **5.221.** $x_n = (-1)^n\dfrac{2n+1}{2n-1}$. **5.222.** $x_n = \sin\dfrac{(n-1)\pi}{4}$. **5.223.** Наибольший член $x_3 = 4$. **5.224.** Наибольший член $x_5 = e$. **5.225.** Наибольший член $x_9 = 1/6$. **5.226.** Наименьший член $x_2 = -22$. **5.227.** Наименьший член $x_8 = 24$. **5.228.** Наименьший член $x_3 = -9/8$. **5.229.** а) $\exists A > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}(|x_n| \leqslant A)$; $\forall A > 0\ \ \exists n \in \mathbb{N}(|x_n| > A)$. б) $\forall N \in \mathbb{N}(x_n < x_{n+1})$; $\exists n \in \mathbb{N}(x_n \geqslant x_{n+1})$. в) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall N \in \mathbb{N}(n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$; $\exists \varepsilon > 0\ \ \forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists n \in \mathbb{N}(n > N \wedge |x_n - a| \geqslant \varepsilon)$. г) $\forall E > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}(n > N \Rightarrow |x_n| > E)$; $\exists E > 0\ \ \forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists n \in \mathbb{N}(n > N \wedge |x_n| \leqslant E)$. д) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n \in \mathbb{N}(|x_n - a| < \varepsilon)$; $\exists \varepsilon > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}(|x_n - a| \leqslant \varepsilon)$. **5.230.** а) $a = 1/3$, $N = 3$; б) $a = 1$, $N = 10$; в) $a = 0$, $N = 999$; г) $a = 5/7$, $N = 3$. **5.231.** $1/3$. **5.232.** $-5/9$. **5.233.** 0. **5.234.** $-1/2$. **5.235.** 0. **5.236.** 0. **5.237.** $+\infty$. **5.238.** 0. **5.239.** $3/2$. **5.240.** -1. **5.241.** $1/2$. **5.242.** $1/3$. **5.243.** 0. **5.244.** 1. **5.245.** $1/6$. **5.247.** Является. **5.248.** Не является. **5.249.** Не является. **5.250.** Является. **5.251.** $1/3$, 3. **5.252.** 0, $\sqrt{2}/2$, 1, $-\sqrt{2}/2$, -1. **5.253.** $\pi/6$, $-\pi/6$. **5.255.** $\inf\{x_n\} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\sup\{x_n\} = 2$. **5.256.** $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\} = 0$,

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$, $\sup\{x_n\} = 5/4$. **5.257.** Последовательность неограничена сверху и снизу; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$. **5.258.** $\inf\{x_n\} = -\sqrt{3}$, $\sup\{x_n\} = 2\sqrt{3}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **5.259.** $\inf\{x_n\} = -\dfrac{1}{2}$, $\sup\{x_n\} = \dfrac{3}{2}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \dfrac{1}{2}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \dfrac{3}{2}$. **5.264.** $\forall E > 0 \;\; \exists \delta > 0$ $(0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E)$. **5.265.** $\forall E > 0 \;\; \exists \delta > 0$ $(-\delta < x - 1 < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x)| < -E)$. **5.266.** $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A > 0$ $(|x| > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$. **5.267.** $\forall E > 0 \;\; \exists A > 0$ $(x > A \Rightarrow |f(x)| > E)$. **5.268.** $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ $(0 < x < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$. **5.269.** $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A > 0$ $(|x| > A \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon)$. **5.270.** $\forall E > 0 \;\; \exists A > 0$ $(x < -A \Rightarrow f(x) < -E)$. **5.271.** $\forall E > 0 \;\; \exists A > 0$ $(x < -A \Rightarrow |f(x)| > E)$. **5.272.** -2. **5.273.** 2. **5.274.** $-\infty$. **5.275.** 0. **5.276.** $\mp\infty$. **5.277.** 0. **5.278.** m/n. **5.279.** $3x^2$. **5.280.** 6. **5.281.** $(a-1)/3a^2$. **5.282.** $1/4$. **5.283.** $+\infty$. **5.284.** n. **5.285.** 0. **5.286.** $-1/2$. **5.288.** $3/5$. **5.289.** $1/6$. **5.290.** $\sqrt{2}/2$. **5.291.** $1/(2\sqrt{x})$. **5.292.** 3. **5.293.** $+\infty$. **5.294.** $\sqrt{2/3}$. **5.295.** $1/n$. **5.296.** m/n. **5.297.** $3/2$. **5.298.** $3\sqrt[6]{2}/2$. **5.299.** 0. **5.300.** $1/2$. **5.301.** $-7/4$. **5.302.** 2. **5.303.** 3. **5.304.** $7/3$. **5.305.** $1/\pi$. **5.306.** $3/4$. **5.307.** 2. **5.308.** $(\alpha^2-\beta^2)/2$. **5.309.** 0. **5.310.** $-\alpha/\pi$. **5.311.** $-\sqrt{2}/4$. **5.312.** 1. **5.313.** 0 при $n > m$, 1 при $n = m$, $+\infty$ при $n < m$. **5.314.** 4. **5.315.** $1/2$. **5.316.** $25/16$. **5.317.** $\triangleleft$ Замечая, что $\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{1/x}$, и воспользовавшись непрерывностью функции $f(x) = \log_a x$ (см. задачу 5.381), можем записать: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x} = \log_a\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \log_a e$. $\triangleright$ **5.318.** Указание. Сделать замену $a^x - 1 = y$. **5.319.** Указание. Сделать замену $(1+x)^a - 1 = y$. Тогда $a\ln(1+x) = \ln(1+y)$. Следовательно, $\dfrac{(1+x)^a-1}{x} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{\ln(1+y)}a\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. **5.320.** e^{10}. **5.321.** e^{10}. **5.322.** $e^{-1/2}$. **5.323.** e^3. **5.324.** 2. **5.325.** 1. **5.326.** $\ln a$. **5.327.** $a\ln a$. **5.328.** $\dfrac{1}{a}\log_a e$. **5.329.** $a-b$. **5.330.** 1. **5.331.** $-1/2$. **5.332.** e. **5.333.** $1/e$. **5.338.** $+1$, -1. **5.339.** $-\infty$, $+\infty$. **5.340.** $+\infty$, 0. **5.341.** 0, $+\infty$. **5.342.** $\pi/2$, $-\pi/2$. **5.343.** 0, -1. **5.344.** 2, -2. **5.345.** -2, -2. **5.349.** $3/2$. **5.350.** $2/3$. **5.351.** 1. **5.352.** 3. **5.353.** 1. **5.354.** 3. **5.355.** $1/3$. **5.356.** $1/2$. **5.357.** $1/2$. **5.358.** $1/2$. **5.360.** 0,97. **5.361.** 5,03. **5.362.** 1,15. **5.363.** 0,88. **5.366.** $-\ln 10$.

5.367. 3. **5.368.** -2. **5.369.** $2/3$. **5.370.** $8/9$. **5.371.** $3\sqrt{2}/2$. **5.372.** 3. **5.373.** 1. **5.374.** $1/2$. **5.375.** $2/3$. **5.376.** 2. **5.377.** $1/6$. **5.384.** $A = 3$. **5.385.** $a = 2$. **5.386.** $b = \pi a/2$. **5.387.** $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ — точки разрыва второго рода. **5.388.** $x = 5/3$ — точка разрыва первого рода. **5.389.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва; $f(0) = n$. **5.390.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва; $f(0) = 1$. **5.391.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва; $f(0) = 1$. **5.392.** $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ — точки разрыва второго рода. **5.393.** $x = 0$ — точка разрыва первого рода. **5.394.** $x = -2$ — точка разрыва первого рода. **5.395.** $x = 2$ — точка разрыва первого рода. **5.396.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва, $f(0) = 2$; $x = \pm 1$ — точки разрыва второго рода. **5.397.** $x_1 = 0$ — точка устранимого разрыва, $f(0) = -1$; $x_2 = 1$ — точка устранимого разрыва, $f(1) = 0$; $x_3 = -1$ — точка разрыва второго рода. **5.398.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва; $f(0) = 1/2$. **5.399.** $x = 1$ — точка разрыва первого рода. **5.400.** $x = 1$ — точка разрыва первого рода. **5.401.** $x = 2{,}5$ — точка разрыва первого рода. **5.402.** $x = \pi/4$ — точка разрыва первого рода. **5.408.** $\big(\forall \varepsilon > 0\ \forall x_0 \in D\ \exists \delta > 0\,(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\big) \wedge \big(\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x', x'' \in D\,(|x' - x''| < \delta \wedge |f(x') - f(x'')| > \varepsilon)\big)$. **5.411.** Равномерно непрерывна. **5.412.** Не является равномерно непрерывной. **5.413.** Равномерно непрерывна. **5.414.** Не является равномерно непрерывной. **5.415.** Равномерно непрерывна. **5.416.** Не является равномерно непрерывной. **5.417.** Не является равномерно непрерывной. **5.421.** $9+7i$. **5.422.** $-3+4i$. **5.423.** $-4i$. **5.424.** $-29 + 22i$. **5.426.** $\frac{5}{17} - \frac{3}{17}i$. **5.427.** i. **5.428.** $\frac{14}{15}i$. **5.429.** $-2+\frac{3}{2}i$. **5.430.** $x = 2, y = 3$. **5.431.** $x = 1/3$, $y = 1/4$. **5.432.** $z_1 = 1$, $z_2 = i$. **5.433.** $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$. **5.434.** $z_1 = 1 + it$, $z_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$. **5.435.** $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$. **5.436.** $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$. **5.437.** $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. **5.438.** $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$. **5.439.** $\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}$. Указание. Определить угол φ, удовлетворяющий условиям: $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\cos\varphi = -\cos\frac{\pi}{7}$, $\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{7}$. **5.440.** $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$. **5.441.** $2\cos\frac{\pi}{14} \times \left(\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}\right)$. **5.448.** а) $-4i$, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $10 - 2i$, $-\frac{7}{4} - \frac{17}{4}i$. **5.450.** $\frac{3}{2} - 2i$. **5.451.** $\frac{3}{4} + i$. **5.453.** Сдвиг на вектор $\mathbf{a} = \{-2, 0\}$.

5.454. Сдвиг на вектор $\mathbf{a} = \{3, -1\}$. **5.455.** Поворот на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. **5.456.** Поворот на угол $\pi/4$ по часовой стрелке. **5.457.** Симметрия относительно начала координат. **5.458.** Гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом $k = 2$. **5.459.** Поворот на угол $\pi/4$ против часовой стрелки с последующей гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом $1/\sqrt{2}$. **5.460.** Отражение относительно действительной оси. **5.462.** а) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. б) Указание. Воспользоваться тождеством а). **5.463.** Полуплоскость $x \geqslant 0$. **5.464.** Полоса $0 \leqslant y < 1$. **5.465.** Полоса $|y| \leqslant 2$. **5.466.** Внутренность круга радиуса 1 с центром в начале координат. **5.467.** Окружность $x^2 + (y+1)^2 = 4$. **5.468.** Кольцо между окружностями γ_1: $(x+2)^2 + y^2 = 1$ и γ_2: $(x+2)^2 + y^2 = 4$ (γ_1 не принадлежит кольцу). **5.469.** $D = \left\{(x, y) \,|\, y^2 > 1 - 2x\right\}$. **5.470.** Прямая $2x + y + \dfrac{3}{2} = 0$. **5.471.** Сектор, ограниченный лучами $l_1 = \left\{(x, y) \,|\, y = 0, x \geqslant 0\right\}$ и $l_2 = \left\{(x, y) \,|\, y = x, x \geqslant 0\right\}$ (луч l_1 не принадлежит сектору). **5.472.** Сектор, ограниченный лучами $l_1 = \left\{(x, y) \,|\, y = x, x < 0\right\}$ и $l_2 = \left\{(x, y) \,|\, y = -x, x \leqslant 0\right\}$. **5.473.** Ось Ox. **5.475.** $5e^{i \operatorname{arctg}(24/7)}$. **5.476.** $13e^{i \operatorname{arctg}(-12/5)}$. **5.477.** $5e^{i(\operatorname{arctg}(4/3)+\pi)}$. **5.478.** $\sqrt{5}e^{i(\pi-\operatorname{arctg}(1/2))}$. **5.479.** $e^{i(\alpha+3\pi/2)}$. **5.480.** $2\sin\dfrac{\pi}{2}e^{i(\alpha/2)}$ при $\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$, $-2\sin\dfrac{\alpha}{2}e^{i(\pi+\alpha/2)}$ при $\sin\dfrac{\alpha}{2} < 0$. **5.482.** а) $24e^{-i(\pi/2)}$, $\dfrac{8}{3}$; б) $16e^{i(7\pi/4)}$, $2e^{-i(\pi/2)}$. **5.485.** $32i$. **5.486.** 2. **5.487.** $512(1 - i\sqrt{3})$. **5.488.** $\dfrac{1}{4}$. **5.490.** а) $\dfrac{1}{4}(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)$; б) $\dfrac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)$. **5.491.** $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$. **5.492.** $3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$. **5.493.** $\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$. **5.494.** $4\sin\varphi\cos^3\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$. **5.495.** Корни 2-й степени из единицы: $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, корни 3-й степени из единицы: $z_1 = 1$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; корни 4-й степени из единицы: $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -i$. **5.496.** $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. **5.497.** $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. **5.498.** $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{9}k\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{9}k\right)$, $k = 0, 1, \ldots, 8$. **5.499.** $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

5.500. $\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi}{2}k\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi}{2}k\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

5.501. $\sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{5}k\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{5}k\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

5.502. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k\right)\right)$, $k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5$.

5.503. $2\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{5}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{5}\right)$, $k=0,\,1,\,2,\,3,\,4$.

5.505. $\dfrac{\sin(n\varphi/2)\cos((n+1)\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$. **5.506.** $\dfrac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi}$. **5.507.** $\dfrac{\sin^2 n\varphi}{\sin\varphi}$.

5.508. $-1\pm 2i$. **5.509.** $\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}i$. **5.510.** $-2+i$, $-3+i$. **5.511.** $1+i$, $2-3i$. **5.512.** 1, $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.513.** -1, $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.514.** 1, -3, $-1\pm 2i$. **5.515.** $(-1+\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$, $(-1-\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$. **5.516.** $z_{1,2}=z_{3,4}=\pm 3i$. **5.517.** $\pm i$, $\pm\sqrt{3}i$. **5.518.** $\pm 2i$, $\pm\sqrt{5}i$. **5.519.** $\pm(1+i)$, $\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$. **5.520.** $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, -1, $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, $-\sqrt[3]{3}$. **5.521.** ± 1, $\pm i$, $\pm\sqrt{2}(1\pm i)$. **5.522.** $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\pi k}{n}$, $k=0,\,1,\,\ldots,\,n-1$, где $\alpha=\operatorname{arctg}a$. Указание. Положить $a=\operatorname{tg}\alpha$, $x=\operatorname{tg}y$ и воспользоваться тригонометрической формой комплексного числа. **5.523.** $(z-1)\times(z+1)(z^2+1)$. **5.524.** $(z^2-z\sqrt{2}+1)(z^2+z\sqrt{2}+1)$. **5.525.** $(z^2-z+1)\times(z^2+z+1)$. **5.526.** $(z^2+2z+2)(z^2+2z+5)$. **5.527.** $(z-1)(z^2+z+1)^2$. **5.528.** $(z^2-2z+5)(z^2+8z+20)$. **5.532.** $2-i$. **5.533.** -1. **5.534.** $\frac{5}{3}i$. **5.535.** $-\frac{7}{5}+\frac{14}{5}i$. **5.536.** 1. **5.537.** 0. **5.538.** ∞. **5.539.** ∞. **5.540.** $\frac{-1-5i}{26}$. **5.541.** $\frac{3}{10}(3+i)$. **5.542.** $1+ie$. **5.543.** $\frac{11+3i}{10}$. **5.544.** $e^3(\cos 2+i\sin 2)$. **5.553.** 0. **5.554.** 0. **5.555.** $\frac{1}{1-z}$. **5.556.** 0. **5.557.** $\frac{1-z_2}{1-z_1}$.

Глава 6

6.1. 0,331. **6.2.** 0,5. **6.3.** -1. **6.5.** $(\Delta x)^2-2\Delta x$. **6.6.** $e(e^{\Delta x}-1)$. **6.7.** $\log_2(1+\Delta x)$. **6.9.** $-\frac{2}{x^3}$. **6.10.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **6.11.** $2^x\ln 2$. **6.12.** $\frac{1}{x}\log_2 e$. **6.14.** Указание. Воспользоваться тождеством: $xf(x_0)-x_0f(x)=\big(xf(x_0)-x_0f(x)\big)-\big(x_0f(x)-x_0f(x_0)\big)$. **6.15.** $f'_-(-1)=-2$, $f'_+(-1)=f'_-(1)=0$, $f'_+(1)=2$. **6.17.** $f'_-(0)=f'_+(0)=0$. **6.18.** $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. **6.19.** $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$. **6.20.** Указание. Функция $y=\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x\to 0$. **6.21.** $-2+\frac{8}{3}x^3$. **6.22.** $-\frac{25x^4}{a^2}$.

6.23. $-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}$. **6.24.** $\frac{2}{(x+1)^2}$. **6.25.** $\frac{1-4x^2-x^4}{(x^3-x)^2}$. **6.26.** $2x\times$ $\times(3x^4+12x^2-31)$. **6.27.** $\frac{6}{\sqrt{2\pi}}x$. **6.28.** $-\frac{3(x^2+1)}{(x^3+3x-1)^2}$. **6.29.** $-\frac{3}{5}a\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}}+$ $+\frac{2}{3b\sqrt[3]{x}}$. **6.30.** $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$. **6.31.** $\frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$. **6.32.** $\frac{2}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^2}$.
6.33. $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$. **6.34.** $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}$. **6.35.** $2\sqrt[3]{x^2}(3\sqrt[3]{x}+5)$. **6.36.** $\frac{1}{x}\times$ $\times\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}\right)$. **6.37.** $3x^2\operatorname{ctg}x-\frac{x^3}{\sin^2 x}=\frac{x^2(3\sin 2x-2x)}{2\sin^2 x}$.
6.38. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}\cos^2 x}-\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt[3]{x^5}}=\frac{x-\sin 2x}{x\sqrt[3]{x^2}\cos^2 x}$. **6.39.** $-\frac{1}{1+\sin x}$. **6.40.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}\times$ $\times\sin x+\sqrt{x}\cos x$. **6.41.** $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}(2\ln x-3^x)+\sqrt[3]{x^5}\left(\frac{2}{x}-3^x\ln 3\right)$.
6.42. $x^2\left(3\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)+\frac{2x-x^2}{e^x}$. **6.43.** $\frac{2\cos^3 x-3}{\cos^2 x}$.
6.44. $\sin^{-2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. **6.45.** $\frac{\sqrt{x}(19x^5+9a)}{6\sqrt[3]{(x^5+a)^2}}$. **6.46.** $-\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.
6.47. $\frac{3}{2}\cos\frac{3x}{2}$. **6.48.** $-4\sin\frac{2x}{3}$. **6.49.** $24x(1+4x^2)^2$. **6.50.** $\frac{9x}{2\sqrt[4]{1+3x^2}}$.
6.51. $\frac{1}{2}\sin x$. **6.52.** $\frac{2\cos 4x}{|\cos 4x|}(\sqrt{1-\sin 4x}+\sqrt{1+\sin 4x})$. **6.53.** $\arcsin\ln x+$ $+\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **6.54.** $\frac{1}{2}\cos x$. **6.55.** $\frac{3\sin 2x}{4\sqrt[4]{1+\sin^2 x}}$. **6.56.** $2xe^{-2x}(1+x)$.
6.57. $\frac{1}{3}e^{x/3}\left(\cos^2\frac{x}{3}-\sin\frac{2x}{3}\right)$. **6.58.** $\sqrt{x^2+a}$. **6.59.** $\frac{1}{\cos x}$. **6.60.** $\frac{2x}{1-x^4}$.
6.61. $-\frac{1}{(x^2+4)\sqrt{\operatorname{arctg}(x/2)}}$. **6.62.** $\frac{x^2-1}{3x^2\cos^2(x+1/x)\sqrt[3]{(1+\operatorname{tg}(1+1/x))^2}}$.
6.63. $-\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\sin\left(2\sin\frac{x}{3}\right)$. **6.64.** $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$. **6.65.** $\frac{1}{2(1+x^2)}$.
6.66. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}\operatorname{sgn}(\sin x)$. **6.67.** $\frac{e^{x/2}}{2\sqrt{x}}(1+x)$. **6.68.** $-e^{-x^2}\frac{1+2x^2}{2x^2}$.
6.69. $2^{x/\ln x}\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\ln 2$. **6.70.** $2^{\sqrt{\sin^2 x}}\ln 2\cdot\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$.
6.71. $3^{2^x}\cdot 2^x\ln 3\cdot\ln 2$.
6.72. $\frac{1}{x}\lg\frac{x^2}{10}$. **6.73.** $\frac{1}{x\ln 2\cdot\ln 2x}$. **6.74.** $\frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}(2ax+b)}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}(ax^2+bx+c)}$.
6.75. $\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}$. **6.76.** $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$. **6.77.** $\operatorname{ch}x$.

6.78. $\operatorname{sh} x$. **6.79.** $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. **6.80.** $-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$. **6.81.** $\dfrac{(x-3)(19x-17)}{(x+1)^4}$.
6.82. $\dfrac{10-2x-2x^2}{3x^2\sqrt[3]{x^2(x+2)^2(x-1)}}$. **6.83.** $-\dfrac{2x^2+9x+1}{2\sqrt{x+2}\sqrt[3]{(x-1)^5(2x+1)^4}}$.
6.84. $\dfrac{11x^5-7x^4-58x^3+48x^2}{4\sqrt{x-1}\sqrt{(x+2)^3}\sqrt[4]{(x-2)^5}}$. **6.85.** $x^x(\ln x-1)$. **6.86.** $x^{2^x}2^x\times$ $\times\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\cdot\ln 2\right)$. **6.87.** $(\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}}\left(\dfrac{3+\ln x}{6\sqrt[3]{x^2}}\right)$. **6.88.** $(\ln x)^{1/x}\times$ $\times\dfrac{1-\ln x\cdot\ln\ln x}{x^2\ln x}$. **6.89.** $(\sin x)^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x\right)$.
6.90. $x^{x^x}\cdot x^{x-1}\big(1+x\ln x(\ln x-1)\big)$. **6.91.** $\dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left(\ln\ln x+\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{2\ln x}{x}\right)$.
6.92. $x^{x^2+1}(1+\ln x^2)+x^{2x}\cdot 2^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln 2\cdot\ln x\right)+2^{x^x}\ln 2\cdot x^x(\ln x+1)$, $x>0$. Указание. Найти производную каждого слагаемого.
6.93. $-\sin 2x\dfrac{1+2\sqrt{1+\cos^2 x}}{2\sqrt{1+\cos^2 x}(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^2 x})}$. Указание. В качестве промежуточной переменной взять $u=\cos^2 x$ и далее воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции. **6.94.** $-\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\times$ $\times(2\ln\arccos x+1)$. **6.95.** $-2xe^{-x^2}\dfrac{\arcsin e^{-x^2}+e^{-x^2}(1-e^{-2x^2})^{1/2}}{(1-e^{-2x^2})^{3/2}}$.
6.96. $-\dfrac{a^{-x}\ln a}{(1+a^{-2x})^2}(4a^{-x}\operatorname{arctg} a^{-x}+a^{-2x}-1)$. **6.97.** $a=2$, $b=0$. Указание. Условия непрерывности $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=\lim\limits_{x\to +0}f(x)$ и дифференцируемости $f'_-(0)=f'_+(0)$ составляют в совокупности систему двух уравнений относительно a и b. **6.98.** $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$.
6.99. $\dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2(1-x^3)^2}}$. **6.100.** $\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.
6.101. $\dfrac{1}{m+n}\left(n\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{m/(m+n)}-m\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{n/(m+n)}\right)$.
6.102. $-\sin 2x\cos(\cos 2x)$. **6.103.** $\dfrac{m\sin mx}{\cos^{n+1}(mx)}=\dfrac{m\operatorname{tg} mx}{\cos^n mx}$. **6.104.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\times$ $\times\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{a}{x}\right)^b\left(\dfrac{b-a}{x}+\ln\dfrac{a}{b}\right)$, $x>0$. **6.105.** $\dfrac{n}{x\ln mx}$. **6.106.** $\dfrac{1}{3x^2-2}$, $|x|<\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **6.107.** $2\pi\log_2 e\operatorname{ctg}\left(2\pi x+\dfrac{\pi}{2}\right)$. **6.108.** $\dfrac{2\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^4 x}$.

6.109. $-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$. **6.110.** $(\sin x)^{\cos x}(\operatorname{ctg} x\cos x-\sin x\ln\sin x)$. **6.111.** $\dfrac{1}{2}\times$ $\times(\sqrt{x})^{\sin^2 x}\left(\sin 2x\ln x+\dfrac{\sin^2 x}{x}\right)$. **6.112.** $-\dfrac{\sin x}{2\cos x}a^{\sqrt{\cos x}}(1+\sqrt{\cos x}\ln a)$. **6.113.** $\operatorname{th}^3 x\left(1+\dfrac{1}{2\operatorname{sh} x}\right)$. **6.114.** $\dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}$. **6.115.** $e^{-x}(a\operatorname{ch} ax-\operatorname{sh} ax)$. **6.116.** $\dfrac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$. **6.118.** $-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. **6.119.** $\cos(x-\pi k)$, если $x\in$ $\in\big(\pi k,\,\pi(k+1)\big)$, если же $x=\pi k$, то $y'_-(\pi k)=-1$, $y'_+(\pi k)=1$, $x\in\mathbb{Z}$. **6.120.** $\dfrac{1}{1+x^2}$, $x>0$; $-\dfrac{1}{1+x^2}$, $x<0$; $y'_-(0)=-1$, $y'_+(0)=+1$. **6.122.** -1, $x\leqslant 0$; $-e^{-x}$, $x>0$. **6.123.** 1, $x\leqslant 0$; $\dfrac{1}{1+x}$, $x>0$. **6.124.** 0, $|x|\geqslant 1$; $2xe^{-x^2}(1-x^2)$, $|x|<1$. **6.125.** $\dfrac{2x^4+4x^3-36x^2+54}{3(1-x)^2(9-x^2)}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$. **6.126.** $y=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i}{x-a_i}$. **6.127.** $a^{x^a}\cdot x^{a-1}\cdot a\ln a$. **6.128.** $(\log_x a)^x\times$ $\times\left(-\dfrac{1}{\ln x}-\ln\log_a x\right)$. **6.129.** $\cos x\cos(\sin x)\cos\big(\sin(\sin x)\big)$.

6.130. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}\dfrac{\ln x-1}{x^2}$. **6.131.** $-\dfrac{\sin x}{3^x}(1+\ln^2 3)$.

6.132. $\dfrac{a\cos ax\cos bx+b\sin ax\sin bx}{\cos^2 bx}\left(3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}}\ln 3+\dfrac{\sin^2 ax}{\cos^2 bx}\right)$.

6.135. $\varphi(x_0)$. Указание. Воспользоваться определением производной. **6.136.** $\dfrac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$. **6.137.** $\dfrac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2 x+\psi^2(x)}}$.

6.138. $\psi(x)^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln\psi(x)+\dfrac{\varphi(x)\psi'(x)}{\psi(x)}\right)$. **6.140.** $\dfrac{f'(\ln x)}{x}$. **6.141.** $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

6.143. $f'\big(f(x)\big)f'(x)$. **6.144.** $\dfrac{4}{3}$. **6.145.** $-\dfrac{1}{e}$. **6.146.** $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

6.147. $\dfrac{x(y^2-2x^2)}{y(2y^2-x^2)}$. **6.148.** $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. **6.149.** $\dfrac{1}{2(1+\ln y)}$.

6.150. $\dfrac{e^x\sin y+e^y\sin x}{e^y\cos x-e^x\cos y}$. **6.151.** $-\dfrac{y}{x}$. **6.152.** $\dfrac{2^x(2^y-1)}{2^y(1-2^x)}=-2^{y-x}$.

6.153. $\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}\,\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}$. **6.154.** $\dfrac{x+y}{x-y}$. **6.155.** $\dfrac{y}{x}\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$.

6.156. $\dfrac{y}{x}\dfrac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$. **6.157.** $\dfrac{y}{x}$. **6.160.** $\pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Указание. Функция $y=\operatorname{ch} x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, не имеет обратной, поэтому следует рассматривать два промежутка $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, на каждом из которых заданная функция монотонна и, следовательно, имеет обратную. **6.161.** $\log_2 e \cdot \operatorname{ctg} x$. **6.162.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+8x}}$. **6.164.** $\dfrac{1}{1+e^{\alpha(x)}}$. **6.165.** $\dfrac{2}{1+6\alpha^2(x)}$. **6.166.** $\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)+\log_2 e}$. **6.167.** $\dfrac{1}{1+\ln\alpha(x)}$. **6.168.** $3t-\dfrac{5}{2}$. **6.169.** $\dfrac{1}{3t}$. **6.170.** $-\dfrac{2t}{t+1}$. **6.171.** -2^{3t+1}. **6.172.** $-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. **6.173.** $2\cos^2 t \times$ $\times(\cos 2t - 2\sin 2t)$. **6.174.** 1. **6.175.** $\dfrac{t}{2}$. **6.176.** $\dfrac{2}{3}\ln 2\operatorname{ctg} 2t$. **6.177.** $-\dfrac{\sqrt{2-t^2}}{2\sqrt{4-t^2}}$. **6.178.** $\sqrt[6]{\dfrac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}$. **6.179.** $\dfrac{b}{a}\operatorname{th} t$. **6.180.** 1. **6.181.** -1. **6.182.** $2+\sqrt{3}$. **6.183.** $-\dfrac{4}{3}$. **6.184.** $-2\cos 2x$. **6.185.** $\dfrac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$. **6.186.** $-\dfrac{2}{3\ln 2}\times$ $\times\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$. **6.187.** $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **6.188.** $\dfrac{3x}{(1-x^2)^2}+\dfrac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$. **6.189.** $x^{\sqrt{x}-1}(2+\ln x)\left(\dfrac{1}{4}\ln x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}(2+\ln x)}\right)$. Указание. Воспользоваться логарифмической производной. **6.190.** $y'(0)=3$, $y''(0)=12$, $y'''(0)=9$. **6.191.** 2. **6.192.** 6. **6.193.** $y(0)=1$, $y'(0)=\ln 2$, $y''(0)=\ln^2 2-1$. **6.194.** $y'=-\dfrac{2}{x^3}f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, $y''=\dfrac{6}{x^4}f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{4}{x^6}f''\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. **6.195.** $y'=\dfrac{e^x f'(e^x)}{f(e^x)}$, $y''=e^{2x}\left(\dfrac{f'(e^x)}{e^x f(e^x)}+\dfrac{f''(e^x)}{f(e^x)}-\dfrac{f'^2(e^x)}{f^2(e^x)}\right)$. **6.197.** $y'=$ $=\dfrac{uu'+vv'}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $y''=\dfrac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$. **6.198.** $y'=\dfrac{u'}{u}-$ $-\dfrac{v'}{v}$, $y''=\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}-\dfrac{vv''-v'^2}{v^2}$. **6.199.** $\dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$, если $n\leqslant m$; 0, если $n>m$. **6.200.** $(k\ln a)^n a^{kx}$. **6.201.** $\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. Указание. $y'=$ $=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y''=\left(\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin(x+\pi)$ и т. д. **6.202.** $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$. **6.203.** $2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$. Указание. Воспользоваться формулой: $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$. **6.204.** $\dfrac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$. **6.206.** $\dfrac{(x-1)^{50}-(x-2)^{50}}{(x^2-3x+2)^{51}}$. **6.207.** $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 37(79-x)}{2^{20}(1-x)^{20}\sqrt{1-x}}$. Указание. Воспользоваться равенством $1+x=2-(1-x)$. **6.208.** $\cos x\cdot(209-x-x^2)-$ $-15\sin x\cdot(2x+1)$. **6.209.** $e^x(x^2+39x+360)$. **6.210.** $4\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)e^{-x}$.

6.211. $\dfrac{8!\log_2 e}{x^9}$. **6.212.** $x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x$. **6.213.** Указание. Доказательство провести методом математической индукции. **6.216.** $-\dfrac{24c^3(ad-bc)}{d^5}$.
6.217. -48. **6.223.** $-\dfrac{p^2}{y^3}$. **6.224.** $e^{2y}\dfrac{2-xe^y}{(1-xe^y)^3}$. **6.225.** $-\dfrac{2(1+y)^2}{y^5}$.
6.226. $\dfrac{y\big((1+y)^2+(x-1)^2\big)}{x^2(1+y)^3}$. **6.227.** $-\dfrac{f''_{xx}}{(f'_x)^3}$. **6.230.** $-\operatorname{ctg}^3 t$ или $\dfrac{1}{(x^2-1)^{3/2}}$, $x\in(1,\,+\infty)$. **6.231.** $-\dfrac{2}{1-t^2}$ или $-2\sec^2 x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{\pi}{2}\right)$.
6.232. $2(1+t^2)$ или $2\sec^2 x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{\pi}{2}\right)$. **6.233.** $\dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$ или $\dfrac{a^{2/3}}{3x^{4/3}\sqrt{a^{2/3}-x^{2/3}}}$, $x\in(0,\,a)$. **6.235.** $7x+y-3=0$, $x-7y+71=0$.
6.236. $y-5=0$, $x+2=0$. **6.237.** $x-4y+4=0$, $4x+y-18=0$.
6.238. $y-2x=0$, $2y+x=0$. **6.239.** $x-y-1=0$, $x+y-1=0$.
6.240. $2x-y+3=0$, $x+2y-1=0$. **6.241.** $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$. **6.242.** $y=0$, $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\pi^2\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$.
6.243. $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$. **6.244.** $x+y-2=0$. **6.245.** $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{e}$.
6.246. $M_0(1/8,\,-1/16)$. **6.247.** $y=x^2-x+1$. **6.249.** $2x-y-1=0$.
6.250. $4x-4y-21=0$. **6.251.** 3,75. **6.254.** В точке $M_1(0,\,0)$ угол равен 0 (параболы касаются) и в точке $M_2(1,\,1)$ угол $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}$. **6.255.** $\operatorname{arctg}\dfrac{8}{15}$.
6.256. $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$. **6.257.** $\pi/4$ и $\pi/2$. **6.260.** $2/\sqrt{5}$.

6.262. $\lhd$ Если кривая задана уравнением $r=r(\varphi)$, то декартовы координаты точек M этой кривой как функции угла φ даются выражениями

$$x=r(\varphi)\cos\varphi,\qquad y=r(\varphi)\sin\varphi.$$

Отсюда $\overrightarrow{OM}=r(\varphi)\cos\varphi\cdot\mathbf{i}+r(\varphi)\sin\varphi\cdot\mathbf{j}$, т. е. вектор $\boldsymbol{\rho}(1,\,\operatorname{tg}\varphi)$ коллинеарен $\overrightarrow{OM}$. Вектор $\boldsymbol{\tau}(1,\,y'_x)$ является направляющим вектором касательной TT', а так как

$$y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}=\frac{r+r'\operatorname{tg}\varphi}{r'-r\operatorname{tg}\varphi},$$

то вектор $\mathbf{e}(r'-r\operatorname{tg}\varphi,\,r+r'\operatorname{tg}\varphi)$ коллинеарен $\boldsymbol{\tau}$. Следовательно,

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{\rho},\,\mathbf{e})}{|\boldsymbol{\rho}|\cdot|\mathbf{e}|}=\frac{r'}{\sqrt{r^2+(r')^2}},$$

откуда $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}=\dfrac{r}{r'}$. $\rhd$

6.263. $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{k}$. **6.264.** $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2\varphi$. **6.265.** а) $t_1 = 0$, $t_2 = 8$; б) $t \in (0,\ 4)\cup(8,\ +\infty)$; в) $t_1 = \dfrac{4}{3}(3+\sqrt{3})$, $t_2 = \dfrac{4}{3}(3-\sqrt{3})$. **6.266.** $-a\omega\sin\omega t$. **6.267.** 242. **6.268.** $\dfrac{7}{18}\pi$. **6.269.** $a\omega e^{a\varphi}$. **6.270.** $v_x = -2a\omega\sin 2\varphi$, $v_y = -2a\omega\cos 2\varphi$. **6.271.** В точках $(3,\ 16/3)$ и $(-3,\ -16/3)$. **6.272.** $4\pi r^2 v$ и $8\pi r v$. **6.273.** 2π рад/с. **6.277.** $(\Delta y)_1 = 1{,}261$, $(dy)_1 = 1{,}2$, $(\Delta y)_2 = 0{,}120601$, $(dy)_2 = 0{,}12$. **6.278.** $\Delta s = 2x\Delta x + \Delta x^2$, $ds = 2x\Delta x$. **6.279.** $ds = f'(t_1)\Delta t$ есть путь, который был бы пройден точкой M за промежуток времени Δt при равномерном движении со скоростью $f'(t_1)$. **6.280.** $ds = 0{,}1$, $\Delta s = 0{,}08$. **6.281.** а) 0; б) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$. **6.282.** Равенства а) и в) невозможны; равенство б) возможно в случае линейной функции (см. задачу 6.276). **6.283.** 2 см. **6.284.** 3 см. **6.285.** $2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$. **6.286.** $x\sin x\,dx$. **6.287.** $\operatorname{arctg} x\,dx$. **6.288.** $\ln x\,dx$. **6.289.** $\arcsin x\,dx$. **6.290.** $\dfrac{2x\,dx}{1+5y^4}$. **6.291.** $\dfrac{x(y^2-2x^2)\,dx}{y(2y^2-x^2)}$. **6.292.** $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}\,dx$. **6.293.** $\dfrac{dx}{e^y - 1}$. **6.294.** $\dfrac{y^2-1}{y^2}\,dx$. **6.295.** $-\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}\,dx$. **6.296.** $\dfrac{x+y}{x-y}\,dx$. **6.297.** $-\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}\,dx$. **6.298.** а) 0,05; б) 0,805; в) 0,2. **6.299.** 2,93. **6.300.** 1,2. **6.301.** $\Delta V \approx 2\pi r h\Delta r$. Указание. Поскольку h постоянна, то v является функцией одного аргумента r: $v = \pi h r^2$.

6.302. $\Delta V \approx -\dfrac{RT}{p^2}\Delta p$. Указание. При постоянном T объем V является функцией только одного аргумента p: $V = RT\dfrac{1}{p}$.

6.303. $-ab^2\sin(bx+c)\,dx^2 = -b^2 y\,dx^2$. **6.304.** $3^{-x^2}\ln 9(2x^2\ln 3 - 1)\,dx^2$. **6.305.** $\dfrac{(2-x^2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}dx^2$. **6.306.** $2a\,dx^2$. **6.307.** $2\dfrac{3x^2-9x+7}{(x^2-3x+2)^3}dx^2$. **6.308.** $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}\cdot x + \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx^2$. **6.309.** $-x(1+x^2)^{-3/2}\,dx^2$. **6.310.** $-\dfrac{a(1+a^2)\sin x}{(1+a^2\sin^2 x)^{3/2}}\,dx^2$. **6.312.** $\dfrac{2\,dx^2}{(x+2y)^3}$. **6.313.** $-\dfrac{R^2\,dx^2}{(y-b)^3}$. **6.314.** $6\dfrac{x(1+3y^2)\,dx^2}{(1-3y^2)^3}$. **6.315.** $\dfrac{(x-y)\,dx^2}{(1-a\cos y)^3}$. **6.316.** $f(x)$ разрывна при $x = 0 \in [-1,\ 1]$. **6.317.** 0. **6.319.** Указание. Провести доказательство методом от противного, предварительно установив, что производная левой части уравнения имеет единственный действительный корень $x = 1$.

6.320. Указание. Провести доказательство методом от противного, предварительно установив, что производная левой части уравнения не имеет действительных корней. **6.321.** Указание. $F(b) = F(a)$. **6.322.** $\xi = 1/\sqrt{3}$. **6.326.** Указание. Воспользоваться результатом задачи 6.323. **6.328.** $\xi_1 = 1/2$, $\xi_2 = 5/3$. **6.329.** 0. **6.330.** 1/3. **6.331.** $\dfrac{m}{n}a^{m-n}$. **6.332.** $\dfrac{\ln a - \ln b}{\ln c - \ln d}$. **6.333.** 1. **6.334.** 2/3. **6.335.** $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{5}}$. **6.336.** a^2/b^2. **6.337.** 2. **6.338.** 2/3. **6.339.** $-1/2$. **6.340.** 2. **6.341.** 9/50. **6.342.** 1/2. **6.343.** 1/2. **6.344.** 0. **6.345.** 1/2. **6.346.** $-\infty$. **6.347.** $\cos 3$. **6.348.** -2. **6.349.** 1. **6.350.** 0. **6.351.** 0. **6.352.** 0. **6.353.** 2. **6.354.** 0. **6.355.** $+\infty$. **6.356.** $1/\pi$. **6.357.** a. **6.358.** 0. **6.359.** -1. **6.360.** 0. **6.361.** 1/12. **6.362.** -1. **6.363.** 2/3. **6.364.** 1. **6.365.** 1. **6.366.** 1. **6.367.** e. **6.368.** 1. **6.369.** 2. **6.370.** $1/e$. **6.371.** 1. **6.372.** $1/e$. **6.373.** 1. **6.374.** e^{-6}. **6.375.** e^2. **6.376.** e. **6.377.** $1/\sqrt{e}$. **6.378.** $1/\sqrt[6]{e}$. **6.379.** $-9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3$. **6.380.** $7 + 11(x-1) + 10(x-1)^2 + 4\big(1 + \theta(x-1)\big)(x-1)^3$; а) $\theta = 1/4$; б) θ — любое действительное число; в) $\theta = 1/4$.

6.381. $P(-1) = 143$, $P'(0) = -60$, $P''(1) = 26$. **6.382.** $1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. **6.383.** $\dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{\sin\big(\theta x + (n+1)(\pi/2)\big)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n нечетно; $\dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n/2} \times \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dfrac{\sin\big(\theta x + (n+1)(\pi/2)\big)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n четно.

6.384. $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dfrac{\cos\big(\theta x + (n+1)(\pi/2)\big)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n нечетно; $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n/2}\dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{\cos\big(\theta x + (n+1)(\pi/2)\big)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n четно. **6.385.** $x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, $x > -1$.

6.386. $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$, n нечетно; $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n/2}\dfrac{x^{n-1}}{n-1} + R_{n+1}(x)$, n четно. Указание. Остаточный член записать в общем виде.

6.387.
$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad x > -1.$$

6.388. $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\dfrac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}$. Указание. В разложении e^u по формуле Маклорена (см. задачу 6.382) положить $u=-\dfrac{x^2}{2}$. **6.389.** $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(2x)^2}{2!}-\dfrac{(2x)^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right)$. Указание. Записать $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ и воспользоваться результатом задачи 6.384. **6.390.** $\dfrac{5x}{2}-\dfrac{(5x)^3}{2^3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{(5x)^{2n+1}}{2^{2n+1}\cdot(2n+1)!}$. **6.391.** $2\ln 2+\dfrac{x^2}{4}-$ $-\dfrac{x^4}{4^2\cdot 2}+\dfrac{x^6}{4^3\cdot 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{4^n\cdot n}$. **6.392.** $2\left(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{1}{2^2\cdot 2!}\dfrac{x^4}{8^2}+\right.$ $\left.+\dfrac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}\dfrac{x^6}{8^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}\dfrac{x^{2n}}{8^n}\right)$. **6.393.** $2-(x-2)+$ $+(x-2)^2-(x-2)^3+\dfrac{(x-2)^4}{\big(1+\theta(x-2)\big)^5}$. **6.394.** $x+\dfrac{x^3}{3}\dfrac{1+2\sin^3\theta x}{\cos^4\theta x}$. **6.395.** $x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{4!}\dfrac{9\theta x+6\theta^3x^3}{(1-\theta^2x^2)^{7/2}}$. **6.396.** $1-\dfrac{(x-1)}{2}+\dfrac{3}{8}(x-1)^2-$ $-\dfrac{5}{16}(x-1)^3+\dfrac{35}{128}\dfrac{(x-1)^4}{\big(1+\theta(x-1)\big)^{9/2}}$. **6.397.** а) 0,842; б) 1,648; в) 0,049; г) 2,012. **6.398.** а) $\dfrac{1}{16}\dfrac{x^3}{(1+\theta x)^{5/2}}$; б) $\dfrac{5}{81}\dfrac{x^3}{(1+\theta x)^{8/3}}$. **6.400.** а) 1; б) 1/2; в) 1/2. **6.401.** Указание. Воспользоваться разложением функции по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до члена порядка k включительно. **6.402.** $f(x_0)=0$ — минимум, если $\varphi(x_0)>0$ и n четное; $f(x_0)=0$ — максимум, если $\varphi(x_0)<0$ и n четное; экстремума нет, если n нечетное. **6.403.** Указание. Воспользоваться первым достаточным условием экстремума. **6.404.** На $(-1,\ -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2},\ 1)$ убывает, на $(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ возрастает; $y_{\min}=y(-1/\sqrt{2})=-1/\sqrt{2}$, $y_{\max}=$ $=y(1/\sqrt{2})=1/2$. **6.405.** На $(-\infty,\ -1)$ и $(0,\ 1)$ возрастает, на $(-1,\ 0)$ и $(1,\ +\infty)$ убывает; $y_{\max}=y(-1)=y(1)=1$. **6.406.** На $(0,\ 1)$ и $(1,\ e)$ убывает, на $(e,\ +\infty)$ возрастает; $y_{\min}=y(e)=e$. **6.407.** На $\left(\dfrac{\pi}{3}(6k-1),\ \dfrac{\pi}{3}(6k+1)\right)$ убывает, на $\left(\dfrac{\pi}{3}(6k+1),\ \dfrac{\pi}{3}(6k+5)\right)$ возрастает; $y_{\min}=y\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=2k\pi+\left(\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\approx 2k\pi-0{,}685$, $y_{\max}=$ $=y\left(2k\pi+\dfrac{5\pi}{3}\right)=2(k+1)\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\approx 2(k+1)\pi+0{,}685$, $k\in\mathbb{Z}$. **6.408.** На $(0,\ 2)$ убывает, на $(2,\ +\infty)$ возрастает; $y_{\min}=y(2)=$

$= 2(1 - \ln 2) \approx 0{,}61$. **6.409.** Возрастает во всей области определения. **6.410.** На $\left(\frac{\pi}{4}(8k-3),\ \frac{\pi}{4}(8k+1)\right)$ возрастает, на $\left(\frac{\pi}{4}(8k+1),\ \frac{\pi}{4}(8k+5)\right)$ убывает; $y_{\max} = y\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = e^{2k\pi}\left(e^{\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1{,}55e^{2k\pi}$, $y_{\min} = y\left(2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = -e^{2k\pi}\left(e^{\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -1{,}55e^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. **6.411.** На $(0,\ 1/e)$ убывает, на $(1/e,\ +\infty)$ возрастает; $y_{\min} = y(1/e) = (1/e)^{1/e} \approx 0{,}69$. **6.412.** На $(-\infty,\ 0)$ убывает, на $(0,\ +\infty)$ возрастает; $y_{\min} = y(0) = 2$. **6.413.** $M = 3$, $m = -24$. **6.414.** $M = 8$, $m = 0$. **6.415.** $M = 0{,}6$, $m = -1$. **6.416.** $M = 1$, $m = 0{,}6$. **6.417.** $M = 2$, $m = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$. **6.418.** $M = \pi/4$, $m = 0$. **6.419.** $M = 1$, $m = -1$. **6.420.** $M = 1/\sqrt{e} \approx 0{,}61$, $m = -1/\sqrt{e} \approx -0{,}61$. **6.421.** Указание. Рассмотреть функцию $y = e^x - (1+x)$ и показать, что у нее существует единственный минимум: $y_{\min} = y(0) = 0$. **6.425.** $\frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}c$. **6.426.** $|AP| = \left(500 - \frac{100}{\sqrt{3}}\right)$ км $\approx 442{,}3$ км. **6.427.** $x = \frac{2p}{4+\pi}$, $y = \frac{1}{2}\left(p - x - \frac{\pi x}{2}\right)$. **6.428.** $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. **6.429.** $\frac{ah}{4}$. **6.430.** πa^3. **6.431.** $\frac{4}{27}\pi r^2 h$. **6.432.** $\frac{8}{3}\pi r^3$. **6.433.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$. **6.434.** $2r^2$. **6.435.** $N(1,\ 1)$. **6.436.** $x = R\sqrt{2}$, $y = R/\sqrt{2}$. **6.437.** Разделить отрезок пополам.

6.438. $r = \dfrac{RH\sqrt{R^2+H^2}}{(\sqrt{R^2+H^2} - R)(\sqrt{R^2+H^2} + 2R)}$. **6.439.** $h = (e^{2/3} - d^{2/3})^{3/2}$.

6.440. На $(-\infty,\ 0)$ — выпуклость вверх, на $(0,\ +\infty)$ — выпуклость вниз, $M(0,\ 1)$ — точка перегиба, $k = 7$. **6.441.** График всюду выпуклый вниз. **6.442.** На $(-\infty,\ 2)$ — выпуклость вверх, на $(2,\ +\infty)$ — выпуклость вниз, $M(2,\ 0)$ — точка перегиба, $k = 0$. **6.443.** На $(-\infty,\ -1)$ и $(1,\ +\infty)$ — выпуклость вниз, на $(-1,\ 1)$ — выпуклость вверх, $M_1(-1,\ \sqrt[3]{2})$ и $M_2(1,\ \sqrt[3]{2})$ — точки перегиба, $k_1 = k_2 = \infty$. **6.444.** График всюду выпуклый вверх. **6.445.** На $(-\infty,\ -1)$ — выпуклость вверх, на $(-1,\ +\infty)$ — выпуклость вниз, $M(-1,\ 1 - e^{-2})$ — точка перегиба. $k = -e^{-2} \approx -0{,}14$. **6.446.** На $(-\infty,\ 0)$ — выпуклость вверх, на $(0,\ +\infty)$ — выпуклость вниз, $M(0,\ 0)$ — точка перегиба, $k = \infty$. **6.447.** На $(0,\ e^{-5/6})$ — выпуклость вверх, на $(e^{-5/6},\ +\infty)$ — выпуклость вниз, $M\left(e^{-5/6},\ 1 - \frac{5}{6}e^{-5/6}\right)$ — точка перегиба, $k = -\frac{3}{2}e^{-5/3} \approx -0{,}28$. **6.448.** $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{2}$.

6.449. $\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$. **6.451.** Указание. Если x_0 — абсцисса точки перегиба, то $x_0 \operatorname{tg} x_0 = 2$. Тогда $y_0^2 = y^2(x_0) = x_0^2 \sin^2 x_0 = \dfrac{4x_0^2}{4 + x_0^2}$. **6.452.** $x = 2$, $y = 1$. **6.453.** $y = x - \dfrac{1}{3}$. **6.454.** $x = 0$, $y = 1$ (правая), $y = -1$ (левая). **6.455.** $y = 3x + \dfrac{\pi}{2}$ (правая), $y = 3x - \dfrac{\pi}{2}$ (левая). **6.456.** $x = 0$, $y = 2x$, $x = -1$ (левая). **6.457.** $y = 0$. **6.458.** $x = -\dfrac{1}{e}$, $y = x + \dfrac{1}{e}$. **6.459.** $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$. **6.461.** $y_{\min} = y(0) = -1$; $\left(\pm 1, -\dfrac{64}{125}\right)$ и $(\pm\sqrt{5}, 0)$ — точки перегиба. **6.462.** $y_{\max} = y(\pm 1) = 1$, $y_{\min} = y(\pm\sqrt{3}) = y(0) = 0$; $\left(\pm\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{21}}{5}}, \dfrac{6-\sqrt{21}}{20}\left(\dfrac{6-\sqrt{21}}{5} - 3\right)^2\right)$ и $\left(\pm\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{21}}{5}}, \dfrac{6+\sqrt{21}}{20}\left(\dfrac{6+\sqrt{21}}{5} - 3\right)^2\right)$ — точки перегиба. **6.463.** $y_{\max} = y(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, $y_{\min} = y(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$; $(0, 0)$ и $\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \mp\dfrac{7\sqrt{6}}{16}\right)$ — точки перегиба. **6.464.** $y_{\min} = y(3) = \dfrac{27}{8}$; $(0, 0)$ — точка перегиба; $x = 1$ и $y = \dfrac{x+2}{2}$ — асимптоты. **6.465.** $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(\sqrt[3]{4}) = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{4}$; $\left(-\sqrt[3]{2}, -\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ — точка перегиба; $x = 1$ и $y = x$ — асимптоты. **6.466.** $(0, 0)$ — точка перегиба; $x = \pm 1$ и $y = x$ — асимптоты. **6.467.** $y_{\max} = y(\sqrt[3]{4}) = -\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{4}$, $y_{\min} = y(0) = 0$; $\left(\sqrt[3]{2}, \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ — точка перегиба; $x = -1$ и $y = x$ — асимптоты. **6.468.** $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{3}$, $\left(\sqrt[3]{4}, \dfrac{1}{6}\sqrt[3]{4}\right)$ — точка перегиба; $x = -\sqrt[3]{2}$ и $y = 0$ — асимптоты. **6.469.** $(0, 0)$ — точка перегиба; $x = \pm 1$ и $y = 0$ — асимптоты. **6.470.** $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(-\sqrt[3]{2}) = -\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$; $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{7+\sqrt{45}}{2}}, -\dfrac{\sqrt[3]{2(7+\sqrt{45})^2}}{9+\sqrt{45}}\right)$ и $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{7-\sqrt{45}}{2}}, -\dfrac{\sqrt[3]{2(7-\sqrt{45})^2}}{9-\sqrt{45}}\right)$ — точки перегиба; $x = 1$ и $y = 0$ — асимптоты. **6.471.** $(0, 0)$ — точка перегиба; $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$ — асимптоты. **6.472.** $y_{\max} = y(-3) = -4{,}5$, $y_{\min} = y(3) = 4{,}5$; $(0, 0)$ — точка перегиба; $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $y = x$ —

асимптоты. **6.473.** $y_{\min} = y(-1) = -1/3$; $(-\sqrt[3]{4}, -\sqrt[3]{4}/6)$ — точка перегиба; $x = \sqrt[3]{2}$ и $y = 0$ — асимптоты. **6.474.** $y_{\min} = y(0) = -1$, $(\pm\sqrt{3}/3, -1/2)$ — точки перегиба; $y = 1$ — асимптота. **6.475.** $(0, 0)$ и $(\sqrt[3]{4}/2, 1/3)$ — точки перегиба; $x = -1$ и $y = 1$ — асимптоты. **6.476.** $y_{\max} = y(0) = 2$, $(\pm 1, \sqrt[3]{2})$ — точки перегиба; $y = 0$ — асимптота. **6.477.** $y_{\min} = y(1) = -1$; $(0, 0)$ и $(2, 0)$ — точки перегиба. **6.478.** $y_{\max} = y(0) = 2$, $y_{\min} = y(\pm 1) = \sqrt[3]{4}$. **6.479.** $(0, 0)$ — точка перегиба; $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ — асимптоты. **6.480.** $(0, 1)$ и $(1, 0)$ — точки перегиба; $y = -x$ — асимптота. **6.481.** $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt[3]{2})$ — точки перегиба. **6.482.** $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt[3]{2})$ — точки перегиба; $y = 2x$ — асимптота. **6.483.** $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt[3]{2})$ — точки перегиба; $y = x$ — асимптота. **6.484.** $(0, 0)$ — точка перегиба; $y = -1$ — левая асимптота, $y = 1$ — правая асимптота. **6.485.** $y_{\min} = y(-\sqrt[3]{3}) = 1$; $(0, 0)$ — точка перегиба; $x = -\sqrt[3]{2}$ — асимптота. **6.486.** $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(2) = \sqrt[3]{16}$; $(-\sqrt[3]{4}, -\sqrt[3]{2})$ — точка перегиба; $x = \sqrt[3]{4}$ и $y = x$ — асимптоты. **6.487.** $y_{\max} = y(-\sqrt[3]{6}) = -3/\sqrt[3]{2}$; $(0, 0)$ и $(\sqrt[3]{3}, 3/\sqrt[3]{25})$ — точки перегиба; $x = -\sqrt[3]{2}$ и $y = x$ — асимптоты. **6.488.** $y_{\min} = y(0) = 0$; $(\pm\sqrt{2}, 2/\sqrt{3})$ — точки перегиба; $y = x$ — правая асимптота, $y = -x$ — левая асимптота. **6.489.** $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ и $(-1, -1)$ — точки перегиба; $x = 0$ и $y = 1$ — асимптоты. **6.490.** $y_{\max} = y(1) = 1/\sqrt[3]{4}$; $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{0{,}16})$ — точки перегиба; $x = -1$, $y = 0$ — асимптоты. **6.491.** $y_{\max} = y(-\sqrt{3}) = 0$, $y_{\min} = y(\sqrt{3}) = 0$; $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ — точки перегиба; $x = 0$ — асимптота, $y = 1$ — правая асимптота, $y = -1$ — левая асимптота. **6.492.** $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(\pm\sqrt{2}) = 2$; $x = \pm 1$ — асимптоты, $y = x$ — правая асимптота, $y = -x$ — левая асимптота. **6.493.** $y_{\max} = y(0) = 1$, $y_{\min} = y(\pm 1) = 0$. **6.494.** $y_{\max} = y(0) = 2\sqrt{2}$, $y_{\min} = y(\pm\sqrt{2}) = 0$; $(\pm 1, 1)$ — точки перегиба. **6.495.** $y_{\min} = y\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\sqrt{2}$, $y_{\max} = y\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \sqrt{2}$; $\left(\dfrac{3\pi}{4} + k\pi, 0\right)$ — точки перегиба, $k \in \mathbb{Z}$. **6.496.** $y_{\min} = y\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{\max} = y\left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$ — асимптоты, $k \in \mathbb{Z}$. **6.497.** $y_{\min} = y(0) = 0$, $y = -\dfrac{\pi x}{2} - 1$ — левая асимптота, $y = \dfrac{\pi x}{2} - 1$ — правая асимптота.

6.498. $y_{\min} = y(1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$, $y_{\max} = y(-1) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3\pi}{4}$; $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ — точка перегиба; $y = \dfrac{x}{2} + \pi$ — левая асимптота, $y = \dfrac{x}{2}$ — правая асимптота. **6.499.** $y_{\max} = y(1) = e$, $\left(\dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}, e^{1/2}\right)$ — точки перегиба; $y = 0$ — асимптота. **6.500.** $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $y_{\min} = y(-1) = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; $(0, 0)$, $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$ — точки перегиба; $y = 0$ — асимптота. **6.501.** $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{e}$, $\left(1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}, (2 \mp \sqrt{2})e^{-(2\mp\sqrt{2})}\right)$ — точки перегиба; $x = 0$ — левая асимптота, $y = 0$ — асимптота. **6.502.** $y_{\max} = y(\pm 1) = \dfrac{1}{e}$, $y_{\min} = y(0) = 0$; $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 3e^{-3}\right)$ и $\left(\pm\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}e^{-1/2}\right)$ — точки перегиба; $y = 0$ — асимптота. **6.503.** $y_{\min} = y(1) = e$; $y = x + 1$ — асимптота, $x = 0$ — правая асимптота. **6.504.** $y_{\max} = y(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$, $y_{\min} = y(-\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$, $\left(\pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}}, \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}e^{-(1/4)(5+\sqrt{17})}\right)$ и $\left(\pm\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}}, \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}e^{-(1/4)(5-\sqrt{17})}\right)$ — точки перегиба; $y = 0$ — асимптота. **6.505.** $y_{\max} = y(-2) = -4\sqrt{e}$, $y_{\min} = y(1) = -1/e$; $(0{,}4,\ -1{,}6e^{-5/2})$ — точка перегиба; $x = 0$ — левая асимптота, $y = x-3$ — асимптота. **6.506.** $(1, e^2)$ — точка перегиба, $x = 0$ — правая асимптота, $y = 2x + 3$ — асимптота. **6.507.** $y_{\max} = y(\pm 1) = 2/\sqrt{e}$, $y_{\min} = y(0) = 1$; $\left(\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}, (3-\sqrt{3})e^{-(2-\sqrt{3})/2}\right)$ и $\left(\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}, (3+\sqrt{3})e^{-(2+\sqrt{3})/2}\right)$ — точки перегиба; $y = 0$ — асимптота. **6.508.** $y_{\min} = y(1) = e^2$, $x = 0$ — правая асимптота. **6.509.** $y_{\max} = y(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}e^{-3/2}$, $y_{\min} = y(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}e^{-3/2}$; $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm e^{-1/2})$, $(\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{6}e^{-3})$ — точки перегиба; $y = 0$ — асимптота. **6.510.** $(0, 0)$ — точка перегиба. **6.511.** $y_{\max} = y(e) = \dfrac{1}{e}$, $\left(e\sqrt{e}, \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$ — точка перегиба; $x = 0$ и $y = 0$ — правые асимптоты. **6.512.** $y_{\max} = y\left(\dfrac{1}{e}\right) = -e$; $x = 1$ — асимптота, $x = 0$ и $y = 0$ — правые асимптоты. **6.513.** $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$; $\left(\dfrac{1}{e\sqrt{e}}, -\dfrac{3}{2e^3}\right)$ — точка перегиба. **6.514.** $y_{\max} = y(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2e}$; $\left(\sqrt[6]{e^5},\ \dfrac{5}{6\sqrt[3]{e^5}}\right)$ — точка перегиба, $x = 0$ и $y = 0$ — правые асимптоты. **6.515.** $y_{\max} = y\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e^2}$, $y_{\min} = y(1) = 0$; $\left(e^{-1,5-\sqrt{1,25}},\ \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}e^{-3-\sqrt{5}}\right)$ и $\left(e^{-1,5+\sqrt{1,25}},\ \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}e^{-3+\sqrt{5}}\right)$ — точки перегиба. **6.516.** $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(\pm\sqrt{e}) = 2e$; $x = \pm 1$ — асимптоты. **6.517.** $y_{\max} = y(1/e^2) = 4/e^2$, $y_{\max} = y(-1) = 0$, $y_{\min} = y(-1/e^2) = -4/e^2$; $(0, 0)$, $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{e}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ — точки перегиба. **6.518.** $y_{\max} = y(0) = 0$; $x = \pm 1$ — асимптоты. **6.519.** $y_{\max} = y(\pm e) = 1/e^2$, $y_{\min} = y(\pm 1) = 0$; $\left(\pm e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}},\ \left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\right)^2 e^{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}\right)$, $\left(\pm e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}},\ \left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right)^2 e^{-\frac{5+\sqrt{13}}{2}}\right)$ — точки перегиба; $x = 0$ и $y = 0$ — асимптоты. **6.520.** $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{e}\right) = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{1/e} \approx 0{,}69$, выпукла вниз, $y \to 1$ при $x \to +0$, т. е. $M(0,\ 1)$ — точка прекращения. **6.521.** $y_{\max} = y(e) = e^{1/e} \approx 1{,}44$; $(0{,}58,\ 0{,}12)$ и $(4{,}35,\ 1{,}4)$ — точки перегиба; $y \to 0$ при $x \to +0$, т. е. $M(0,\ 0)$ — точка прекращения; $y = 1$ — асимптота. Указание. Точки перегиба удовлетворяют уравнению $\ln^2\dfrac{x}{e} + 2x\ln\dfrac{x}{e} - x = 0$, их можно не находить. **6.522.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва ($y_-(0) = y_+(0) = e$), функция убывающая, выпукла вниз, $x = -1$ — вертикальная асимптота, $y = 1$ — асимптота. **6.523.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва, $y = 0$ — асимптота. Точки экстремумов удовлетворяют уравнению $\operatorname{tg} x = x$. Точки перегиба удовлетворяют уравнению $\operatorname{tg} x = \dfrac{2x}{2-x^2}$. Указание. Точки экстремумов и перегиба можно не находить. **6.525.** $x_{\min} = -1$ при $t = 1$ $(y(1) = 3)$, $y_{\min} = -1$ при $t = -1$ $(x(-1) = 3)$; парабола с вершиной в начале координат, ось которой — прямая $y = x$ $(x > 0,\ y > 0)$. **6.526.** $x_{\min} = y_{\min} = 1$ при $t = 0$ (точка возврата); $y = 2x$ — асимптота при $t \to +\infty$. **6.527.** Астроида (см. т. 1, гл. 1, § 3, рис. 18). **6.528.** $\left(-1-3\pi,\ -1+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ — максимум, $\left(1-3\pi,\ 1-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ — минимум, $(-3\pi,\ 0)$ — точка перегиба, $y = x$ и $y = x + 6\pi$ — асимптоты. **6.529.** Трехлепестковая роза; $D = [0,\ \pi/3] \cup [2\pi/3,\ \pi] \cup [4\pi/3,\ 5\pi/3]$; экстремумы при $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 5\pi/6$, $\varphi = 3\pi/2$. **6.530.** Кардиоида, полюс — точка возврата, $r_{\max} = r(0) = 2a$, $r_{\min} = r(\pi) = 0$. **6.531.** $D = (0,\ +\infty)$;

линия спирально завивается вокруг полюса, асимптотически к нему приближаясь; $(\sqrt{2\pi}, 1/2)$ — точка перегиба; полярная ось ($\varphi = 0$) — горизонтальная асимптота. **6.532.** Лемниската Бернулли (см. т. 1, гл. 1, § 3, рис. 12). **6.533.** Прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{4}$. **6.534.** В плоскости Oxy дуга окружности $x^2 + y^2 = 2$ между точками $(1, 1)$ и $(0, \sqrt{2})$, пробегаемая против часовой стрелки. **6.535.** Правая ветвь гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$, $y = -1$, пробегаемая снизу вверх, если смотреть от начала координат. **6.536.** В плоскости Oxy парабола $y = \frac{1}{9}(6x - x^2)$, пробегаемая слева направо. **6.537.** Винтовая линия $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$. **6.538.** Астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$, $z = 0$. **6.539.** Линия пересечения цилиндров $y = x^2$, $z = x^3$, пробегаемая снизу вверх. **6.540.** *Кривая Вивиани* — линия пересечения сферы и кругового цилиндра: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = x$. **6.541.** Эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z = 2$. **6.542.** Дважды пробегаемая парабола $y = x^2 + x$, $z = 3$. **6.544.** Прямая $4x + 3y = 0$, $z = 0$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. **6.545.** Парабола (в плоскости Oxy) $y = \frac{1}{9}(12x - x^2)$; $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}$, $\mathbf{v}|_{t=0} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{v}|_{t=1} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v}|_{t=2} = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{v}|_{t=3} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. **6.546.** Циклоида (в плоскости Oxy) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$; $\mathbf{v} = 2(1 - \cos t)\mathbf{i} + 2\sin t \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{v}|_{t=\pi/2} = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $\mathbf{v}|_{t=\pi} = 4\mathbf{i}$. **6.547.** $0{,}6\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j}$. **6.548.** $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$. **6.549.** а) $\cos t \cdot \mathbf{i} - \sin 2t \cdot \mathbf{j} + \cos 2t \cdot \mathbf{k}$; б) $(\cos t - t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$; в) $(1 - \sin t)\mathbf{i} + \mathbf{j} + \cos t \cdot \mathbf{k}$. **6.550.** а) $\mathbf{i}$; б) $12\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$. **6.551.** $1 + 3t^2 + 5t^4$. **6.552.** $(3t^2 - 2t)\mathbf{i} + (3t^2 - 2t)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$. **6.553.** $\cos t(\mathbf{i} + 2u\mathbf{j} + 3u^2\mathbf{k})$. **6.554.** а) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\cos t \cdot \mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_{t=0} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; б) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -(2\sin t + t\cos t)\mathbf{j} + (2\cos t - t\sin t)\mathbf{k}$, $\left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_{t=0} = 2\mathbf{k}$. **6.555.** $\mathbf{w} = 2\sin t \cdot \mathbf{i} + 2\cos t \cdot \mathbf{j}$; $\mathbf{w}|_{t=\pi/2} = 2\mathbf{i}$; $\mathbf{w}|_{t=\pi} = -2\mathbf{j}$. **6.556.** $\mathbf{w} = -2\mathbf{j}$, $w_\tau = \frac{4(t-2)}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}$, $w_n = \frac{6}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}$; при $t = 0$ $w_\tau = -1{,}6$, $w_n = 1{,}2$. Указание. $w_\tau = \frac{dv}{dt}$, $w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}$. **6.557.** $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\mathbf{j}$, $w_\tau = 1$, $w_n = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}$; при $t = 0$ $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $w_n = 1$. **6.558.** $x + 2z = 1$, $y = 2$ (касательная); $2x - z = 3$ (нормальная плоскость). **6.559.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-8/3}{2}=\dfrac{z-4}{4}$ (касательная); $3x+6y+12z-70=0$ (нормальная плоскость). **6.560.** $y=z,\ x=a$ (касательная); $y+z=0$ (нормальная плоскость). **6.561.** $\dfrac{x-1}{12}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-4}{3}$ (касательная); $12x-4y+3z=12$ (нормальная плоскость). **6.562.** $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}$ (касательная); $8x+10y+7z=12$ (нормальная плоскость). **6.563.** $K|_{x=0}=2,\ K|_{x=1}=\dfrac{2}{5\sqrt5}$. **6.564.** $K_A=3,\ K_B=1/9$. **6.565.** $3/\sqrt2$. **6.566.** $1/2$. **6.567.** $\dfrac{1}{2\sqrt2}$. **6.568.** $K=\dfrac{3}{4a\sin(\varphi/2)}$, $K|_{\varphi=\pi}=\dfrac{3}{4a}$. **6.569.** $\dfrac{3}{a}$. **6.570.** а) $\dfrac{(9x^{4/3}+1)^{3/2}}{6x^{1/3}}$; б) $\dfrac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}$. **6.571.** а) $\sqrt[3]{|axy|}$; б) $\dfrac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}=\dfrac{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^{3/2}}{ab}$. **6.572.** $4a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|$. **6.573.** а) $\dfrac{a^2}{3r}$; б) $\dfrac{(a^2+r^2)^{3/2}}{2a^2+r^2}$. **6.574.** $\left(\dfrac{\ln2}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt2}\right)$. Указание. Составить выражение кривизны K и найти ее точку экстремума. **6.575.** $\left(\dfrac{1}{\sqrt2},\ -\dfrac{\ln2}{2}\right)$. **6.576.** $\left(0,\ \dfrac{a}{2}\right)$; $x^2+\left(y-\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}$. **6.577.** $\left(0,\ \dfrac12\right)$; $x^2+\left(y-\dfrac12\right)^2=\dfrac14$. **6.578.** $\left(-1,\ e-\dfrac1e\right)$; $(x+1)^2+\left(y-e+\dfrac1e\right)^2=e^2$. **6.579.** $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$; $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+y^2=1$. **6.580.** $(\pi a,\ -2a)$; $(x-\pi a)^2+(y+2a)^2=16a^2$. **6.581.** а) $X=\dfrac{x-9x^5}{2},\ Y=\dfrac{15x^4+1}{6x}$; б) $X^{2/3}-Y^{2/3}=(2a)^{2/3}$; в) $(X+Y)^{2/3}+(X-Y)^{2/3}=2a^{2/3}$. **6.582.** $Y=a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{X}{a}$. **6.583.** $X^2=\dfrac{4}{27}Y^3$. **6.584.** $\boldsymbol\tau=\dfrac{1}{\sqrt3}(\mathbf i-\mathbf j+\mathbf k),\ \boldsymbol\nu=\dfrac{1}{\sqrt2}(\mathbf i+\mathbf j)$, $\boldsymbol\beta=\dfrac{1}{\sqrt6}(-\mathbf i+\mathbf j+2\mathbf k)$; $x-1=-(y-1)=z$ (касательная); $x=y$, $z=0$ (главная нормаль); $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$ (бинормаль). **6.585.** $\boldsymbol\tau=\mathbf i$, $\boldsymbol\nu=-\dfrac{1}{\sqrt2}(\mathbf j+\mathbf k),\ \boldsymbol\beta=\dfrac{1}{\sqrt2}(\mathbf j-\mathbf k)$; $y=2,\ z=4$ (касательная); $y-z+2=0$, $x=\pi$ (главная нормаль); $y+z=6,\ x=\pi$ (бинормаль). **6.586.** $\boldsymbol\tau=\dfrac13(2\mathbf i+\mathbf j+2\mathbf k),\quad \boldsymbol\nu=\dfrac13(-\mathbf i-2\mathbf j+2\mathbf k),\ \boldsymbol\beta=\dfrac13(2\mathbf i-2\mathbf j-\mathbf k)$; $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ (касательная); $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$ (главная нормаль);

$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ (бинормаль). **6.587.** $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{18}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k})$, $\boldsymbol{\nu} = -\frac{1}{3}(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})$, $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$; $x-1 = y-1 = \frac{z-2}{4}$ (касательная); $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ (главная нормаль); $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{0}$ (бинормаль). **6.588.** $x+2y=3$ (соприкасающаяся плоскость); $z=1$ (нормальная плоскость); $2x-y=1$ (спрямляющая плоскость). **6.589.** $y=x$ (соприкасающаяся плоскость); $x+y=\pi/\sqrt{2}$ (нормальная плоскость); $z=0$ (спрямляющая плоскость). **6.590.** $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{i}$, $\boldsymbol{\nu}=\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\beta}=-\mathbf{j}$, $y=0$, $z=1$ (касательная); $x=1$, $y=0$ (главная нормаль); $x=1$, $z=1$ (бинормаль); $y=0$ (соприкасающаяся плоскость); $x=1$ (нормальная плоскость); $z=1$ (спрямляющая плоскость). **6.591.** $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i}-\mathbf{j})$, $\boldsymbol{\nu} = -\frac{1}{\sqrt{30}}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k})$, $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{0}$ (касательная); $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{5}$ (главная нормаль); $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ (бинормаль); $x+2y-z-2=0$ (соприкасающаяся плоскость); $2x-y=0$ (нормальная плоскость); $x+2y+5z-20=0$ (спрямляющая плоскость). **6.592.** $K = \frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$, $\sigma = -\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$; при $t=0$ $K=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\sigma=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **6.593.** $K = 2\sqrt{\frac{9t^4+9t^2+1}{(9t^4+4t^2+1)^3}}$, $\sigma = \frac{3}{9t^4+9t^2+1}$; при $t=0$ $K=2$, $\sigma=3$. **6.594.** $K=\sigma=\frac{1}{3(t^2+1)^2}$; при $t=1$ $K=\sigma=\frac{1}{12}$. **6.595.** $K=\frac{2t}{(2t^2+1)^2}$, $\sigma=-\frac{2t}{(2t^2+1)^2}$; при $t=1$ $K=\frac{2}{9}$, $\sigma=-\frac{2}{9}$. **6.596.** $K=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sigma=\frac{1}{3}$. **6.597.** $K=\sqrt{\frac{9y^4+4y^6+1}{(y^6+y^2+1)^3}}$, $\sigma=-\frac{6y}{9y^4+4y^6+1}$; при $y=1$ $K=\frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$, $\sigma=-\frac{3}{7}$. **6.598.** $\mathbf{w}=2\mathbf{j}+4t\mathbf{k}$, $w_\tau=4t$, $w_\nu=2$; $w_\tau|_{t=1}=4$. У к а з а н и е. $w_\tau=\frac{dV}{dt}$, $w_\nu=\frac{v^2}{R}$. **6.599.** Парабола $y^2=x$; $z'(t)=2t+i$. **6.600.** Прямая $x-y=2$; $z'(t)=e^{i\frac{\pi}{4}}$. **6.601.** Верхняя полуокружность $y=\sqrt{4-x^2}$; $z'(t)=2ie^{it}$. **6.602.** Эллипс $x=4\cos t$, $y=2\sin t$; $z'(t)=i(3e^{it}-e^{-it})$. **6.603.** Правая ветвь гиперболы $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; $z'(t) = (2+i)e^t - (2-i)e^{-t}$. **6.604.** Дважды пробегаемая «правая» ветвь параболы $y = x^2$; $z'(t) = 2t + 4it^3$. **6.605.** Арка циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$; $z'(t) = 1 - e^{-it}$. **6.606.** Эвольвента окружности $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$; $z'(t) = ate^{it}$. **6.607.** r', $r\varphi'$; $r'' - r{\varphi'}^2$, $2r'\varphi' + r\varphi''$. Указание. Представить закон движения в показательной форме $z = re^{i\varphi}$ и найти производные z' и z''. Искомые величины суть коэффициенты при $e^{i\varphi}$ и $ie^{i\varphi}$. **6.608.** Скорость $v = izf'(z)$. Указание. Воспользоваться показательной формой комплексного числа: $z = Re^{i\varphi}$ и найти производную $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{dw}{dz}\dfrac{dz}{dt}$. **6.609.** Указание. а) Используя результат примера 9, показать, что $D^k(e^{\lambda t}) = \lambda^k e^{\lambda t}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. б) Предварительно доказать, что $D^k\big(e^{\lambda t}z(t)\big) = e^{\lambda t}(D+\lambda)^k z(t)$. Действительно, несложной проверкой убеждаемся, что $D\big(e^{\lambda t}z(t)\big) = e^{\lambda t}(D+\lambda)z(t)$, и далее, используя этот результат, что $D^k\big(e^{\lambda t}z(t)\big) = D\big(D^{k-1}(e^{\lambda t}z(t))\big) = D\big(e^{\lambda t}(D+\lambda)^{k-1}z(t)\big) = e^{\lambda t}(D+\lambda)^k z(t)$. **6.611.** $-9e^{2t}\sin 3t$. **6.612.** 0. Указание. $e^{t/2}\sin t = \operatorname{Im} e^{(1/2+i)t}$. **6.613.** $e^t(\cos 2t - 8\sin 2t)$. **6.614.** $t(18-t^2)\cos t + (6-9t^2-t^3)\sin t$. **6.615.** $e^t(\sin 2t + 4t(1+t^2)\cos 2t) \times (1+t^2)^{-3/2}$. **6.616.** $e^t(\cos t - 2t\sin t)$.

Глава 7

7.1. $\dfrac{x^8}{4} + C$. **7.2.** $3x\sqrt[3]{x} + C$. **7.3.** $3\ln|x| - \dfrac{5}{x} + C$. **7.4.** $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{2}x^2 - \ln|x| + C$. **7.5.** $x + 6\sqrt{x} + 3\ln x - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + C$. **7.6.** $\sin x + C$. **7.7.** $\dfrac{2}{b}\sqrt{a+bx} + C$. **7.8.** $-\dfrac{1}{3}e^{2-3x} + C$. **7.9.** $-\dfrac{3}{\ln 5}\cdot 5^{-x/3} + C$. **7.10.** $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg} 4x + C$. **7.11.** $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C$. **7.12.** $\dfrac{1}{8}\sin 8x + C$. **7.13.** $x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **7.14.** $\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$. **7.15.** $x^3 + x^2 + \ln|x| + C$. **7.16.** $-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + C$. **7.17.** $\dfrac{2}{3}x\sqrt{mx} + C$. **7.18.** $\dfrac{n}{n-1}x^{(n-1)/n} + C$. **7.19.** $3\sqrt[3]{x} - \dfrac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - 4\sqrt[4]{x} + C$. **7.20.** $2\sqrt{ax} + 2x + \dfrac{2}{3}\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}} + C$. **7.21.** $\dfrac{x^3}{3} + 2\ln|x| + C$. **7.22.** $\dfrac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C$.

7.23. $\frac{1}{\ln 2}2^x+x^3+C$. **7.24.** $x^2+3\sin x+C$. **7.25.** $-2\operatorname{ctg} x-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **7.26.** $3\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} x+C$. **7.27.** $-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+C$. **7.28.** $\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$. **7.29.** а) $-x+\operatorname{tg} x+C$; б) $x-\operatorname{th} x+C$. Указание. Использовать тождества: а) $\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-1$; б) $1-\operatorname{th}^2 x=\operatorname{sch}^2 x$. **7.30.** $\operatorname{tg} x+C$. **7.31.** $\frac{\pi}{2}x+{}$ $+C$. **7.32.** $x+\cos x+C$. **7.33.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **7.34.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right|+{}$ $+C$. **7.35.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. **7.36.** $\ln(x+\sqrt{x^2+3})-\ln|x+\sqrt{x^2-3}|+C$. **7.37.** $\ln|x|+2\operatorname{arctg} x+C$. **7.38.** $\frac{x^3}{3}+(a+b)\frac{x^2}{2}+abx+C$. **7.39.** $ax+{}$ $+\frac{9}{4}a^{2/3}x^{4/3}+\frac{9}{5}a^{1/3}x^{5/3}+\frac{x^2}{2}+C$. **7.40.** $x+3\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|-2\operatorname{tg} x+C$. **7.41.** а) $-\operatorname{ctg} x-x+C$; б) $x-\operatorname{cth} x+C$. **7.42.** $\ln|x+\sqrt{x^2-7}|+C$. **7.43.** $x-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right|+C$. **7.44.** $\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)^3}+C$. **7.45.** $-\frac{3}{16}\times$ $\times(3-4\sin x)^{4/3}+C$. **7.46.** $\frac{\operatorname{ch}^2 x}{2}+C$. **7.47.** $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$. **7.48.** $-\frac{1}{\ln x}+C$. **7.49.** $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$. **7.50.** $-\frac{1}{b}\ln|a-b\operatorname{tg} x|+C$. **7.51.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}\times$ $\times\ln\left|2-3\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right|+C$. **7.52.** $\ln|\sin x|+C$. **7.53.** $\frac{3^{4x}}{4\ln 3}+C$. **7.54.** $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$. **7.55.** $-\cos(\ln x)+C$. **7.56.** $-2\cos\sqrt{x}+C$. **7.57.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$. **7.58.** $-\frac{1}{3}\operatorname{cth} 3x+C$. **7.59.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+C$. **7.60.** $-\frac{1}{2\ln 5}\cdot 5^{-x^2}+C$. **7.61.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right|+C$. **7.62.** $-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}(e^{-ax})+{}$ $+C$. **7.63.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+C$. **7.64.** $\frac{1}{3}\ln|3x+\sqrt{9x^2-1}|+C$. **7.65.** $-\ln(\cos x+\sqrt{\cos^2 x+4})+C$. **7.66.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4)+C$. **7.67.** $\frac{1}{2}\times$ $\times\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})+C$. **7.68.** $\frac{1}{b^2}\ln|a^2+b^2x|+C$. **7.69.** $\frac{1}{2a\cos^2 ax}+C$. **7.70.** $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}+C$. **7.71.** $\frac{1}{7-e^x}+C$. **7.72.** $-\ln|\cos x|+C$. **7.73.** $\frac{1}{4}\ln|\operatorname{sh} 4x|+C$. **7.74.** $-\frac{a^{1/x}}{\ln a}+C$. **7.75.** $\frac{1}{2}\operatorname{th}(x^2+1)+C$. **7.76.** $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a-bx}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-bx}+\sqrt{a+b}}\right|+C$. **7.77.** $\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{7}}+C$.

7.78. $\frac{1}{8}\ln(4x^2+7)+C$. **7.79.** $\frac{1}{3}\ln(x^3+\sqrt{x^6+1})+C$. **7.80.** $\frac{1}{\ln a}\times$ $\times\ln(a^x+\sqrt{a^{2x}-1})+C$. **7.81.** $\ln|x+2|+\frac{3}{x+2}+C$. Указание. $\frac{x-1}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)-3}{(x+2)^2}=\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$. **7.82.** $x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. **7.83.** $x-\ln|x^2-4|+\frac{7}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$. **7.84.** $\frac{1}{4ab}\ln\left|\frac{ax^2-b}{ax^2+b}\right|+C$. **7.85.** $\frac{1}{48}\ln\left|\frac{3+2x^4}{3-2x^4}\right|+C$. **7.86.** $\frac{1}{5}\ln|x^5+5x-8|+C$. **7.87.** $\frac{1}{25}\times$ $\times\sqrt[4]{(5x^4-3)^5}+C$. **7.88.** $3\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. **7.89.** $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(2x)+C$. **7.90.** $\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+\frac{1}{b}\times$ $\times\ln(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2})+C$. **7.91.** $-\frac{5}{\sqrt[5]{a^x}\ln a}+C$. **7.92.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(4+e^x)^4}+C$. **7.93.** $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+4})+C$. **7.94.** $x-\frac{1}{\ln 2}\ln(2^x+1)+C$. Указание. $\frac{1}{2^x+1}=\frac{(1+2^x)-2^x}{2^x+1}=1-\frac{2^x}{2^x+1}$. **7.95.** $e^{\arcsin x}-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+$ $+C$. **7.96.** $e^{\sqrt{x^2-1}}+C$. **7.97.** $-\frac{2}{3}\sqrt{(3-\operatorname{ch}x)^3}+C$. **7.98.** $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\ln x}+C$. **7.99.** $\frac{1}{2}\arcsin(2\ln x)+C$. **7.100.** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$. Указание. $\sin^2 x=$ $=\frac{1-\cos 2x}{2}$. **7.101.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$. Указание. $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. **7.102.** $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2\sqrt{2}}\right|+C$. **7.103.** $x+\frac{1}{a}\sin^2 ax+C$. **7.104.** $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. **7.105.** $\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{3}{2}\sin 2x+$ $+\frac{\sin 4x}{8}+C$. **7.106.** $2\sqrt{3-\cos^2 x}+C$. **7.107.** $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{\cos^4 x+3})+$ $+C$. **7.108.** $\ln|\operatorname{tg}x|+C$. Указание. $\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$. **7.109.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\times$ $\times\ln|\cos\sqrt{3}x|+C$. **7.110.** $\frac{1}{a}\ln\operatorname{ch}ax+C$. **7.111.** $\frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b)-x+$ $+C$. **7.112.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(x^3-3)-\frac{x^3}{3}+C$. **7.113.** $e^{\sec x}+C$. **7.114.** $\frac{1}{3}\times$ $\times\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|+C$. **7.115.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right|+C$. **7.116.** $2\ln(\sqrt{x}+1)+C$. **7.117.** $e^x-\ln(e^x+1)+C$.

7.118. $\frac{1}{25}\left(\frac{(5x-1)^{21}}{21}+\frac{(5x-1)^{20}}{20}\right)+C.$

7.119. $-2\sqrt{1-e^x}+\frac{4}{3}\sqrt{(1-e^x)^3}-\frac{2}{5}\sqrt{(1-e^x)^5}+C.$

7.120. $2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}-\frac{x+1}{2}+2\sqrt{x+1}-2\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)\right)+C.$

7.121. $\frac{1}{2(3-x)^6}-\frac{1}{5(3-x)^5}+C.$ **7.122.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\frac{\sqrt{3+e^x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+e^x}+\sqrt{3}}+C.$

7.123. $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C.$ **7.124.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$ **7.125.** $x\sin x+ \cos x+C.$ **7.126.** $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$ **7.127.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x-\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2}+C.$

7.128. $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C.$ **7.129.** $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C.$ **7.130.** $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C.$ **7.131.** $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C.$

7.132. $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)+C.$ Указание. Положить $u=x^2,\ dv=xe^{-x^2}\,dx.$

7.133. $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C.$ **7.134.** $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+C.$

7.135. $\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+C.$ **7.136.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C.$

7.137. $\frac{(x-\sqrt{1-x^2}e^{\arccos x}}{2}+C.$ **7.138.** $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C.$

7.139. $\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C.$ **7.140.** $\frac{3^x}{\ln^2 x}(x\ln 3-1)+C.$

7.141. $(x^2-2x+1)\sin x+2(x-1)\cos x+C.$ **7.142.** $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C.$

7.143. $\frac{x}{2}\big(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\big)+C.$ **7.144.** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$ Указание. Сделать подстановку $x=t^2$ и проинтегрировать по частям.

7.145. $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

7.146. $-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C.$

7.147. $-x\operatorname{ctg} x+\ln|\sin x|-\frac{x^2}{2}+C.$

7.148. $e^{-x}\frac{2\sin 2x-\cos 2x-5}{10}+C.$ **7.149.** $-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C.$

Указание. Положить $u=x,\ dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}.$

7.150. $\triangleleft$ $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx =$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int x\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} =$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right).$$

Отсюда $I_2 = \dfrac{1}{2a^2}\left(\dfrac{x}{x^2+a^2} + \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\right) + C,$

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{3}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C. \ \triangleright$$

7.151. $\triangleleft$ Полагаем $u = \sqrt{x^2+a}$, $dv = dx$. Тогда $du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}}$, $v = x$,

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} -$$

$$- \int \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Отсюда $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C.$ $\triangleright$

7.152. $\triangleleft$ Полагаем $u = x$, $dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Тогда $du = dx$, $v = -\sqrt{a^2-x^2}$. Имеем

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = -x\sqrt{a^2-x^2} +$$

$$+ \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Отсюда $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$ $\triangleright$

7.153. $\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{4}\right)\arcsin x + \dfrac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C.$ **7.154.** $(\ln(\ln x) - 1)\ln x + C.$

7.155. $\dfrac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{1}{6}\ln(x^2+1) + C.$ **7.156.** $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$ **7.157.** $\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C.$ Указание. См. решение задачи 7.151. **7.158.** $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+5}\right| + C.$ **7.159.** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{6}} + C.$

7.160. $\frac{5}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right| + \frac{1}{2}\ln|x^2-5x+4| + C$. **7.161.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-3x+3) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C$. **7.162.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-6}{x}\right| + C$. **7.163.** $2\ln(x^2-2x+6) + \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{5}} + C$. **7.164.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+3}{2} + C$. **7.165.** $\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x-3}{3^x-1}\right| + C$. **7.166.** $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right| + C$. **7.167.** $-\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{17}{3}\ln|x-3| + C$. **7.168.** $x - \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{5}{4}\ln|x-2| + C$. **7.169.** $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + C$. **7.170.** $-\frac{4}{3(x-1)} + \frac{20}{9}\ln|x-1| + \frac{7}{9}\ln|x+2| + C$.

7.171. $-\frac{1}{2(x^2-5x+4)^2} + C$. **7.172.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2} + C$.

7.173. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C$.

7.174. $-\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{3x}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x\right) + C$.

Указание. $\int\frac{x-1}{(x^2+1)^3}\,dx =$

$$= \int\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx - \int\frac{dx}{(x^2+1)^3} = -\frac{1}{4(x^2+1)^2} - \int\frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Далее $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$ вычислить по рекуррентной формуле, выведенной в задаче 7.150. **7.175.** $\frac{1}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{18}\ln(x^2+x+1) + \frac{x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$. Указание. $\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$. Применяя метод неопределенных коэффициентов, получаем $\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{9(x-1)} - \frac{1}{3}\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{9}\frac{x+2}{x^2+x+1}$. Для нахождения $\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int\frac{dx}{\left((x+1/2)^2+3/4\right)^2}$ рекомендуется подстановка $x+\frac{1}{2} = t$ и затем использование рекуррентной формулы, выведенной в задаче 7.150. **7.176.** $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C$.

7.177. $\frac{1}{2}\ln|x+1| - 2\ln|x-2| + \frac{5}{2}\ln|x-3| + C$. **7.178.** $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4} +$

$+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}+C$. **7.179.** $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}+\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|+C$. **7.180.** $x+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\operatorname{arctg}x+C$. **7.181.** $\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{\operatorname{arctg}x}{2}+C$. **7.182.** $-\dfrac{1}{a^2x}-\dfrac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$. Указание. $\dfrac{1}{x^2(x^2+a^2)}=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{(a^2+x^2)-x^2}{x^2(x^2+a^2)}$.
7.183. $\dfrac{1}{4a^3}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|-\dfrac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$. Указание. $\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}=\dfrac{1}{2a^2}\dfrac{(x^2+a^2)-(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}$. **7.184.** $-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$.
7.185. $\ln|x|-\dfrac{1}{6}\ln(x^6+1)+\dfrac{1}{6(x^6+1)}+C$. Указание. $\dfrac{1}{x(x^6+1)^2}=\dfrac{(1+x^6)-x^6}{x(x^6+1)^2}$. **7.186.** $-\dfrac{1}{4x^4}+\dfrac{1}{2x^2}+\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.
7.187. $\dfrac{1}{12}\ln\left((x^4+1)(x^4-2)^2\right)+C$. Указание. Положить $x^4=t$.
7.188. $-\dfrac{1}{6(x+1)^6}+\dfrac{3}{7(x+1)^7}-\dfrac{1}{4(x+1)^8}+C$.
7.189. $-\dfrac{1}{12}\ln(x^6+x^3+2)+\dfrac{1}{6}\ln|x^3-1|+\dfrac{1}{6\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x^3+1}{\sqrt{7}}+C$.
7.190. $-\cos x+\dfrac{\cos^3 x}{3}+C$. **7.191.** $\dfrac{1}{7\cos^7 x}-\dfrac{1}{5\cos^5 x}+C$. **7.192.** $\sin x-\sin^3 x+\dfrac{3}{5}\sin^5 x-\dfrac{1}{7}\sin^7 x+C$. **7.193.** $\dfrac{3x}{8}+\dfrac{\sin x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{16}+C$.
7.194. $\dfrac{x}{8}-\dfrac{\sin 4x}{32}+C$. **7.195.** $\dfrac{x}{16}-\dfrac{\sin 4x}{64}-\dfrac{\sin^3 2x}{48}+C$. **7.196.** $-\operatorname{ctg}x-\dfrac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\dfrac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+C$. **7.197.** $\dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. **7.198.** $-\dfrac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+3\ln|\operatorname{tg}x|+\dfrac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$. **7.199.** $-\dfrac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}-\dfrac{2}{\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x+C$.
7.200. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right)+C$. **7.201.** $\dfrac{\sin x}{4\cos^4 x}+\dfrac{3}{8}\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{3}{8}\ln|\operatorname{tg}x+\sec x|+C$. **7.202.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$. **7.203.** $x+2\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{3}\operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{2}-2\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|+C$. **7.204.** $-2\sqrt{\operatorname{ctg}x}+C$.
7.205. $\sin x-\dfrac{2}{3}\sin^3 x+\dfrac{\sin^5 x}{5}+C$. **7.206.** $-2\sqrt{\cos x}+\dfrac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}+C$.
7.207. $\dfrac{5}{16}x-\dfrac{1}{8}\sin 4x+\dfrac{1}{96}\sin^3 4x+\dfrac{3}{128}\sin 8x+C$. **7.208.** $\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$.
7.209. $3\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}\right|-\dfrac{3}{2\operatorname{tg}^2(x/3)}+C$. **7.210.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+C$.

7.211. $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{20}\sin 5x + C$. **7.212.** $-\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C$. **7.213.** $-\frac{\sin 25x}{50} + \frac{\sin 5x}{10} + C$. **7.214.** $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6} + 3\sin\frac{x}{6} + C$. **7.215.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos x + C$. **7.216.** $\frac{\sin(x/2)}{2} + \frac{\sin 5x}{20} + \frac{\sin 7x}{28} + C$. **7.217.** $\frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$. **7.218.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}(x/2)}\right| + C$.

7.219. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) + C$. **7.220.** $\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x + x + C$. Указание. Числитель и знаменатель подынтегральной функции умножить на $(1 - \sin x)$.

7.221. $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x - \sqrt{7}}{2\operatorname{tg} x + \sqrt{7}}\right| + C$. **7.222.** $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x - 1}{2}\right) + C$.

7.223. $-\frac{1}{4}\ln(1 + 4\cos^2 x) + C$. **7.224.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}(x/2) - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

7.225. $\frac{2}{5(\operatorname{tg}(x/2) - 1)} - \frac{2}{5\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{15}} + C$.

Указание. $\frac{1}{(\sin x + 4)(\sin x - 1)} = \frac{(\sin x + 4) - (\sin x - 1)}{5(\sin x + 4)(\sin x - 1)}$.

7.226. $\ln|\sin x - \cos x| + C$. **7.227.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{tg} x + 6}\right| + C$. **7.228.** $\frac{\operatorname{sh} 6x}{12} + \frac{x}{2} + C$. **7.229.** $\frac{\operatorname{ch}^3 2x}{6} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{2} + C$. **7.230.** $\frac{\operatorname{sh} 4x}{32} - \frac{x}{8} + C$. **7.231.** $\frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} + C$. **7.232.** $-2\operatorname{cth} 2x + C$. **7.233.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{th} x - 2}{\operatorname{th} 2 + 2}\right| + C$. Указание. Разделить числитель и знаменатель подынтегральной дроби на $\operatorname{ch}^2 x$. **7.234.** $-\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \operatorname{ctg} x + C$. Указание. Числитель и знаменатель подынтегральной дроби умножить на $\operatorname{ch} x + 1$. **7.235.** $2\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2} + C$.

7.236. $\ln|\operatorname{sh} x| - \frac{\operatorname{cth}^2 x}{2} + C$. **7.237.** $x - \operatorname{th} x - \frac{\operatorname{th}^3 x}{3} + C$.

7.238. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2} + C$. **7.239.** $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5} + \frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2} + C$.

7.240. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C$. **7.241.** $6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+a} - 6\ln\sqrt[6]{x+a} + 3\ln|1 + \sqrt[3]{x+a}| + C$. **7.242.** $\frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4} - \frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7} + C$. **7.243.** $\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} + 1}\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C$. **7.244.** $6\sqrt[6]{x} -$

$-\ 12\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt[6]{x}}{2}+C.$ **7.245.** $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+C.$

7.246. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}{x+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}\right|+C.$ **7.247.** $\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

7.248. $\sqrt{x^2-1}-\arccos\dfrac{1}{x}+C.$ **7.249.** $\dfrac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}-a^2\sqrt{a^2-x^2}+C.$

7.250. $\arcsin\dfrac{x-4}{4}+C.$ **7.251.** $\ln\left|x+\dfrac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|+C.$

7.252. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\dfrac{(x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+C.$ **7.253.** $-\sqrt{2-x-x^2}+\dfrac{7}{2}\arcsin\dfrac{2x+1}{3}+$ $+\ C.$ **7.254.** $\sqrt{x^2-6x+1}+C.$

7.255. $\sqrt{x^2+x+1}-\dfrac{1}{2}\ln\left(x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$

7.256. $\ln\left|\dfrac{x}{1+4x+\sqrt{x^2+8x+1}}\right|+C.$ **7.257.** $-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5-x}{x-1}}+C.$

7.258. $-\dfrac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2-x+\sqrt{2x^2-x+1}}{|x|}+C.$ **7.259.** $-\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{9(x+2)}-$ $-\ \dfrac{2}{27}\ln\dfrac{5-2x+3\sqrt{x^2+5}}{|x+2|}+C.$ **7.260.** $\dfrac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+$ $+\ C.$ **7.261.** $6\arcsin\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{4}(x^3+3x^2-7x-9)+C.$

7.262. $\dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}+C.$ **7.263.** $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$

7.264. $\dfrac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+10}+\dfrac{9}{2}\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+10}\right)+C.$

7.265. $\dfrac{x-2}{2}\sqrt{4x-x^2}+2\arcsin\dfrac{x-2}{2}+C.$ **7.266.** $-\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x}+$ $+\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)+C.$ **7.267.** $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

7.268. $\dfrac{x}{9\sqrt{x^2+9}}+C.$ **7.269.** $\dfrac{1}{8}(2x^3-5x)\sqrt{x^2-1}+\dfrac{3}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C.$

7.270. $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right)+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$

7.271. $\dfrac{x^2}{2}+x+\ln|x^2-x-1|+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C.$

7.272. $-\dfrac{1}{5(x-2)}+\dfrac{1}{25}\ln\left|\dfrac{x+3}{x-2}\right|+C.$ **7.273.** $-\dfrac{2}{9}\ln\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+$ $+\ \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3}\dfrac{x}{1-x^3}+C.$ **7.274.** $\dfrac{1}{4}\left(2\ln\dfrac{x^4+1}{x^4}-\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^4+1}\right)+$

$+ C$. **7.275.** $\sqrt{x^2+x+2} - \frac{1}{2}\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+2}\right) + C$.

7.276. $-\sqrt{6+4\ln x - \ln^2 x} + 2\arcsin\frac{\ln x - 2}{\sqrt{10}} + C$.

7.277. $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+2+\sqrt{x^2+8x+4}}{x}\right| + C$.

7.278. $\frac{\sqrt{(x^2-4)^3}}{3} + C$. **7.279.** $\frac{\sqrt{(x^2+4x-5)^3}}{3} - (x+2)\sqrt{x^2+4x-5} +$ $+ 9\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right) + C$. **7.280.** $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+5} +$ $+\frac{1}{2}\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right) + C$. **7.281.** $\frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{5x}{3\sqrt{16-x^2}} + C$.

7.282. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+16}\right) + C$. **7.283.** $\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} + C$. **7.284.** $2\sqrt{x} +$ $+ 4\sqrt[4]{x} - \frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}} + C$. **7.285.** $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$. **7.286.** $-x + \operatorname{tg} x +$ $+ \sec x + C$. **7.287.** $x\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$. **7.288.** $\frac{1}{3(1-\sin x)^3} +$ $+ C$. **7.289.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}\right) + C$. **7.290.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}-\operatorname{tg} x}\right| + C$.

7.291. $2\operatorname{tg} x - \frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 x} + C$. **7.292.** $\arcsin\left(\frac{\sec x}{\sqrt{5}}\right) + C$. **7.293.** $-\frac{\sin^2 x}{2} +$ $+ 5\sin x - 24\ln(\sin x + 5) + C$. **7.294.** $\ln|\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg}^2 x + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$.

7.295. $\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C$. **7.296.** $-\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

7.297. $-\frac{x\cos 3x}{6} + \frac{\sin 3x}{18} + \frac{x\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C$. **7.298.** $\ln|\operatorname{th} x| + C$.

7.299. $\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x) + C$. **7.300.** $\ln(\operatorname{ch} x) - \frac{\operatorname{th}^2 x}{2} - \frac{\operatorname{th}^4 x}{4} + C$.

7.301. $2\operatorname{sh}\sqrt{1+x} + C$. **7.302.** $x\operatorname{th} x - \ln(\operatorname{ch} x) + C$. **7.303.** $\frac{x}{2} -$ $-\frac{x\cos(2\ln x) + 2x\sin 2(\ln x)}{10} + C$. **7.304.** $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1) + C$. **7.305.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2} +$ $+ C$. **7.306.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+5}\right| + C$. **7.307.** $\frac{1}{\ln a - \ln b}\left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x}\right) - 2x + C$.

7.308. $\frac{1}{2}a^{\arcsin x}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right) + C$. **7.309.** $2\sqrt{e^x - 1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} +$ $+ C$. **7.310.** $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + \ln|x| + C$. **7.311.** $x -$

$- e^{-x}\arcsin(e^x) - \ln(1+\sqrt{1-e^{2x}}) + C,\ x \leqslant 0.$ **7.312.** $-\dfrac{x^2}{6} - \left(x - \dfrac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + \dfrac{2}{3}\ln(1+x^2) + C.$ **7.313.** $-\dfrac{x}{4} - \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{4}(1+x^2)\operatorname{arctg} x + C.$ **7.314.** $-\dfrac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} - \ln\dfrac{|1+x|}{\sqrt{1+x+x^2}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{1+2x}{\sqrt{3}} + C.$ **7.315.** $-x^2 + \dfrac{x^2}{2}\ln(4+x^4) + 2\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2} + C.$ **7.316.** $-\dfrac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1} + \dfrac{(x^2+1)^{3/2}}{3}\ln\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} + C,\ |x| > 1.$ **7.317.** $-\sqrt{1-x^2}\ln\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C,\ 0 < x < 1.$ **7.318.** $x^x + C,\ x > 0.$ **7.319.** $x - \ln(1+e^x) - 2e^{-x/2}\operatorname{arctg} e^{x/2} - (\operatorname{arctg} e^{x/2})^2 + C.$ **7.320.** $\dfrac{35}{2}$. Указание. Отрезок [0, 5] разделить на n равных частей. **7.321.** 1. Указание. Отрезок $[0, \pi/2]$ разделить на n равных частей. Применить формулу: $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\sin(n\alpha/2)\cos((n+1)/2)}{\sin(\alpha/2)}$. **7.322.** $e^{10} - 1$. Указание. Отрезок [0, 10] разделить на n равных частей. **7.323.** 2/3. Указание. Отрезок [1, 3] разделить на n частей так, чтобы абсциссы точек деления образовали геометрическую прогрессию. **7.324.** $\dfrac{15}{4}$. **7.325.** $\dfrac{9}{2}$. **7.326.** 5. **7.327.** $\dfrac{19}{15}$. **7.328.** $3\dfrac{57}{64}$. **7.329.** $\dfrac{45}{4}$. **7.330.** 1. **7.331.** 1. **7.332.** $e^2 - e$. **7.333.** $\dfrac{7}{\ln 2}$. **7.334.** $\ln 2{,}5$. **7.335.** $\dfrac{\ln 3}{2}$. **7.336.** $\dfrac{\pi}{12}$. **7.337.** $\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4}$. **7.338.** $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{8\sqrt{3}}{27}$. **7.339.** $\dfrac{1}{3}(2 - 3\operatorname{ch} 2 + \operatorname{ch}^3 2)$. **7.340.** $\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{4}{7}$. **7.341.** $\ln\dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. **7.342.** $\dfrac{11}{2} + 7\ln 2$. **7.343.** $2\ln\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2}$. **7.344.** $\dfrac{1}{2}(e - \sqrt[4]{e})$. **7.345.** $\sin 1$. **7.346.** $\dfrac{\pi}{4}$. **7.347.** $\dfrac{2}{3}$. **7.348.** $\dfrac{1}{12}\operatorname{sh} 2 + \dfrac{1}{6}$. **7.349.** $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{2}{5}$. **7.350.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **7.351.** $2 - \ln 5$. **7.352.** $\dfrac{\pi}{4}$. **7.353.** $\dfrac{\pi}{4}$. $\triangleleft$ Сумму $S_n = \dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \ldots \ldots + \dfrac{n}{n^2+n^2} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+(1/n)^2} + \dfrac{1}{1+(2/n)^2} + \ldots + \dfrac{1}{1+(n/n)^2}\right)$ можно рассматривать как интегральную для функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ на отрезке [0, 1]. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$. $\triangleright$ **7.354.** 1.

7.355. $\frac{2}{3}(2^{3/2}-1)$. **7.356.** $\frac{19}{6}$. **7.357.** $\frac{45}{4}$. **7.358.** 7. **7.359.** $\frac{16}{3}$. **7.360.** $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.361.** $\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}$. **7.362.** $2\ln\frac{3}{2}$. **7.363.** $4-3\ln 3$. **7.364.** а) Минус. Указание. Разбить отрезок интегрирования на отрезки $[-2, -1]$ и $[-1, 1]$ и воспользоваться свойствами 1) и 9); б) плюс; в) минус. **7.365.** а) Второй; б) первый; в) второй. **7.366.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{2}{\pi}$; г) $\frac{4}{3\pi}$. **7.367.** $\frac{2}{\pi}I_0\cos\varphi$. **7.368.** $2\sqrt{7}<I<6$. **7.369.** $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}<I<\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. **7.370.** а) $\frac{2}{3}\times$ $\times(2\sqrt{2}-1)<I<\frac{2\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)$; б) $|I|<\frac{\sqrt{30}}{4}$. **7.371.** а) $\frac{4}{3}<I<\frac{2}{3}\sqrt{5}$; б) $I<\sqrt{2{,}125}$. **7.372.** а) $\frac{dI}{d\beta}=\frac{e^\beta}{\beta}$; б) $\frac{dI}{d\alpha}=-\frac{e^\alpha}{\alpha}$. **7.373.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ **7.374.** $\frac{\sin x}{x}$. **7.375.** $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$. **7.376.** $-\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$. **7.377.** $\frac{x^2-x}{\ln x}$. **7.379.** Нет. **7.380.** $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$. **7.381.** $\ln\frac{3}{2}$. **7.382.** $\frac{1}{4}\times$ $\times\ (2+\operatorname{sh}2)$. **7.383.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **7.384.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **7.385.** π. **7.386.** $\frac{\pi}{6}$. **7.387.** $\frac{\pi}{6}$. **7.388.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$. **7.389.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **7.390.** $\frac{1}{32}(\pi+2)$. **7.391.** $2\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right)$. **7.392.** $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. **7.393.** $\frac{1}{6}$. **7.394.** $4-\pi$. **7.395.** $\frac{81}{16}\pi$. **7.399.** 1. **7.400.** $\pi\sqrt{2}-4$. **7.401.** $\frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3)$. **7.402.** $e-2$. **7.403.** $\frac{4}{25}(e^{3\pi/4}+1)$. **7.404.** $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. **7.405.** $\frac{e^2+1}{4}$. **7.406.** $\frac{\pi}{4}-$ $-\frac{1}{2}$. **7.407.** $\frac{\pi^2-8}{32}$. **7.408.** $\frac{1}{2}(e^{\pi/2}-1)$. **7.409.** $I_{2k}=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2k}\times$ $\times\ \frac{\pi}{2}$ $(n=2k)$; $I_{2k+1}=\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2k}{3\cdot5\cdot7\ldots(2k+1)}$ $(n=2k+1)$; $I_7=\frac{16}{35}$; $I_8=\frac{35}{256}\pi$. **7.410.** $I_4=24-\frac{65}{e}$. **7.411.** $\frac{1}{2}$. **7.412.** Расходится. **7.413.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **7.414.** $\frac{2}{5}$. **7.415.** Расходится. **7.416.** $1+\ln 2$. **7.417.** $\frac{1}{3}$. **7.418.** $\frac{1}{2}$. **7.419.** Расходится. **7.420.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **7.421.** Расходится. **7.422.** Расходится. **7.423.** Расходится. **7.424.** 1. **7.425.** Сходится. **7.426.** Сходится. **7.427.** Расходится. **7.428.** Расходится. **7.429.** Сходится. **7.430.** Сходится. **7.431.** Расходится. **7.432.** Расходится. **7.433.** Расходится.

7.434. $\frac{5}{2}(\sqrt[5]{3}+1)$. **7.435.** Расходится. **7.436.** π. **7.437.** $\frac{\pi}{3}$. **7.438.** $\frac{16}{3}$. **7.439.** $2\sqrt{2}$. **7.440.** Расходится. **7.441.** π. **7.442.** Сходится. **7.443.** Сходится. **7.444.** Расходится. **7.445.** Сходится. **7.446.** Расходится. **7.447.** Сходится. **7.448.** Расходится. **7.449.** Сходится. **7.450.** Расходится. **7.451.** Расходится. **7.452.** в) Указание. Воспользоваться равенством $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **7.453.** e^2. **7.454.** πab. **7.455.** $\frac{16}{3}$. **7.456.** $\frac{9}{2}$.

7.457. $\frac{3}{2}(3\pi-2)$. **7.458.** $\frac{56}{15}p^2$. **7.459.** a^2. **7.460.** $\frac{a^2}{4}(\pi-2\ln 2)$. **7.461.** $\frac{c^3}{6p}$. **7.462.** $2\ln 2 - 0{,}5$. **7.463.** $\frac{32}{3}$. **7.464.** 1. **7.465.** a^2. **7.466.** $1{,}5 - 2\ln 2$. **7.467.** $\frac{e}{2}-1$. **7.468.** $4\ln 2-1$. **7.469.** $\frac{\pi a^2}{2}-\frac{2}{3}a^2$ и $\frac{\pi a^2}{2}+\frac{2}{3}a^2$. **7.470.** $a^2 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln(2+\sqrt{3})\right)$. **7.471.** $r(a+h)-\frac{a^2r}{\sqrt{2ah+h^2}}\ln\frac{a+h+\sqrt{2ah+h^2}}{a}$. **7.472.** $5\pi a^2$. **7.473.** $\frac{a^2}{2}\left(3\sqrt{2}-2-\ln(1+\sqrt{2})\right)$. **7.474.** $\frac{\pi a^2}{2}+a^2-\frac{a^2}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$ и $\frac{\pi a^2}{2}-a^2+\frac{a^2}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$. **7.475.** $\frac{a^2r}{\sqrt{2ah-h^2}} \times \arccos\left(1-\frac{h}{a}\right)-(a-h)r$. **7.476.** $\frac{a^2}{4}(\pi+2\ln 2)$. **7.477.** πa^2. **7.478.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **7.479.** $\frac{8\sqrt{3}}{5}$. **7.480.** 12π. **7.481.** $\frac{24}{5}ab\sqrt{3}$. **7.482.** $\frac{8}{15}$. **7.483.** $\frac{3}{2}\pi a^2$. **7.484.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **7.485.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **7.486.** $\frac{a^2}{4}\left(\pi+\frac{4}{3}\right)$. **7.487.** $\frac{\pi a^2}{4}$.

7.488. $\frac{1}{4}(e^{4\pi}-1)^2$. **7.489.** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **7.490.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **7.491.** a^2. **7.492.** $\frac{3}{4}\sqrt{3}$. **7.493.** $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$. **7.494.** $2\sqrt{3}$. **7.495.** $2p(3\sqrt{3}-1)$. **7.496.** $4a \times \ln(a+\sqrt{a^2-1})-2\sqrt{a^2-1}$. **7.497.** $\pi a\sqrt{2}$. **7.498.** $\pi a - 2(a-b) \times \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$. Указание. Перейти к полярным координатам. **7.499.** $\frac{1}{2}\operatorname{sh} 6$. **7.500.** $\frac{4}{\pi}\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = \frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$. **7.501.** $\frac{134}{27}p$. **7.502.** $6a$. **7.503.** $\sqrt{2}\times(e-1)$. **7.504.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. **7.505.** $\frac{13}{3}$. **7.506.** $4a\sqrt{3}$. **7.507.** $x = a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y=\frac{3}{2}a$. **7.508.** $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$. **7.509.** $8(2-\sqrt{3})$. **7.510.** $\frac{3}{2}\pi a$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi$.

7.511. $5\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\dfrac{5}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **7.512.** $\dfrac{16}{3}a$. **7.513.** $2a\sqrt{6}$. **7.514.** $a\sqrt{3}$. **7.515.** 8. **7.516.** $\dfrac{1}{3}a\sqrt{t}(3+2t)$. **7.517.** $8\sqrt{2}$. **7.518.** $\dfrac{\pi}{8}(\operatorname{sh}12+12)$. **7.519.** а) $8\pi+\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$; б) $2\pi+\dfrac{8\pi^2}{3\sqrt{3}}$. **7.520.** $\dfrac{2\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$. **7.521.** 48π. **7.522.** $\dfrac{16}{15}\pi a^2(\sqrt{2}+1)$. **7.523.** а) $3\pi a^2$; б) $\dfrac{56}{5}\pi a^2\sqrt{3}$. **7.524.** $\pi\left(\sqrt{5}+4\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **7.525.** а) $9\pi^2a^2$; б) $24\pi a^2$. **7.526.** $3\pi a^2$. **7.527.** $\dfrac{8}{3}\pi a^2(3\pi-4)$. **7.528.** $6\pi^2a^2$. **7.529.** $4\pi^2a^2$. **7.530.** $\dfrac{96}{5}\pi a^2$. **7.532.** $\dfrac{8}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1)$. **7.533.** $\dfrac{128}{105}a^3$. **7.534.** $\dfrac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$. **7.535.** $\dfrac{272}{15}\pi$. **7.536.** $\dfrac{11}{4}\pi$. **7.537.** $\dfrac{\pi^3}{2}$. **7.538.** $\dfrac{64}{3}\pi$. **7.539.** $\dfrac{\pi a^2h}{2}$. **7.540.** а) $\dfrac{\pi a^3}{2}$; б) $\dfrac{\pi a^3}{4}$. **7.541.** $\dfrac{8}{15}\pi a^3$. **7.542.** $\dfrac{3}{4}\pi^2a^3$. **7.543.** $\dfrac{64}{105}\pi a^3$. **7.544.** $\dfrac{\pi a^2}{12}(3\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-2)$. **7.545.** π^2. Указание. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$. **7.546.** $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. **7.547.** $M_x=\dfrac{1}{2}\big(e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)\times$ $\times(e+\sqrt{1+e^2})\big)$, $I_x=\dfrac{1}{3}\big((1+e^2)^{3/2}-\sqrt{8}\big)$. **7.548.** $M_x=\dfrac{32}{3}a^2$, $I_x=\dfrac{256}{15}a^3$. **7.549.** $M_x=2a^2$, $I_x=\dfrac{\pi a^3}{2}$. **7.550.** $M_x=2a^2$; $M_y=\pi a^2$. **7.551.** $\overline{x}=$ $=\dfrac{a(\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1+1)}{\operatorname{sh}1}=a\left(1-\operatorname{th}\dfrac{1}{2}\right)$, $\overline{y}=\dfrac{a(2+\operatorname{sh}2)}{4\operatorname{sh}1}=\dfrac{a}{2}(\operatorname{csch}1+\operatorname{ch}1)$. **7.552.** $\overline{x}=0$, $\overline{y}=\dfrac{2}{5}a$. **7.553.** $\overline{x}=\overline{y}=\dfrac{4}{5}a$. **7.554.** $\overline{x}=\overline{y}=\dfrac{2}{5}a$. **7.555.** $\dfrac{v_0^2}{2g}$. **7.556.** $x=\dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$; $v_{\text{ср}}=\dfrac{2}{\pi}v_0$. **7.557.** $t=6$ с, $s=$ $=144$ м. **7.558.** 250 м. **7.559.** 0,125 Дж. Указание. По закону Гука сила пропорциональна растяжению пружины. **7.560.** $\dfrac{1}{12}g\gamma\pi R^2H^2$. **7.561.** $\dfrac{1}{3}\times$ $\times g\gamma\pi R^2H^2$. **7.562.** $\dfrac{1}{12}g\gamma a^2H^2$. **7.563.** $\dfrac{1}{4}g\gamma\pi H^2R^2$. **7.564.** $\dfrac{16}{15}\sqrt{2}g\gamma ap^2$. **7.565.** $e_0e\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$; $\dfrac{e_0e}{a}$. Указание. По закону Кулона сила взаимодействия зарядов в пустоте равна $F=\dfrac{e_0e}{x^2}$, где x — расстояние между зарядами. **7.566.** $2066\ln 2$. Указание. При изотермическом процессе

$pv = p_0v_0$. Работа равна $A = \int\limits_{v_1}^{v_2} p\,dv$, где v_1 и v_2 — начальное и конечное значения объема. **7.567.** $\frac{p_0v_0}{k-1}\left(\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1} - 1\right)$. Указание. При адиабатическом процессе $pv^k = p_0v_0^k$, где $k \approx 1{,}4$ (закон Пуассона). Работа равна $A = \int\limits_{v_0}^{v_1} \frac{p_0v_0^k}{v^k}\,dv$. **7.568.** $\frac{4}{15} \times \pi\gamma\omega^2R^5$. **7.569.** $\frac{1}{60}\omega^2\gamma dha^3$. **7.570.** $\frac{1}{24}\gamma alh^3\omega^2$. **7.571.** $\frac{1}{4}\pi\omega^2\gamma R^4H$. **7.572.** $\frac{g\gamma ah^2}{3}$. **7.573.** $g\gamma\pi R^2H$. **7.574.** $\frac{2}{3}g\gamma ab^2$. **7.575.** $g\gamma\pi RH^2$. **7.576.** 20,625 кг. **7.577.** $\frac{0{,}24I_0^2R\pi}{\omega}$. Указание. По закону Джоуля–Ленца количество теплоты, выделяемой постоянным током за время t, равно $Q = 0{,}24I^2Rt$. **7.578.** $\frac{S}{\mu S_0}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx$ $\approx 5{,}6$ мин. Указание. По закону Торричелли скорость истечения воды из отверстия на расстоянии x от свободной поверхности равна $v = \mu\sqrt{2gx}$, где $\mu \approx 0{,}6$.

7.579. $\frac{\pi pa^4}{8\mu l}$. $\lhd$ $Q = \int\limits_0^a v \cdot 2\pi r\,dr = \frac{2\pi p}{4\mu l}\int\limits_0^a (a^2 - r^2)\,dr =$

$$= \frac{\pi p}{2\mu l}\left(-\frac{(a^2-r^2)^2}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{\pi pa^4}{8\mu l}. \ \rhd$$

7.580. $\frac{2GmM}{\pi R^2}$, где G — гравитационная постоянная. Указание. Применить закон всемирного тяготения. **7.581.** $\frac{R^2}{3r^2}\sqrt{\frac{H}{g}} \approx 11$ мин.
7.582. $\frac{2}{3}\mu ah\sqrt{2gh}$.

Глава 8

8.1. $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$; $0 < x < p$, $0 < y < p$, $x + y < p$. **8.2.** $V = \frac{S^2}{3\pi^2l^3}\sqrt{\pi^2l^4 - S^2}$; $0 < S < \pi l^2$. **8.3.** $S =$ $= \frac{x+y}{4}\sqrt{4z^2 - (x-y)^2}$; $z > \frac{x-y}{2}$. **8.4.** $x^2+y^2 \leqslant R^2$. **8.5.** $x^2+y^2 \geqslant R^2$. **8.6.** $x^2 + y^2 < R^2$. **8.7.** $x^2 + y^2 > R^2$. **8.8.** $x \neq y$. **8.9.** $-1 \leqslant x^2 + y \leqslant 1$. **8.10.** $x + y < 0$. **8.11.** $x \leqslant x^2 + y^2 < 2x$. **8.12.** Полосы $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant$ $\leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k — целое число). **8.13.** $0 < x^2 + y^2 \leqslant 1$ при $0 < a < 1$,

$x^2+y^2 \geqslant 1$ при $a>1$. **8.14.** Два тупых вертикальных угла, образованных прямыми $y=0$ и $y=-2x$, включая границу без общей вершины $(0, 0)$. **8.15.** $4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9$. **8.16.** Криволинейный треугольник, образованный прямой $y=2$ и параболами $y^2=\pm x$, исключая вершину $(0, 0)$. **8.17.** $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. **8.18.** Часть плоскости, заключенная между лучами $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$ и $\varphi=\dfrac{5\pi}{4}$. **8.19.** $x^2+y^2+z^2 \geqslant R^2$. **8.20.** $0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant z^2$, $z \neq 0$. **8.21.** $x^2+y^2-z^2<1$. **8.22.** n-мерный куб $-1 \leqslant x_k \leqslant 1$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. **8.23.** n-мерный эллипсоид $\dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots+\dfrac{x_n^2}{a_n^2} \leqslant 1$. **8.24.** $f(2, 1)=1/4$; $f(1, 2)=4$; $f(3, 2)=0$; $f(a, a)=-1$; $f(a, -a)=1$. **8.25.** $f(-3, 4)=-24/25$; $f(1, y/x)=$ $=f(x, y)$. **8.26.** $\sqrt{1+x^2}$. **8.27.** $f(x)=x^2-x$; $z=2y+(x-y)^2$. **8.28.** $\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$. $\triangleleft$ Обозначим $u=x+y$, $v=\dfrac{y}{x}$. Тогда $x=\dfrac{u}{1+v}$, $y=\dfrac{uv}{1+v}$, $f(u, v)=\dfrac{u^2}{(1+v)^2}-\dfrac{u^2v^2}{(1+v)^2}=\dfrac{u^2(1-v)}{1+v}$. Остается переименовать переменные u и v в x и y. $\triangleright$ **8.29.** а) $x^4-2x^2y^2+2y^4$; б) $4x^2y^2$. **8.31.** а) $\cos 2x$; б) $\cos(x^2-y^2)$. **8.32.** -6. **8.33.** 1. **8.34.** 0. **8.35.** e. **8.36.** 1. **8.37.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z=\dfrac{1}{k-1}$ вдоль прямой $y=kx$; $\lim z=3$ при $k=4/3$; $\lim z=2$ при $k=3/2$; $\lim z=1$ при $k=2$; $\lim z=-2$ при $k=1/2$. **8.40.** Не имеет. **8.41.** Не имеет. **8.42.** Указание. Рассмотреть изменение x и y по параболе $y=x^2$. **8.44.** $(1, -1)$. **8.45.** (m, n), где $m, n \in \mathbb{Z}$. **8.46.** Линии разрыва — прямые $x=k\pi$ и $y=m\pi$, где $k, m \in \mathbb{Z}$. **8.47.** Линия разрыва — окружность $x^2+y^2=1$. **8.48.** Линии разрыва — прямая $x+y=0$ и парабола $y^2=x$. **8.49.** Линии разрыва — окружность $x^2+y^2=1$ и гипербола $x^2-y^2=1$. **8.50.** Поверхности разрыва — координатные плоскости $x=0$, $y=0$, $z=0$. **8.51.** Поверхность разрыва — эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. **8.52.** Поверхность разрыва — конус $x^2+y^2-z^2=0$. **8.53.** Поверхность разрыва — однополостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$. **8.54.** Поверхность разрыва — двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1$.

8.55. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=5x^4-15x^2y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=5y^4-15x^3y^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=20x^3-30xy^3$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-45x^2y^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=20y^3-30x^3y$. **8.56.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y-\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+\dfrac{1}{x}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2y}{x^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. **8.57.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{3xy^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$. **8.58.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (1-xy)e^{-xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -x^2e^{-xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(xy-2)e^{-xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = x(xy-2)e^{-xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^3e^{-xy}$. **8.59.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\cos y^2}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y\sin y^2}{x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2\cos y^2}{x^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{2y\sin y^2}{x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{2\sin y^2 + 4y^2\cos y^2}{x}$. **8.60.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^x\ln y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x\ln^2 y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = y^{x-1}(x\ln y + 1)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2}$ $(y > 0)$.

8.61. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. **8.62.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y\,\mathrm{sgn}\,x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{|x|}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{(y^2-x^2)\,\mathrm{sgn}\,x}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$.

8.63. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. **8.64.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{z}{y}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z\ln\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{z(z+1)}{x^2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{z(z-1)}{y^2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z\ln^2\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{z^2}{xy}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = -\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z\left(1 + z\ln\dfrac{y}{x}\right)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z\left(1 + z\ln\dfrac{y}{x}\right)$. **8.65.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3t^4 + 3$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3t^4 - 4$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2t^4 + 2$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4xy^2z^3t^3 - 1$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2xz^3t^4$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6xy^2zt^4$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 12xy^2z^3t^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 2yz^3t^4$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = 3y^2z^2t^4$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = 4y^2z^3t^3$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = 6xyz^2t^4$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial t} = 8xyz^3t^3$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial t} = 12xy^2z^2t^3$.

8.66. $f'_x(3,\,2) = 56$, $f'_y(3,\,2) = 42$, $f''_{xx}(3,\,2) = 36$, $f''_{xy}(3,\,2) = 31$, $f''_{yy}(3,\,2) = 6$. **8.67.** $f'_x(1,\,2) = e(2e^4 - 1)$, $f'_y(1,\,2) = 4e^5$, $f''_{xx}(1,\,2) =$

$= e(6e^4 - 1)$, $f''_{xy}(1, 2) = 8e^5$, $f''_{yy}(1, 2) = 18e^5$. **8.70.** $f'''_{xxx}(0, 1) = 0$, $f'''_{xxy}(0, 1) = 2$, $f'''_{xyy}(0, 1) = 0$, $f'''_{yyy}(0, 1) = 0$. **8.71.** $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial \xi\,\partial \eta} = -\dfrac{6}{r^4} + \dfrac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, где $r = \sqrt{(x-\xi)^2(y-\eta)^2}$. **8.72.** $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3} = -6(\cos x + \cos y)$. **8.73.** $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p\,\partial y^q} = p!q!$. **8.78.** $r^2\cos\theta$. **8.85.** $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. Указание. Проверить, что функция равна нулю во всех точках осей Ox и Oy, и использовать определение частных производных. **8.86.** Указание. Проверить, пользуясь правилами дифференцирования и определением частной производной, что $f'_x(x, y) = y\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$ при $x^2 + y^2 \neq 0$, $f'_x(0, 0) = 0$, и, следовательно, $f'_x(0, y) = -y$. Отсюда $f''_{xy}(0, y) = f''_{xy}(0, 0) = -1$. Аналогично находим, что $f''_{yx}(0, 0) = 1$. **8.87.** $\Delta z = 0{,}33$, $dz = 0{,}3$. **8.88.** $\Delta z = 0{,}0187$, $dz = 0{,}0174$. **8.89.** $dz = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}\,(y+\sqrt{x^2+y^2})} + \dfrac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8.90. $dz = \dfrac{y}{x^2\cos^2(y^2/x)}(2x\,dy - y\,dx)$. **8.91.** $dz = \dfrac{1}{y^2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}(x\,dy - y\,dx)$.

8.92. $du = (xy)^z\left(\dfrac{z}{x}\,dx + \dfrac{z}{y}\,dy + \ln(xy)\,dz\right)$.

8.93.
$$df = (x_2 - x_3)x_1^{x_2-x_3-1}\ln x_4\,dx_1 + x_1^{x_2-x_3}\ln x_1 \ln x_4\,dx_2 - x_1^{x_2-x_3}\ln x_1\ln x_4\,dx_3 + x_1^{x_2-x_3}\frac{dx_4}{x_4}.$$

8.94. $df(1, 2, 1) = \dfrac{5\,dz - 2(dx + 2\,dy)}{25}$. **8.95.** 8,29. **8.96.** 2,95. **8.97.** 0,227. **8.98.** 8,2 м^3. **8.99.** Уменьшится на 1,57 см. **8.100.** Увеличится на 617,5 см^3.

8.101. $dz = 3x(x + 2y)\,dx + 3(x^2 - y^2)\,dy$,
$$d^2z = 6\big((x+y)\,dx^2 + 2x\,dx\,dy - y\,dy^2\big).$$

8.102. $dz = (x\,dy - y\,dx)\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)$,
$$d^2z = 2\left(\frac{y}{x^3}\,dx^2 + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)dx\,dy - \frac{x}{y^3}\,dy^2\right).$$

8.103. $dz = \dfrac{(x+y)\,dx + x\,dy}{\sqrt{x^2+2xy}}$, $\quad d^2z = \dfrac{-y^2\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy - x^2\,dy^2}{(x^2+2xy)^{3/2}}$.

8.104. $dz = \dfrac{x^2\,dy - xy\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$$d^2z = \frac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}\big(y(2x^2-y^2)\,dx^2 + 2x(2y^2-x^2)\,dx\,dy - 3x^2y\,dy^2\big).$$

8.105. $dz = e^{xy}\big((y^2+xy+1)\,dx + (x^2+xy+1)\,dy\big)$, $d^2z = e^{xy}\big(y(y^2+xy+2)\,dx^2 + 2(x+y)(xy+2)\,dx\,dy + x(x^2+xy+2)\,dy^2\big)$.

8.106. $dz = \left(\ln\dfrac{y}{x} - 1\right)dx + \dfrac{x}{y}\,dy$; $d^2z = -\dfrac{1}{x}\,dx^2 + \dfrac{2}{y}\,dx\,dy - \dfrac{x}{y^2}\,dy^2$.

8.107. $dz = \dfrac{1}{2x^2+2xy+y^2}(y\,dx - x\,dy)$, $d^2z = -\dfrac{1}{(2x^2+2xy+y^2)^2}\times$ $\times\;(2y(2x+y)\,dx^2 + 2(y^2-2x^2)\,dx\,dy - 2x(x+y)\,dy^2)$. **8.108.** $du = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, $d^2u = 2(dx\,dy + dy\,dz + dz\,dx)$.

8.109. $du = e^{xyz}(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)$,

$$d^2u = e^{xyz}\big((yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)^2 + 2(z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx)\big).$$

8.110. $d^3z = e^y(-\cos x\,dx^3 - 3\sin x\,dx^2\,dy + 3\cos x\,dx\,dy^2 + \sin x\,dy^3)$.

8.111. $d^3u = 6(dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\,dx\,dy\,dz)$.

8.112. $d^6u = -\dfrac{5!(dx+dy+dz)^6}{(x+y+z)^6}$.

8.113. $d^mu = e^{ax+by+cz}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^m$.

8.114. $\dfrac{dz}{dt} = e^{2x-3y}\big(2\sec^2 t - 3(2t-1)\big)$. **8.115.** $\dfrac{dz}{dt} = x^y\left(\dfrac{y}{xt} + \ln x\cos t\right)$.

8.116. $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2e^{2t}(x-y)}{x^2+y^2}$. **8.117.** $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{x(z+2yt^2) - yzte^t}{tx^2}$. **8.118.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{e^x}{e^x+e^y}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{e^x + e^y(x^2+1)}{e^x+e^y}$. **8.119.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{y^2+(x+1)^2}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y(1-2(x+1)^2)}{y^2+(x+1)^2}$. **8.120.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2u\left(\dfrac{ux}{v} - \dfrac{y\ln v}{x^2}\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2u\left(\dfrac{\ln v}{x} + \dfrac{uy}{v}\right)$.

8.121. $dz = \big((2uv - v^2)\sin y - (u^2 - 2uv)y\sin x\big)\,dx +$

$$+\big((2uv - v^2)x\cos y + (u^2 - 2uv)\cos x\big)\,dy.$$

8.122. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_v(u,v) - \dfrac{2y}{(x+y)^2}f'_u(u,v)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x}{(x+y)^2}f'_u(u,v) - 3f'_v(u,v)$. **8.123.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2-y^2}f'_u(u,v) + y^2f'_v(u,v)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xyf'_v(u,v) - \dfrac{2y}{x^2-y^2}f'_u(u,v)$.

8.124. $dz = \big(5x^4f'_v(u,v) - yf'_u(u,v)\sin(xy)\big)\,dx -$

$$-\big(x\sin(xy)f'_u(u,v) + 7f'_v(u,v)\big)\,dy.$$

8.125. $dz = \dfrac{1}{y^2}\left(\cos\dfrac{x}{y} f'_u(u, v) + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}} f'_v(u, v)\right)(y\,dx - x\,dy)$.

8.126. $du = \big(2sf'_x(x, y, z) + 2sf'_y(x, y, z) + 2tf'_z(x, y, z)\big)\,ds +$
$+ \big(2tf'_x(x, y, z) - 2tf'_y(x, y, z) + 2sf'_z(x, y, z)\big)\,dt$.

8.127. $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = f'_{x_1}(x_1, x_2, x_3, x_4) + f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3, x_4) g'_{x_1}(x_1, x_2) +$
$+ f'_{x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)\big(h'_{x_1}(x_1, x_2, x_3) + h'_{x_3}(x_1, x_2, x_3) g'_{x_1}(x_1, x_2)\big)$,
$\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = f'_{x_2}(x_1, x_2, x_3, x_4) + f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3, x_4) g'_{x_2}(x_1, x_2) +$
$+ f'_{x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)\big(h'_{x_2}(x_1, x_2, x_3) + h'_{x_3}(x_1, x_2, x_3) g'_{x_2}(x_1, x_2)\big)$.

8.132. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 f''_{uu}(u, v) + 2f''_{uv}(u, v) + \dfrac{1}{y^2} f''_{vv}(u, v)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} =$ $= xyf''_{uu}(u, v) - \dfrac{x}{y^3} f''_{vv}(u, v) + f'_u(u, v) - \dfrac{1}{y^2} f'_v(u, v)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 f''_{uu}(u, v) -$ $- \dfrac{2x^2}{y^2} f''_{uv}(u, v) + \dfrac{x^2}{y^4} f''_{vv}(u, v) + \dfrac{2x}{y^3} f'_v(u, v)$. **8.133.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f''_{xy} + f''_{xz}\varphi'_y +$ $+ f''_{yz}\varphi'_x + f''_{zz}\varphi'_x\varphi'_y + f'_z\varphi''_{xy}$. **8.134.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + y^2 f''_{22} + y^2 z^2 f''_{33} + 2yf''_{12} +$ $+ 2yzf''_{13} + 2y^2 z f''_{23}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 f''_{22} + 2x^2 z f''_{23} + x^2 z^2 f''_{33}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 y^2 f''_{33}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = xyf''_{22} + xyz^2 f''_{33} + xf''_{12} + xzf''_{13} + 2xyzf''_{23} + f'_2 + zf'_3$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} =$ $= xyf''_{13} + xy^2 f''_{23} + xy^2 z f''_{33} + yf'_3$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = x^2 y f''_{23} + x^2 yz f''_{33} + xf'_3$.[2])

8.137. $d^2u = 4f''(t)(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 + 2f'(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$.

8.138. $d^2u = a^2 f''_{11}\,dx^2 + b^2 f''_{22}\,dy^2 + c^2 f''_{33}\,dz^2 + 2abf''_{12}\,dx\,dy + 2acf''_{13}\,dx\,dz +$ $+ 2bcf''_{23}\,dy\,dz$. **8.139.** $d^2z = (\sin^2 y\cdot f''_{uu} - 2y\sin x\sin y\cdot f''_{uv} + y^2\sin^2 x\,\times$ $\times\, f''_{vv} - y\cos x\cdot f'_v)\,dx^2 + \big(x\sin 2y\cdot f''_{uu} + 2(\sin y\cos x - xy\sin x\cos y) f''_{uv} -$ $- y\sin 2x\cdot f''_{vv} + 2(\cos y\cdot f'_u - \sin x\cdot f'_v)\big)\,dx\,dy + (x^2\cos^2 y\cdot f''_{uu} + 2x\cos x\,\times$ $\times\,\cos y\cdot f''_{uv} + \cos^2 x\cdot f''_{vv} - x\sin y\cdot f'_u)\,dy^2$. **8.140.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 e^{2x} - xe^{2y}}{x^2 e^{2y} - ye^{2x}}$.

8.141. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}$. **8.142.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y - 1}{x + y + 1}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} =$ $= \dfrac{4(x + y)}{(x + y + 1)^3}$. **8.143.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + y^2}{y^2}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2(1 + y)^2}{y^5}$.

---

[2]) В ответах к задачам 8.134 и 8.138 через f'_i и f''_{ij} обозначены частные производные функции $f\big((\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z), \varphi_3(x, y, z)\big)$ по переменным φ_i или φ_i и φ_j.

8.144. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 0,\quad \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\dfrac{1}{3},\quad \left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \dfrac{1}{3}.$ **8.145.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1,$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}.$ **8.146.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz(x+z)-z^3}{z^3+2xy(x+z)},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz(x+z)}{z^3+2xy(x+z)}.$
8.147. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_u(u,\,v)+2xF'_v(u,\,v)}{F'_u(u,\,v)+2zF'_v(u,\,v)},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_u(u,\,v)+2yF'_v(u,\,v)}{F'_u(u,\,v)+2zF'_v(u,\,v)},$ где $u = x+y+z,\ v = x^2+y^2+z^2$.
8.148. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{ze^{xz}f'_v(u,\,v)}{yf'_u(u,\,v)+xe^{xz}f'_v(u,\,v)},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{zf'_v(u,\,v)}{yf'_u(u,\,v)+xe^{xz}f'_v(u,\,v)},$ где $u = yz,\ v = e^{xz}$. **8.149.** $dz = \dfrac{z\,dx - z(1+x^2z^2)\,dy}{y(1+x^2z^2)-x}.$ **8.150.** $dz = \dfrac{y^2(z+3x^2)\,dx + (3y^4+ze^{z/y})\,dy}{y(e^{z/y}-xy)}.$ **8.151.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2-x}{1+z},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{1+z},$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{2y(x-2)}{(1+z)^3}.$ **8.152.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}.$
8.153. $d^2z = \dfrac{c^4}{a^2b^2z^3}\big((y^2-b^2)\,dx^2 - 2xy\,dx\,dy + (x^2-a^2)\,dy^2\big).$ **8.157.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{5}{3},\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{3}{8},\ \dfrac{d^2z}{dx^2} = \dfrac{5}{18}.$ **8.158.** $dy = -\dfrac{4x}{5y}\,dx,\ dz = \dfrac{x}{5z}\,dx,$ $d^2y = -\dfrac{4}{25y^3}(4x^2+5y^2)\,dx^2,\ d^2z = \dfrac{1}{25z^2}(5z^2-x^2)\,dx^2.$
8.159. $du = \dfrac{(y-u)\,dx + (y-v)\,dy}{x-y},\quad dv = \dfrac{(x-u)\,dx + (x-v)\,dy}{y-x},$ $d^2v = -d^2u = \dfrac{2}{(x-y)^2}\big((y-u)\,dx^2 + (y-v+u-x)\,dx\,dy + (v-x)\,dy^2\big).$
8.161. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = uv^2+u^2v,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = uv^2-u^2v.$ **8.162.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{c}{a}\cos u\,\mathrm{cth}\,v,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{c}{b}\sin u\,\mathrm{cth}\,v.$ **8.163.** $dz = e^{-u}\big((v\cos v - u\sin v)\,dx + (u\cos v + v\sin v)\,dy\big).$
8.164. $dz = -3uv\,dx + \dfrac{3}{2}(u+v)\,dy.$ **8.165.** $\dfrac{d^2y}{dt^2} - y = 0.$ **8.166.** $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$
8.167. $\dfrac{d^3x}{dy^3} + \dfrac{d^2x}{dy^2} = 0.$ **8.168.** $r'^2 = \dfrac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2.$ **8.169.** $w = r\dfrac{\partial u}{\partial r}.$
8.170. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial v}.$ **8.171.** $\dfrac{\partial z}{\partial v} = u\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}.$ **8.172.** $w = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}.$
8.173. $w = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{2}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{\mathrm{ctg}\,\theta}{\rho^2}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}.$ **8.174.** $\dfrac{\partial w}{\partial v} = 0.$
8.175. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0.$ **8.176.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = 2w.$ **8.177.** $f(x+h,\,y+k) =$

$= xy^2+y^2h+2xyk+2yhk+xk^2+hk^2$. **8.178.** $\Delta f(x, y) = -h^2+2hk+3k^2$. **8.179.** $f(x, y) = 12 + 15(x-2) + 6(x-2)^2 + 3(x-2)(y-1) - 6(y-1)^2 + (x-2)^3 - 2(y-1)^3$. **8.180.** $f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + h(2x+y+3) + k(x+4y-2z-1) + l(6z-2y-4) + h^2+2k^2+3l^2+hk-2kl$. **8.181.** $f(x, y, z) = 8 - 8(y+1) + 4(z-2) + (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 2(x-1)(y+1) - 2(x-1)(z-2) - 2(y+1)(z-2)$. **8.182.** $f(x, y) = 1+y + \frac{1}{2!}(y^2-x^2) + \frac{1}{3!}(y^3-3x^2y) + o(\rho^3)$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. **8.183.** $f(x, y) = xy + \frac{1}{3!}(xy^3 - x^3y) + o(\rho^4)$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. **8.184.** $f(x, y) = 1 - (x-1) + (y-1) + (x-1)^2 + (x-1)(y-1) - (x-1)^3 + (x-1)^2(y-1) + o(\rho^3)$, где $\rho = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. **8.185.** $f(x, y, z) = (x-1) + (y-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + z^2 + o(\rho^2)$, где $\rho = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$. **8.186.** $z = 1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{1}{8}(y-1)^2 + v(\rho^2)$, где $\rho = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. **8.187.** $z_{\min} = -9$ при $x = 0$, $y = 3$. **8.188.** $z_{\max} = 1/64$ при $x = 1/4$, $y = 1/2$. **8.189.** $z_{\min} = -4/3$ при $x = 0$, $y = -2/3$. В стационарной точке $(2, -2/3)$ экстремума нет. **8.190.** $z_{\min} = 30$ при $x = 5$, $y = 2$. **8.191.** $z_{\min} = 10 - 18\ln 3$ при $x = 1$, $y = 3$. **8.192.** $z_{\min} = -28$ при $x = 2$, $y = 1$; $z_{\max} = 28$ при $x = -2$, $y = -1$. В стационарных точках $(1, 2)$, $(-1, -2)$ экстремумов нет. **8.193.** $z_{\min} = 0$ при $x = y = 0$. В стационарных точках $(-5/3, 0)$, $(1, 4)$, $(1, -4)$ экстремумов нет. **8.194.** $z_{\min} = 0$ при $x = y = 0$; $z_{\max} = 2e^{-1}$ при $x = \pm 1$, $y = 0$. В стационарных точках $(0, \pm 1)$ экстремумов нет. **8.195.** $z_{\max} = 2$ при $x = y = 0$. **8.196.** $u_{\min} = -14$ при $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$. **8.197.** $u_{\max} = 1/7^7$ при $x = y = z = 1/7$. **8.198.** $u_{\min} = 2^{9/4}$ при $x = 2^{1/4}$, $y = 2^{1/2}$, $z = 2^{3/4}$. **8.199.** Уравнение определяет две функции, из которых одна имеет максимум ($z_{\max} = 6$) при $x = -2$, $y = 1$, другая — минимум ($z_{\min} = -2$) при $x = -2$, $y = 1$; в точках окружности $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ каждая из этих функций имеет краевой экстремум $z = 2$. Указание. Указанные функции определяются явно равенством $z = 2 \pm \sqrt{16 - (x+2)^2 - (y-1)^2}$ и определены только внутри и на окружности $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$, в точках которой обе функции принимают значение $z = 2$. Это значение является наименьшим для одной функции и наибольшим для другой. **8.200.** Уравнение определяет две функции, из которых одна имеет минимум ($z_{\min} = 1$) при $x = 0$,

$y = -2$, а другая — максимум ($z_{\max} = -8/7$) при $x = 0$, $y = 16/7$. **8.201.** $z_{\min} = -19/4$ при $x = y = -3/2$. **8.202.** $z_{\min} = 2$ при $x = y = 1$. **8.203.** $z_{\min} = -1 - 2\sqrt{2}$ при $x = -1/\sqrt{2}$, $y = 1/\sqrt{2}$; $z_{\max} = 1 - 2\sqrt{2}$ при $x = 1/\sqrt{2}$, $y = -1/\sqrt{2}$. **8.204.** $z_{\min} = 0$ при $x = 1$, $y = 0$; $z_{\max} = 1/27$ при $x = y = 1/3$. **8.205.** $z_{\min} = -\sqrt{5}$ при $x = -2\sqrt{5}$, $y = -1/\sqrt{5}$; $z_{\max} = \sqrt{5}$ при $x = 2/\sqrt{5}$, $y = 1/\sqrt{5}$. **8.206.** $u_{\min} = -18$ при $x = -4$, $y = -2$, $z = 4$; $u_{\max} = 18$ при $x = 4$, $y = 2$, $z = -4$. **8.207.** $u_{\min} = 4$ при $x = y = 0$, $z = \pm 2$; $u_{\max} = 16$ при $x = \pm 4$, $y = z = 0$; при $x = z = 0$, $y = \pm 3$ экстремума нет. **8.208.** $u_{\max} = 2^6$ при $x = y = z = 2$. **8.209.** $u_{\max} = 2$ в точках $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$; $u_{\min} = 50/27$ в точках $(2/3, 5/3, 5/3)$, $(5/3, 2/3, 5/3)$, $(5/3, 5/3, 2/3)$. **8.210.** У к а з а н и е. Искать минимум функции $u = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$ при $x + y + z = s$. **8.211.** а) $z_{\text{наиб}} = 6$ при $x = 1$, $y = 0$; б) $z_{\text{наиб}} = 5$ при $x = y = 0$. **8.212.** $z_{\text{наиб}} = 6$ при $x = 3$, $y = 0$ и при $x = 0$, $y = 3$, $z_{\text{наим}} = -1$ при $x = y = 1$. **8.213.** $z_{\text{наиб}} = \dfrac{1}{2}$ при $x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $z_{\text{наим}} = -\dfrac{1}{2}$ при $x = -y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **8.214.** $z_{\text{наиб}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $z_{\text{наим}} = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **8.215.** $a = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$. **8.216.** Куб с длиной ребра a. **8.217.** Куб с длиной ребра $d\sqrt{3}$. **8.218.** Координаты искомой точки равны средним арифметическим координат вершин. **8.219.** Длины сторон параллелепипеда $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{R}{\sqrt{3}}$. **8.220.** Длины сторон параллелепипеда $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$, $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$, $\dfrac{H}{3}$. **8.221.** Равнобедренный треугольник с длиной боковой стороны $\dfrac{a}{2\sin\alpha/2}$. **8.222.** $(-12/5, -3/5)$, $(12/5, 3/5)$. У к а з а н и е. Достаточные условия экстремума заменить геометрическими соображениями. **8.223.** $C\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$. У к а з а н и е. Воспользоваться выражением площади треугольника через координаты его вершин. **8.224.** $x = y = z = \sqrt[3]{V} + 2\delta$.

8.225. $x = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$, $y = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$.

8.226. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{v_1}{v_2}$. У к а з а н и е. Очевидно, точка M, в которой луч переходит из одной среды в другую, должна находиться между A_1 и B_1, причем $AM = \dfrac{a}{\cos\alpha}$, $BM = \dfrac{b}{\cos\beta}$, $A_1M = a\operatorname{tg}\alpha$, $B_1M = b\operatorname{tg}\beta$. Продолжительность движения луча равна $\dfrac{a}{v_1\cos\alpha} + \dfrac{b}{v_2\cos\beta}$. Задача сводится к отысканию минимума функции $f(\alpha, \beta) = \dfrac{a}{v_1\cos\alpha} + \dfrac{b}{v_2\cos\beta}$ при условии, что $a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta = c$. **8.227.** $\alpha = \beta$. **8.228.** $I_1 : I_2 : \ldots : I_n = \dfrac{1}{R_1} : \dfrac{1}{R_2} : \ldots : \dfrac{1}{R_n}$. Указание. Найти минимум функции $f(I_1, I_2, \ldots, I_n) = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + \ldots + I_n^2R_n$ при $I_1 + I_2 + \ldots + I_n = I$. **8.229.** а) $x - y - 2z + 1 = 0$, $\dfrac{x-\pi/4}{1} = \dfrac{y-\pi/4}{-1} = \dfrac{z-1/2}{-2}$; б) $x + ez - 2 = 0$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-\pi}{0} = \dfrac{z-1/e}{e}$. **8.230.** $\dfrac{\pi a}{2\sqrt{6}}$. **8.231.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. **8.232.** $4x + y + 2z - 78 = 0$. **8.233.** а) $2x + 7y - 5z + 4 = 0$, $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-3}{-5}$; б) $x + y - 4z = 0$, $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-4}$; в) $z = 0$, $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{1}$ (в точке $(0, 0, 0)$); $z = -4$, $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+4}{1}$ (в точке $(0, 0, -4)$). **8.234.** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-10/3}{3} = \dfrac{z+4}{4}$. **8.235.** В точках $(0, \pm2\sqrt{2}, \mp2\sqrt{2})$ касательные плоскости параллельны плоскости Oxz, в точках $(\pm2, \mp4, \pm2)$ — плоскости Oxz, в точках $(\pm4, \mp2, 0)$ — плоскости Oyz. **8.237.** а) $x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - z\operatorname{tg}\alpha = 0$, $\dfrac{x - r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \dfrac{y - r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \dfrac{z - r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}$; б) $ax\sin v_0 - ay\cos v_0 + u_0z = au_0v_0$, $\dfrac{x - u_0\cos v_0}{a\sin v_0} = \dfrac{y - u_0\sin v_0}{-a\cos v_0} = \dfrac{z - av_0}{u_0}$. **8.238.** $\cos\varphi = \dfrac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$. Указание. Углом между двумя поверхностями в точке их пересечения называется угол между касательными плоскостями, проведенными к этим поверхностям в данной точке. **8.239.** Указание. Поверхности называются ортогональными, если они пересекаются под прямым углом в каждой точке линии их пересечения. **8.240.** Изолированная точка $(0, 0)$. **8.241.** Узел $(0, 0)$. **8.242.** Изолированная точка $(0, 0)$. **8.243.** Точка возврата 1-го рода $(1, 0)$. **8.244.** Точка возврата 2-го рода $(0, 0)$. **8.245.** Точка самоприкосновения $(0, 0)$. **8.246.** $(0, 0)$ — изолированная точка, если $a < 0$; узел, если $a > 0$; точка возврата 1-го рода, если $a = 0$. **8.247.** Узел $(0, 0)$. **8.248.** Точка возврата 1-го рода $(0, 0)$. **8.249.** Угловая точка $(0, 0)$. Указание. Показать, что $\lim\limits_{x\to+0} y' = 0$, $\lim\limits_{x\to-0} y' = 1$. **8.250.** Точка прекращения $(0, 1)$. Указание. Показать, что $\lim\limits_{x\to+0} y = 1$. **8.251.** $y = -\dfrac{x^2}{4}$. **8.252.** $x^2 + y^2 = p^2$. **8.253.** $x = \pm R$. **8.254.** Огибающей нет. **8.255.** $y = -\dfrac{4}{3}x^2$. **8.256.** $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$. **8.257.** $y^2 = -\dfrac{x^3}{x+2a}$. **8.258.** а) Дискриминантная кривая $y = 1$ является огибающей и множеством точек перегиба данного семейства; б) дискриминантная кривая распадается на прямые: $y = x - \dfrac{4}{27}$ (огибающая) и $y = x$ (множество точек возврата 1-го рода); в) дискриминантная кривая $y = 1$ есть множество точек возврата 1-го рода и не является огибающей; г) дискриминантная кривая распадается на прямые: $x = -a$ (огибающая) и $x = 0$ (множество узлов). **8.259.** а) 1 г, 0,0043%; б) 1 мм, 0,12%; в) $1'$, 0,066%. **8.260.** 1) $\Delta = 0{,}002$ км, $\delta = 0{,}008\%$; 2) $\Delta = 30\,\text{м}^2$, $\delta = 2\%$. **8.261.** Первое. **8.262.** а) 0,05, 0,14%; б) 0,005, 6,25%. **8.263.** 29,2 и 3,2. **8.264.** 1) 5,373, 0,0004, 0,0074%; 2) 5,73, 0,0026, 0,048%; 3) 5,4, 0,0274, 0,51%. **8.265.** $202 \cdot 10^{-4}$, $188 \cdot 10^4$, $600 \cdot 10^3$. **8.266.** а) Два, $41 \cdot 10^4$; б) один, $8 \cdot 10^{-2}$. **8.267.** Не меньше, чем с двумя знаками. **8.268.** Не меньше, чем с тремя знаками. **8.269–8.273.** Указание. Воспользоваться формулой (1) § 4. **8.274.** 185,7. **8.275.** $1{,}3 \cdot 10^2$. **8.276.** 71,88. **8.277.** Вычитание произвести нельзя. **8.278.** 61,6. **8.279.** $512 \cdot 10$. **8.280.** 3,3. **8.281.** $3 \cdot 10$. **8.282.** $66 \cdot 10^3$. **8.283.** 7,397. **8.284.** $\leqslant 12\pi\,\text{см}^2$, $\leqslant 8{,}3\%$. **8.285.** $\approx 0{,}48$. **8.287.** $\leqslant 0{,}17$ мм. **8.288.** $2{,}7 \pm 0{,}1$ г/см^3. **8.289.** По принципу равных влияний R измерить с относительной погрешностью 0,25%, а высоту H с относительной погрешностью 0,5%. **8.290.** $12''$. **8.291.** 4. **8.292.** 4. **8.293.** По принципу равных влияний π можно взять с тремя верными знаками в узком смысле, радиусы измерить с точностью до 0,8 см, а образующую — с точностью до 1,25 см.

Глава 9

9.2. $\dfrac{8}{3}$. **9.3.** $\dfrac{\pi}{6}$. **9.4.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{14}{11}$. **9.5.** $\dfrac{a^3}{4}(\pi + 4)$. **9.6.** $\dfrac{3}{2}\pi$. **9.7.** $y = x$, $y = x + 3$, $x = 1$, $x = 2$. **9.8.** $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $x = \pm 1$. **9.9.** $x + y = 2$, $x = \sqrt{4 - y^2}$, $y = 0$, $y = 2$. **9.10.** $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2 - x^2}$, $x = 0$, $x = 1$.

9.11. $\int\limits_1^5 dx \int\limits_2^4 f(x,y)\,dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_1^5 f(x,y)\,dx.$ **9.12.** $\int\limits_2^4 dx \int\limits_2^x f(x,y)\,dy +$

$$+\int\limits_4^5 dx \int\limits_2^4 f(x,y)\,dy + \int\limits_5^7 dx \int\limits_{x-3}^4 f(x,y)\,dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_y^{y+3} f(x,y)\,dx.$$

9.13. $\int\limits_{-a}^a dx \int\limits_{x^2/a}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x,y)\,dy =$

$$= \int\limits_0^a dy \int\limits_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f(x,y)\,dx + \int\limits_a^{a\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

9.14. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{ax}} f(x,y)\,dy + \int\limits_a^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy =$

$$= \int\limits_0^a dy \int\limits_{y^2/a}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

9.15. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_a^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy =$

$$= \int\limits_0^{a/2} dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{(a-\sqrt{a^2-4y^2})/2} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^{a/2} dy \int\limits_{(a+\sqrt{a^2-4y^2})/2}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{a/2}^a dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

9.16. По переменной x; область интегрирования ограничена линиями $y=-\sqrt{x}$, $y=x^3$, $x=1$, $x=2$. **9.17.** $\int\limits_{-7}^1 dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)\,dx.$

9.18. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dy.$

9.19. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y)\,dx +$

$$+ \int\limits_2^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

9.20. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{3\sqrt{x}} f(x, y)\,dy$. **9.21.** $\int\limits_0^{8/3} dy \int\limits_{2y-2}^{\sqrt{4+y^2}} f(x, y)\,dx$.

9.22. $\int\limits_0^a dy \int\limits_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y)\,dx$.

9.23. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x, y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y)\,dy$.

9.24. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{9/y}^{10-y} f(x, y)\,dx$. **9.26.** $\frac{4}{3}a^4$. **9.27.** 112/9. **9.28.** 1/4. **9.29.** 1/3.

9.30. 9/20. **9.31.** 68/15. **9.32.** $\pi^2/128$. **9.33.** $\frac{4}{3}a^3$. **9.34.** e. **9.35.** $\frac{1}{15}a^3b^2$. Указание.

$\iint\limits_G x^2y\,dx\,dy = \int\limits_0^a x^2\,dx \int\limits_0^{f(x)} y\,dy = \int\limits_{\pi/2}^0 a^2\cos^2 t(-a\sin t)\,dt \int\limits_0^{b\sin t} y\,dy$, где последний интеграл получается из предыдущего путем замены $x = a\cos t$. **9.36.** $3\pi^2a^3$. **9.37.** $\frac{8}{105}a^3$. **9.38.** 1/4. Указание. Средним значением функции $f(x, y)$ в области G называется число $f_{\text{ср}} = \frac{1}{S}\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$, где S — площадь области G. **9.39.** $1{,}63 < I < 2$. Указание. По теореме об оценке двойного интеграла $mS < \iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy < MS$, где M — наименьшее, M — наибольшее значения функции в области G, S — площадь области G. **9.40.** 5/3. **9.41.** $\int\limits_0^{\pi/6} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{3}\sin\varphi} f(r)r\,dr + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(r)r\,dr$.

9.42. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi/\sin^2\varphi}^{2a\sin\varphi} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)r\,dr.$

9.43. $\int\limits_{0}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{\sin\varphi/\cos^2\varphi} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)r\,dr+$

$$+\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{1/\sin\varphi} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)r\,dr+$$

$$+\int\limits_{3\pi/4}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\sin\varphi/\cos^2\varphi} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)r\,dr.$$

9.44. $\int\limits_{0}^{\pi/6} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{6}\cos\varphi} f(r^2)r\,dr + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{3\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r^2)r\,dr.$ **9.45.** $\frac{\pi}{4}(e^{a^2}-1).$

9.46. $\frac{2}{9}a^3.$ **9.47.** $\frac{128}{3}\pi.$ **9.48.** $\frac{\pi a^3}{6}.$ **9.49.** $\frac{45}{64}\pi a^4.$ **9.50.** $\frac{a^2}{12}(3\pi-2).$

9.51. $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4.$ **9.52.** $\frac{1}{a}\int\limits_0^a dv\int\limits_0^a f\left(\frac{u(a-v)}{a},\, \frac{uv}{a}\right)u\,du.$

9.53. $\frac{1}{3}\int\limits_a^b du\int\limits_p^q f(\sqrt[3]{u^2v},\, \sqrt[3]{uv^2})\,dv.$ **9.54.** $\frac{1}{2}\int\limits_1^3 du\int\limits_{-u}^{6-u} f\left(\frac{u+v}{2},\, \frac{u-v}{2}\right)dv.$

9.55. $\frac{1}{2}\int\limits_p^q du\int\limits_a^b f\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\, \sqrt{uv}\right)\frac{dv}{v}.$ **9.56.** $2\pi ab(c-\sqrt{c^2-1}).$ **9.57.** $\frac{e-1}{2}.$

9.58. $\frac{5}{48}(a^{-6/5}-b^{-6/5})(q^{8/5}-p^{8/5}).$ **9.59.** $\frac{64}{3}a^2.$ **9.60.** $\frac{1}{2}(15-16\ln 2).$
9.61. $a^2(\pi-1).$ **9.62.** $\frac{1}{4}(b^2-a^2)(\pi+2).$ Указание. Перейти к полярным координатам. **9.63.** $\frac{1}{4}a^2(8-\pi).$ **9.64.** $(\pi-1)a^2.$ Указание. Перейти к полярным координатам. **9.65.** $a^2/210.$ Указание. Сделать замену переменных: $x=r\cos^2\varphi,\ y=r\sin^2\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$ **9.66.** $\frac{\pi a^3b}{2c^2}.$ Указание. Перейти к обобщенным полярным координатам.
9.67. $\frac{8}{15}(b^{5/4}-a^{5/4})(n^{3/4}-m^{3/4}).$ Указание. Сделать замену переменных: $y^2=ux,\ vy^2=x^3.$ **9.68.** $\frac{(q^2-p^2)(b^3-a^3)}{6a^3b^3}.$ Указание. Сделать

замену переменных: $y^2 = ux$, $y = vx$. **9.69.** $\frac{4}{\sqrt{3}}a^2$. **9.70.** $8\sqrt{2}a^2$. **9.71.** $2\sqrt{2}\pi p^2$. **9.72.** $\frac{76}{3}a^2$. **9.73.** $\frac{8}{3}\sqrt{2}a^2$. **9.74.** $16a^2$. **9.75.** $4\pi a^2(2-\sqrt{2})$. **9.76.** $\frac{\pi}{6}(27-5\sqrt{5})$. **9.77.** $2a^2(\pi-2)$. **9.78.** $\pi a^2\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$. **9.79.** $\pi/6$. **9.80.** $3\sqrt{2}\pi a^2$. **9.81.** $2a^2(\pi+4-4\sqrt{2})$. **9.82.** $\frac{16}{3}ab^2$. **9.83.** $\frac{4}{3}a^3(2-\sqrt{2})$. Указание. Интегрировать в плоскости Oyz. **9.84.** $16/15$. **9.85.** $a^3/2$. **9.86.** $\frac{2}{3}\pi a^3(3-\sqrt{2})$. **9.87.** $\pi abc\left(1-\frac{1}{e}\right)$. **9.88.** $\frac{2}{3}\pi a^3(2-\sqrt{2})$. **9.89.** $\frac{2}{3}\pi abc\times$ $\times(2-\sqrt{2})$. **9.90.** $\frac{1}{2}\ln 3$. Указание. Сделать замену переменных $u = xy$, $y^2 = vx$. **9.91.** $9/8$. Указание. Сделать замену переменных $u = xy$, $v = y/x$. **9.92.** $\frac{1}{2}\pi\delta R^2$. **9.93.** $M_x = \frac{4}{3}a^3$, $M_y = \frac{5}{8}\pi a^3$. **9.94.** $\overline{x} = \frac{2}{5}a$, $\overline{y} = \frac{a}{2}$. **9.95.** $\frac{a^2b}{6}$. **9.96.** $M_x = \frac{\pi}{24}$, $M_y = 1-\frac{\pi^2}{12}$. **9.97.** $\overline{x} = \frac{141a}{20(7-3\ln 2)}$, $\overline{y} = \frac{81a}{8(7-3\ln 2)}$. **9.98.** $I_x = 1/12$, $I_y = 7/12$. **9.99.** $\overline{x} = \overline{y} = \frac{128a}{105\pi}$. **9.100.** $I_x = \frac{21}{32}\pi a^4$, $I_y = \frac{49}{32}\pi a^4$, $I_0 = \frac{35}{16}\pi a^4$. **9.101.** $I_x = \frac{\pi ab^3}{4}$, $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$, $I_0 = \frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$. **9.102.** а) $\frac{26}{105}a^4$; б) $\frac{61}{105}a^4$. Указание. $I_{x=-a} = \iint\limits_G (x+a)^2\,dx\,dy$. **9.103.** $I_x = \frac{ka^5}{5}$, $I_y = \frac{3}{20}ka^5$, $I_0 = \frac{7}{20}ka^5$, где k — коэффициент пропорциональности. **9.104.** $\pi a^4/8$. **9.105.** $I_x = \frac{2\alpha-\sin 2\alpha}{16}a^4$, $I_y = \frac{2\alpha+\sin 2\alpha}{16}a^4$. **9.106.** $\frac{1}{2}\gamma(t_2-t_1)(R_2^4-R_1^4)$. Указание. $Q = \gamma(t_2-t_1)\iint\limits_G |xy|\,dx\,dy$. **9.107.** $\frac{4ah^2}{5}$. Указание. $E=\iint\limits_G(2x+y)\,dx\,dy$.

9.108. $\displaystyle\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{(12-2x)/3} dy \int\limits_0^{(12-2x-3y)/4} f(x,y,z)\,dz.$

9.109. $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-(b/a)\sqrt{a^2-x^2}}^{(b/a)\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{-c\sqrt{1-(x^2/a^2)-(y^2/b^2)}}^{c\sqrt{1-(x^2/a^2)-(y^2/b^2)}} f(x,y,z)\,dz.$

9.110. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_{-\sqrt{(4x-y^2)/2}}^{\sqrt{(4x-y^2)/2}} f(x, y, z)\,dz.$

9.111. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)\,dz.$ **9.112.** $1/6$. **9.113.** $81/4$.

9.114. $a^4/12$. **9.115.** $a^4/8$. **9.116.** $1/96$. **9.117.** $4/15$. **9.118.** $\frac{4}{3}a^3h$. **9.119.** $\frac{\pi a^4}{4}$. **9.120.** $\frac{19}{24}\pi$. **9.121.** $a^4/10$. **9.122.** $\frac{4}{15}\pi a^3 h$. **9.123.** $\frac{16}{3}\pi$. **9.124.** $\pi a^4 \sin^2\frac{\alpha}{2}$. **9.125.** $1/105$. **9.126.** $6\pi a^2$. **9.127.** $\frac{\pi R^3}{12}(2-\sqrt{2})$. **9.128.** $\frac{\pi a^4}{16}$. **9.129.** $\frac{8}{21}\pi R^{7/2}$. **9.130.** $\frac{3}{35}$. **9.131.** $\sqrt{\frac{32V}{3\pi}}$. Указание. Перейти к цилиндрическим координатам. **9.132.** $a^3/45$. Указание. Перейти к сферическим координатам. **9.133.** $\pi^2 abc/4$. Указание. Перейти к обобщенным сферическим координатам по формулам: $x = ar\cos\varphi\cos\theta$, $y = br\sin\varphi\cos\theta$, $z = cr\sin\theta$. При этом $I = abcr^2\cos\theta$ $\left(r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. **9.134.** $\frac{19}{6}\pi a^3$. Указание. Перейти к цилиндрическим координатам. **9.135.** $\pi a^3/3$. Указание. Перейти к сферическим координатам. **9.136.** $M = \frac{3}{4}\pi\gamma_0 a^3$, $\gamma_{\text{ср}} = \frac{9}{16}\gamma_0$. **9.137.** $M = \frac{1}{5}\pi\gamma_0 R^2 H$, $\gamma_{\text{ср}} = \frac{3}{5}\gamma_0$. **9.138.** $M = \frac{1}{24}\pi\gamma_0 a^3$, $\gamma_{\text{ср}} = \frac{1}{12}\pi\gamma_0$. **9.139.** $M = \frac{31}{5}\pi\gamma_0 a^3$, $\gamma_{\text{ср}} = \frac{93}{140}\gamma_0$. **9.140.** $M = \frac{4}{15}\pi\gamma_0 R^2 H$, $\gamma_{\text{ср}} = \frac{8}{15}\gamma_0$. **9.141.** $M = \frac{1}{4}\pi^2\gamma_0 R^3$, $\gamma_{\text{ср}} = \frac{3}{16}\pi\gamma_0$. **9.142.** $\left(0, \frac{4}{5}a, \frac{4}{15}h\right)$.

9.143. $\left(0, \frac{3}{7}b, \frac{2}{7}h\right)$. **9.144.** $\left(0, 0, \frac{2}{3}H\right)$. **9.145.** $\left(0, 0, \frac{3}{4}H\right)$.

9.146. $\left(0, 0, \frac{2}{5}R\right)$. **9.147.** $\frac{8}{21}\gamma abh\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{3}\right)$. **9.148.** $\frac{1}{6}\pi\gamma HR^4$.

9.149. $\frac{4}{9}\pi\gamma_0 R^5$. **9.150.** $\frac{2\pi\gamma a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$.

◁ *Ньютонов потенциал* тела T в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — это интеграл $U = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\frac{dx\,dy\,dz}{r}$, где $\gamma(x, y, z)$ — плотность, $r =$

$= \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Имеем: $U = \gamma \iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{r} =$ $= \gamma \iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$U = \gamma \iiint\limits_{T_1} \frac{r\,dr\,d\varphi\,dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^b dz \int\limits_0^{(a/b)\sqrt{b^2-z^2}} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

$$= \frac{2\pi\gamma a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right). \ \triangleright$$

9.151. $\frac{2\pi\gamma kH}{\sqrt{H^2+R^2}}(\sqrt{H^2+R^2}-H)$, где k — постоянная закона тяготения. $\triangleleft$ Приняв вершину конуса за начало координат, а его ось — за ось Oz, получим уравнение конуса в виде $x^2+y^2 = \frac{R^2}{H^2}z^2$. Вследствие симметрии результирующая сила притяжения будет направлена вдоль оси Oz и выразится интегралом $F_z = k\gamma \iiint\limits_T \frac{z\,dx\,dy\,dz}{r^3} = k\gamma \iiint\limits_T \frac{z\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$F_z = k\gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r\,dr \int\limits_{(H/R)r}^{H} \frac{z\,dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\gamma kH}{\sqrt{H^2+R^2}}(\sqrt{H^2+R^2}-H). \ \triangleright$$

9.152. $\frac{8}{15}\gamma h a^4$. **9.153.** $\frac{1}{10}\gamma\pi H R^4$. **9.154.** $1/4$. **9.155.** $\pi/2$. **9.156.** 4π. **9.157.** 1. **9.158.** Расходится. **9.159.** Сходится при $\alpha > 1$. **9.160.** 4. **9.161.** $\frac{3}{2}\pi$. **9.162.** $\pi/2$.

9.163. Сходится при $\alpha < 1$. Указание. Изолировать прямую $y = x$ узкой полоской и положить $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x-y)^\alpha} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{(x-y)^\alpha}$.

9.164. Сходится при $\alpha < 3/2$. **9.165.** $15/4$. **9.166.** $3/7$. **9.167.** $f(x_0)$. **9.168.** $\frac{2}{y}\ln(1+y^2)$. **9.169.** $\frac{2y+1}{y^2+y}\sin y(1+y) - \frac{2y-1}{y^2-y}\sin y(y-1)$.

9.170. $2ye^{-y^3} - e^{-y^2} - \int\limits_y^{y^2} x^2 e^{-yx^2}\,dx$. **9.171.** $\int\limits_0^y (x(x-y)\cos xy - \sin xy)\,dx$.

9.172. $x(2-3y^2)f(xy) + \frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2y(1-y^2)f'(xy)$. **9.174.** $E' = \frac{1}{k}(E-F)$, $F' = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{F}{k}$. Указание. При вычислении F' показать, что $\int\limits_0^{\pi/2} (1-k^2\sin^2\varphi)^{-3/2}\,d\varphi = \dfrac{1}{1-k^2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi$, для чего использовать следующее тождество: $(1-k^2\sin^2\varphi)^{-3/2} = \dfrac{1}{1-k^2}\times$ $\times(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2} - \dfrac{k}{1-k^2}\dfrac{d}{d\varphi}(\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2})$.

9.175. $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{9}$. **9.176.** $\dfrac{1}{2}\ln 2$. **9.178.** $F(y)$ сходится неравномерно на $[y_1,\,y_2]$, если этот интеграл сходится при любом $y\in[y_1,\,y_2]$, но существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого $B>a$ найдется $y=y(B)\in$ $\in[y_1,\,y_2]$, для которого $\left|\int\limits_B^{+\infty} f(x,\,y)\,dx\right| \geqslant \varepsilon$. **9.179.** Сходится равномерно. **9.180.** Сходится неравномерно. **9.181.** Сходится равномерно. **9.182.** Сходится равномерно. **9.183.** Сходится неравномерно. **9.184.** Сходится равномерно. **9.185.** Сходится неравномерно. **9.186.** Сходится равномерно. **9.188.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$. **9.189.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{m}$. **9.190.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{\beta}$. **9.191.** $\ln(1+\alpha)$. **9.192.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\gamma}}\,e^{-\delta^2/(4\gamma)}$. Указание. Продифференцировать интеграл по параметру γ и решить уравнение $\dfrac{\partial F}{\partial\delta} = -\dfrac{\delta}{2\gamma}F$. **9.193.** $\dfrac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$. **9.194.** $\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$. **9.195.** $\pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$.

Глава 10

10.4. $y(\ln|1-x^2|+1)=1$. **10.5.** $y(1+x)=1$. **10.6.** $y=2-3\cos x$. **10.7.** $f(x,\,y)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}<0$–max, $\dfrac{\partial f}{\partial x}>0$–min. **10.8.** $\dfrac{\partial f}{\partial x}+f(x,\,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$; а) $y+x^3+3x^2=0$; б) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+4})-\ln 2$. **10.9.** $x^2+y=$ $=xy'$. **10.10.** $xy'+y=0$. **10.11.** $y'=y\operatorname{th}x$. **10.12.** $2xyy'=x^2+y^2$. **10.13.** $yy'=x$. **10.14.** $xy'+2y=0$. **10.15.** $y'=\dfrac{1}{4ky^2}$. **10.22.** $y^2-x^2=$ $=C$. **10.23.** $y^3+x^3-3x=C$. **10.24.** $y^2+x^2=C$. **10.25.** $y=Cx^2$. **10.26.** $y=C(x+1)e^{-x}$. **10.27.** $\operatorname{arctg}y-\arcsin x=C$; $x=\pm1$. **10.28.** e^x+ $+e^{-y}=C$. **10.29.** $y\sin y+\cos y-x\cos x+\sin x=C$. **10.30.** $\operatorname{arctg}y+$

$+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) = C$. **10.31.** $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$; $x = \pm 1$. **10.32.** $y = C\sqrt{1+e^{2x}}$. **10.33.** $(1+e^x)^2\operatorname{tg} y = C$. **10.34.** $e^x - \dfrac{1}{2}e^{2y} - 2\ln|1+y| - \dfrac{(y-1)^2}{2} = C$, $y = -1$. **10.35.** $y = \dfrac{C\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$. **10.36.** $\sqrt{y} + x(1-\ln x) = C$, $y = 0$. **10.37.** $\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2} - x = C$, $x + y = (2k+1)\pi$, $x \in \mathbb{Z}$. **10.38.** $4x + 2y + 1 = Ce^{2y}$. **10.39.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}(4x+y+1) - x = C$. **10.40.** $(x+C)\left(\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(y-x-1) - 1\right) = 2$, $y - x - 1 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x \in \mathbb{Z}$. **10.41.** $4y-6x-7 = Ce^{-2x}$. **10.42.** $3\ln\left|\dfrac{\sqrt[3]{4x-y+1}+2}{\sqrt[3]{4x-y+1}-2}\right| = 3\sqrt[3]{4x-y+1} + x + C$, $4x - y + 9 = 0$, $4x - y - 7 = 0$. **10.43.** $x^2 - y^2 = 1$. **10.44.** $\dfrac{1}{2} \times (x^2+y^2) + \ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = 1$. **10.45.** $y = \sin x$. **10.46.** $y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + C}$. **10.47.** $y = 2x(\operatorname{arctg} Cx + \pi k)$, $y = k\pi x$, $k \in \mathbb{Z}$. **10.48.** $x^2 - 2xy - y^2 = C$. **10.49.** $\arcsin\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2} - \ln|x| = C$, $y = \pm x$. **10.50.** $xe^{y/x} = C$, $x = 0$. **10.51.** $e^{y/x} = Cy$, $y = 0$. **10.52.** $e^{e^{-y/x}} = Cx$. **10.53.** $\ln\dfrac{y}{x} = 2\operatorname{arcctg}(\ln|x| + C)$, $y = xe^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. **10.54.** $y = x\arcsin Cx$, $y = k\pi x$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. **10.55.** $y = x\sin(\ln|x| + C)$, $y = \pm x$. **10.56.** $y = C(y^2 - x^2)$, $y = \pm x$. **10.57.** $y^3 = -4x^3 + Cx^5(y^3 - 4x^3)$, $y = -\sqrt[3]{4}x$. **10.58.** $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$. **10.59.** $x + y - 1 = C(y+2)^2$, $y = -2$. **10.60.** $x+2y+3\ln|x+y-2| = C$, $x+y = 2$. **10.61.** $y+2 = Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}$. **10.62.** $\sin\dfrac{y-2x}{x+1} = C(x+1)$. **10.63.** $\ln\dfrac{y+x}{x+3} - 1 = \dfrac{C}{x+y}$. **10.64.** $y = xe^{1-x}$. **10.65.** $\ln|y| + 2\sqrt{x/y} = 2$. **10.66.** $y = \dfrac{1}{2}(x^2-1)$. **10.67.** $y = e^{-x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$. **10.68.** $y = Cx^3 - x^2$. **10.69.** $y = \sin x + C\cos x$. **10.70.** $y = (x+C)(1+x^2)$. **10.71.** $y = Ce^{-2x} + \dfrac{1}{5}e^{3x}$. **10.72.** $y = x\ln x + \dfrac{C}{x}$. **10.73.** $y = (x+1)^2(e^x + C)$. **10.74.** $x = Cy + \dfrac{1}{2}y^3$, $y = 0$. Указание. Записать уравнение в виде $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x+y^3}{y}$; оно линейно относительно x и $\dfrac{dx}{dy}$. **10.75.** $x = \operatorname{arctg} y - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} y}$. **10.76.** $y = x\sin x + Cx$. **10.77.** $y = e^x(C + \ln|x|)$. **10.78.** $y = x(Ce^{-x} - 1)$. **10.79.** $x = Cy + \ln^2 y$. **10.80.** $x =$

$= \dfrac{1+Cy}{y-1}$, $y=0$, $y=1$. **10.81.** $x = Cy + y^3$, $y=0$. **10.82.** $\sin y = Ce^{-x} + x - 1$. Указание. Положить $\sin y = z$. **10.83.** $y = \sin x$. **10.84.** $y = e^{2x} - e^x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$. **10.85.** $x = y\ln y + \dfrac{1}{y}$. **10.86.** $y = e^{-2x^2}\left(C + \dfrac{1}{2}x^2\right)^2$, $y=0$. **10.87.** $y = \dfrac{e^{-x}}{C-x}$, $y=0$. **10.88.** $y = (\cos x \cdot \sqrt[3]{C - 3\operatorname{tg} x})^{-1}$, $y=0$. **10.89.** $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + C}}$, $y=0$. **10.90.** $x^2 = Ce^{\sin y} - 2(\sin y + 1)$. Указание. Записать уравнение в виде $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^2\cos y + \sin 2y}{2x}$. **10.91.** $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2-1|}$. **10.92.** $xy(C - \ln^2 y) = 1$. **10.93.** $x^2(C - \cos y) = y$, $y=0$. **10.94.** $y^3 = \dfrac{e^{\cos x}}{3 - 2e^{\cos x}}$. **10.95.** $x^2 = \dfrac{1}{y+3y^2}$. **10.96.** $x^2 + xy + y^2 = C$. **10.97.** $5x^2y - 8xy + x + 3y = C$. **10.98.** $x^3 + 3x^2y - 2xy^2 - y^3 = C$. **10.99.** $xy - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = C$. **10.100.** $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x^3}{y^2} - 2y = C$. **10.101.** $\sqrt{x^2-y^2} + xy - \dfrac{1}{y} = C$. **10.102.** $x^2 + ye^{-x} = C$. **10.103.** $x^2 + ye^{x/y} = C$. **10.104.** $x^2\cos^2 y + y^2 = C$. **10.105.** $x\sin y + y\cos x + \ln|x/y| = C$. **10.106.** Вся плоскость Oxy. **10.107.** $y \neq x$. **10.108.** $y \neq \dfrac{2n+1}{2}\pi$. **10.109.** $x > y^2$. **10.110.** $y = 0$. **10.111.** $y = 1$. **10.112.** $y = -x$. **10.113.** $y = \dfrac{x^2}{4}$. **10.114.** $x = 2p + 6p^2 + C$, $y = p^2 + 4p^3$; $y = 0$ (особое решение). **10.115.** $x = 2\sqrt{p^2+1} - \ln(1 + \sqrt{p^2+1}) + \ln p + C$, $y = p\sqrt{1+p^2}$; $y = 0$ (особое решение). **10.116.** $x = e^p + C$, $y = (p-1)e^p$. **10.117.** $y = Cx + \dfrac{1}{2}(C^2 - x^2)$, $y = -x^2$ (особое решение). **10.118.** $x = p^3 - p + 2$, $y = \dfrac{3}{4}p^4 - \dfrac{p^2}{2} + C$. **10.119.** $x = p\cos p$, $y = p^2\cos p - p\sin p - \cos p + C$. **10.120.** $x = 2p - \ln p$, $y = p^2 - p + C$. **10.121.** $x = Cy + C^2$, $x = -\dfrac{1}{4}y^2$ (особое решение). **10.122.** $y = \dfrac{1}{2}Cx^2 + \dfrac{1}{2C}$, $y = \pm x$ (особые решения). **10.123.** $x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{2}{p^3}$, $y = \dfrac{2C}{p} - \dfrac{3}{p^2}$. **10.124.** $x = -p - \dfrac{1}{2} + \dfrac{C}{(1-p)^2}$, $y = -\dfrac{1}{2}p^2 + \dfrac{Cp^2}{(1-p)^2}$; $y = 0$, $y = x + 1$ (особые решения). **10.125.** $x = Cp - \ln p - 2$, $y = \dfrac{1}{2}Cp^2 - p$. **10.126.** $y = Cx - \dfrac{1}{C}$, $y^2 = -4x$ (особое решение). **10.127.** $y = Cx + C + \sqrt{C}$, $y = -\dfrac{1}{4(x+1)}$ (особое решение).

10.128. $y = Cx - e^C$, $y = x(\ln x - 1)$ (особое решение). **10.129.** $y = Cx + \cos C$, $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ (особое решение). **10.130.** Линейное; $y = uv$. **10.131.** Однородное; $y = ux$. **10.132.** С разделяющимися переменными. **10.133.** Уравнение Бернулли; $y = uv$. **10.134.** Линейное относительно x; $x = uv$. **10.135.** Уравнение в полных дифференциалах. **10.136.** Однородное; $x = uy$. **10.137.** Уравнение Бернулли относительно x; $x = uv$. **10.138.** Приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными; $u = y - x$. **10.139.** Линейное; $y = uv$. **10.140.** Уравнение Бернулли; $y = uv$. **10.141.** $y = x^2 - 2 + Ce^{-x^2/2}$. **10.142.** $\ln|y| + \dfrac{x}{y} = C$, $y = 0$. **10.143.** $\dfrac{1}{2}x^2\cos 2y + x = C$. **10.144.** $y = \dfrac{1}{(x+C)\cos x}$, $y = 0$. **10.145.** $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$. **10.146.** $x = \dfrac{1}{2}y^2 + Cy^3$, $y = 0$. **10.147.** $\ln|x| + e^{x/y} = C$, $x = 0$. **10.148.** $1 + y^2 = C(1 - x^2)$, $x = \pm 1$. **10.149.** $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$. **10.150.** $y = \dfrac{1}{1 + \ln x + Cx}$, $y = 0$ $(x > 0)$. **10.151.** $(3x + 2y - 1)(x - 1) = C$. **10.152.** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + C$. **10.153.** $2y\cos x + \cos 2x = C$. **10.154.** $x^2 + x\ln y - \cos y = C$. **10.155.** $y = Cx - \ln C$, $y = 1 + \ln x$ (особое решение). **10.156.** $x = \dfrac{1}{Ce^{-y^2/2} + 2 - y^2}$. **10.157.** $\ln|x| - \cos\dfrac{y}{x} = C$. **10.158.** $e^y = x^2 \times \ln Cx$. Указание. Положить $z = e^{-y}$. **10.159.** $x = Cy^2 - y^2(y+1)e^{-y}$, $y = 0$. **10.160.** $x\sqrt{1+y^2} - \sin y = C$. Указание. Записать уравнение в виде $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{yx}{1+y^2} = \dfrac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}$. **10.161.** $x + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$, $x = 0$. **10.162.** $y = \left(\dfrac{C + \ln|\sin x|}{x} - \operatorname{ctg} x\right)^2$, $y = 0$. **10.163.** $y = C^2 + Cx - \dfrac{x^2}{4}$, $y = -\dfrac{x^2}{2}$ (особое решение). **10.164.** $(x + y^3)^3 = C(y^3 - x)$, $x = y^3$. Указание. Положить $y = z^{1/3}$. **10.165.** $y = \pm\ln|x^2 - 1|$. **10.166.** $y^2 = 4x$ и $xy^2 = 4$. **10.167.** $y = \pm\dfrac{x}{x-1}$. **10.168.** $(x + C)^2 + y^2 = a^2$. **10.169.** $y^2 = \pm 2a(x + C)$. **10.170.** $y = 2\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}$. **10.171.** $y^2 = \dfrac{x^2}{x^2+3}$. **10.172.** $y^2 = 6x + 9$. **10.173.** $y^2 = 4(x-1)$ и $\dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{8} = 1$. **10.174.** $y^2 = \dfrac{2}{3}(x - a)$. **10.175.** $r = 2e^{\varphi/a}$. **10.176.** $x^2 + y^2 = 2y$. **10.177.** $x = y(3 \pm \ln y)$. **10.178.** $y^2 = 2x + 1 - e^{2x}$. **10.179.** $y = \dfrac{1}{x} - x^2$. **10.180.** $x = \pm\left(\dfrac{1}{y} - y\right)$. **10.181.** $y = x\sqrt{5x^2 - 1}$.

10.182. $r = \varphi + \frac{\pi}{2}$. **10.183.** $2x^2 + 3y^2 = C^2$. **10.184.** $x^2 + 2y^2 = C^2$. **10.185.** $y = \frac{C}{x^2}$. **10.186.** $x + y^2 = C$. **10.187.** $T = a + (T_0 - a)e^{-kt}$. **10.188.** Через 40 мин. **10.189.** $\omega = 5 \cdot (3/5)^{t/120}$ (об/с); через 6 мин 18 с. Указание. Уравнение имеет вид $\frac{d\omega}{dt} = -k\omega$. **10.190.** Через 1575 лет. **10.191.** За 6 мин 5 с. Указание. Уравнение имеет вид $wv(h)\,dt = -S(h)\,dh$, где w — площадь отверстия, $v(h)$ — скорость истечения воды, h — уровень жидкости, $S(h)$ — площадь поперечного сечения сосуда, t — время. **10.192.** 0,0878. Указание. Уравнение имеет вид $dQ = -kQ\,dh$. **10.193.** $\approx$ 50 с; $\approx$ 15 м. **10.194.** $t \approx 0{,}0011$ с. Указание. Уравнение имеет вид $m\frac{dv}{dt} = -kv^2$. **10.195.** 0,5 кг. **10.196.** а) 56,5 г; б) 7,84 ч. **10.197.** 0,06%. Указание. Уравнение имеет вид $(0{,}01x - 0{,}0004)1500\,dt = -10\,800 \cdot 0{,}01\,dx$, где x — объемная доля (в %) углекислоты в воздухе в момент времени t.

10.198. $i = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t + L\omega e^{-\frac{R}{L}t})$.

10.199. $y' < x^2$. **10.200.** $y' > 0$. **10.207.** $y'' = 0$. **10.208.** $\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2} = R^2$. **10.209.** $y'' + y = 0$. **10.210.** $y''' = 0$. **10.211.** $y = (C_1 + \operatorname{arctg} x)x - \ln\sqrt{1+x^2} + C_2$. **10.212.** $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$. **10.213.** $y = \frac{x^3}{6}\ln|x| + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. **10.214.** $y = \frac{3}{2}x^2\ln|x| + \frac{1}{3}x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **10.215.** $C_1^2y = C_1x - \ln|C_1x+1| + C_2$, $y = \frac{x^2}{2} + C$, $y = C$. **10.216.** $y = C_1\operatorname{tg}(C_1x + C_2)$, $2C_1x + C_2 = \ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right|$, $y(C - x) = 1$, $y = C$. **10.217.** $y = C_1\sin x + C_2 - x - \frac{1}{2}\sin 2x$. **10.218.** $y = C_1x^2 + C_2 + e^x(x-1)$. **10.219.** $4C_1y = 4 + (C_1x + C_2)^2$. **10.220.** $y = x + C_1\ln|y| + C_2$, $y = C$. **10.221.** $y = C_1\operatorname{arctg} C_1x + C_2$, $y = \frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{x - C_1}{x + C_1}\right| + C_2$, $y = C - \frac{1}{x}$. **10.222.** $C_1^2y = (C_1^2x^2 + 1)\operatorname{arctg} C_1x - C_1x + C_2$, $2y = k\pi x^2 + C$ $(k \in \mathbb{Z})$. **10.223.** $y = \frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x - \frac{1}{C_1}\right) + C_2$, $y = \frac{ex^2}{2} + C$. **10.224.** $y = \frac{1}{x} + C_1\ln|x| + C_2$. **10.225.** $y = C_1(x\sqrt{x^2-1} - \ln|x\sqrt{x^2-1}|) + x^2 + C_2$, $y = C_1(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + x^2 + C_2$. **10.226.** $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$.

10.227. $2y = C_1\cos 2x + (1+2C_1)x^2 + C_2x + C_3$. **10.228.** $2y = C_1x^2 - 2C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1| + C_2x + C_3$. **10.229.** $y = C_3 - (x+C_1)\ln|x+C_1| + C_2x$, $y = C_1x + C_2$. **10.230.** $x = 2C_1p - \ln|p| + C_2$, $y = C_1p^2 - p$; $y = Ce^{-x}$; $y = C$. **10.231.** $x = \pm\frac{2}{3}(\sqrt{y} - 2C_1)\sqrt{\sqrt{y}+C_1} + C_2$. **10.232.** $\frac{\sqrt{C_1y^2+1}}{C_1} = C_2 \pm x$. **10.233.** $C_1^2y + 1 = \pm\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$, $C_1^2y - 1 = \sin(C_1x+C_2)$, $2y = (x+C)^2$, $y = 0$. **10.234.** $\ln y = C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$, $\ln\left|\frac{\ln y - C_1}{\ln y + C_1}\right| = 2C_1x + C_2$, $(C-x)\ln y = 1$, $y = C$. **10.235.** $\operatorname{ctg} y = C_2 + C_1x$, $y = C$. **10.236.** $y = 1 + \frac{1}{C_1x+C_2}$, $y = C$. **10.237.** $y = \frac{1}{12}(x^3+6x^2) + C_1x\ln|x| + C_2x + C_3$. **10.238.** $y^2 = \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$. **10.239.** $y = C_1x + \frac{C_2}{x}$. **10.240.** $y = C_2xe^{C_1x} - (C_2/C_1)e^{C_1x} + C_3$. **10.241.** $y = C_2xe^{-C_1x}$. Указание. Уравнение однородно относительно y, y', y''. **10.242.** $y = C_2e^{\pm\frac{(x^2+C_1)^{3/2}}{3}}$, $y = 0$. **10.243.** $y^2 = C_1x^3 + C_2$, $y = 0$. **10.244.** $y = \frac{C_2}{\cos^2(x+C_1)}$, $y = 0$. **10.245.** $y = (x-2)e^x + x + 3$. **10.246.** $y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$. **10.247.** $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}$. **10.248.** $y = 2\ln|x+1| - x + 1$. **10.249.** $y = -\ln|x-1|$. **10.250.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right| = 2(x+1)$. **10.251.** $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. **10.252.** $y = e^{x^2/2}$. **10.253.** $(3-x)y^5 = 8(x+2)$. **10.254.** $y = 1 + \sin x$. **10.255.** $y = 1 - e^x$, $y = -1 + e^{-x}$. **10.256.** $y = 1 - x$. **10.257.** $x = C_1e^p - 2p - 2$, $y = C_1(p-1)e^p - p^2 + C_2$. **10.258.** $x = \frac{\ln|t|}{2} + \frac{3}{4t^2} + C_1$, $y = \frac{t}{4} + \frac{3}{4t^3} + C_2$. **10.259.** $x = (p+1)e^p + C_1$, $y = p^2e^p + C_2$. **10.260.** $x = 3C_1p^2 + \ln|p| + C_2$, $y = 2C_1p^3 + p$; $y = C$. **10.261.** $y = \pm\ln\cos x$. **10.262.** а) $y = \frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$ при $y'' > 0$; б) $(x+C_2)^2 + y^2 = C_1^2$ при $y'' < 0$. **10.263.** а) $4(C_1y-1) = C_1^2(x+C_2)^2$ при $y'' > 0$; б) $x = \frac{C_1}{2}\times(t-\sin t) + C_2$, $y = \frac{C_1}{2}(1-\cos t)$ при $y'' < 0$. Указание. $\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\,dy$ вычислить с помощью подстановки $y = C_1\sin^2\frac{t}{2}$. **10.264.** $y = a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$.

10.265. $e^{y/a}\dfrac{1}{\cos x/a}$, где $a = \dfrac{H}{qg}$. **10.266.** $v = \sqrt{\dfrac{F}{k}}\,\mathrm{th}\left(\dfrac{\sqrt{kF}}{m}t\right)$, $x = \dfrac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\left(\dfrac{\sqrt{kF}}{m}t\right)$. **10.267.** 1,89 с, 16,6 м/с. Указание. Использовать ответы к задаче 10.266, положив $P = mg$. **10.268.** Время подъема $T_{\text{п}} = \sqrt{\dfrac{m}{kg}}\,\mathrm{arctg}\, v_0\sqrt{\dfrac{k}{mg}}$; высота подъема $h_{\max} = \dfrac{m}{2k}\ln\left(1+\dfrac{kv_0^2}{mg}\right)$; скорость спуска $V_{\text{сп}} = v_0\sqrt{\dfrac{mg}{mg+kv_0^2}}$; время спуска $T_{\text{сп}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m}{kg}}\,\times$ $\times\,\ln\dfrac{\sqrt{mg}+\sqrt{k}V_{\text{сп}}}{\sqrt{mg}-\sqrt{k}V_{\text{сп}}}$. **10.269.** 1,75 с; 16,3 м/с. Указание. Использовать ответы к задаче 10.268. **10.270.** $x = \sqrt{x_0^2+\dfrac{k}{mx_0^2}t^2}$. **10.271.** $x = \sqrt{x_0^2-\dfrac{k}{mx_0^2}t^2}$, $T = x_0^2\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. **10.272.** $x = -\dfrac{gt^2}{2}+u_0\displaystyle\int_0^t \ln\frac{\varphi(0)}{\varphi(t)}\,dt$; $x = -\dfrac{gt^2}{2}+\dfrac{u_0}{\alpha}\big((1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t\big)$, $x(10) = 0{,}54$ км, $x(30) = 5{,}65$ км, $x(50) = 18{,}44$ км.

10.273. $\sqrt{\dfrac{H}{2gR^2}}\left(\sqrt{R(H-R)}+\dfrac{H}{2}\arcsin\left(1-\dfrac{2R}{H}\right)+\dfrac{\pi H}{4}\right)$.

10.274. ≈ 116 ч. Указание. Использовать ответ к задаче 10.273.

10.275. $\approx 11{,}18$ км/с. **10.276.** $y = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{1+k}\left(\dfrac{x}{a}\right)^{1+k}-\dfrac{1}{1-k}\left(\dfrac{x}{a}\right)^{1-k}\right)+$ $+\,\dfrac{ka}{1-k^2}$, где $k = \dfrac{v}{u} < 1$. **10.277.** $EIy = \dfrac{q}{4}\left(\dfrac{l^2x^2}{4}-\dfrac{x^4}{6}-\dfrac{5l^4}{96}\right)$, $EIy_{\max} = -\dfrac{5l^4q}{384}$. Указание. $EIy'' = \dfrac{q}{2}\left(\dfrac{l^2}{4}-x^2\right)$, где E — модуль Юнга, I — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Ox. **10.278.** $EIy = \left(\dfrac{Fl^2}{2}+\dfrac{ql^3}{6}\right)x-\dfrac{Fx^3}{6}-\dfrac{qx^4}{24}-\dfrac{Fl^3}{3}-\dfrac{ql^4}{8}$, $EIy_{\max} = -\dfrac{Fl^3}{3}-\dfrac{ql^4}{8}$. Указание. $EIy'' = -Fx-\dfrac{qx^2}{2}$, где E — модуль Юнга, I — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Ox. **10.279.** $F = \dfrac{3}{8}ql$. Указание. $EIy'' = F(l-x)-\dfrac{q(l-x)^2}{2}$, $EIy = \dfrac{F(l-x)^3}{6}-\dfrac{q(l-x)^4}{24}+\left(\dfrac{Fl^2}{2}-\dfrac{ql^3}{6}\right)x-\dfrac{Fl^3}{6}+\dfrac{ql^4}{24}$, где E —

модуль Юнга, I — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Ox. **10.281.** $y = C_1e^{5x} + C_2e^{x}$. **10.282.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$. **10.283.** $y = C_1\dfrac{\cos x}{x} + C_2\dfrac{\sin x}{x}$. **10.284.** $y = C_1\left(\dfrac{1}{2}x\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| - 1\right) + C_2x$. **10.285.** $y = C_1x + \dfrac{C_2}{x} + \dfrac{C_3}{x^2}$. **10.286.** Линейно независима. **10.287.** Линейно зависима. **10.288.** Линейно независима. **10.289.** Линейно зависима. **10.290.** Линейно независима. **10.291.** Линейно независима. **10.292.** Линейно независима. **10.293.** Линейно зависима. **10.294.** Линейно зависима. **10.295.** Линейно независима. **10.296.** $y'' + y' = 0$. **10.297.** $y'' - 4y' + 5y = 0$. **10.298.** $y'' - \dfrac{6}{x}y' + \dfrac{12}{x^2}y = 0$. **10.299.** $y''' - y'' = 0$. **10.300.** $y''' + y' = 0$. **10.301.** $y''' - y'' = 0$. **10.302.** $y'' - 8y' + 15y = 0$. **10.303.** $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$.

10.304. $\lhd$ Из равенства $W(x_0) = 0$ следует, что однородная система линейных алгебраических уравнений с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\begin{array}{c}
\alpha_1y_1(x_0) + \alpha_2y_2(x_0) + \ldots + \alpha_ny_n(x_0) = 0,\\
\alpha_1y_1'(x_0) + \alpha_2y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_ny_n'(x_0) = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0
\end{array} \qquad (*)$$

имеет такое решение $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$, что не все α_i^* равны нулю. Функция $y(x) = \alpha_1^*y_1(x) + \alpha_2^*y_2(x) + \ldots + \alpha_n^*y_n(x)$ является решением данного линейного однородного уравнения и, как это следует из равенств $(*)$, удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, … …, $y^{n-1}(x_0) = 0$. Но таким же начальным условиям удовлетворяет и функция $y \equiv 0$, тоже являющаяся решением данного уравнения (функция $y \equiv 0$ есть решение любого линейного однородного дифференциального уравнения). Отсюда на основании теоремы Коши о существовании и единственности решения заключаем, что $\alpha_1^*y_1(x) + \ldots + \alpha_n^*y_n(x) \equiv 0$ на (a, b), т.е. система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависима на (a, b). Но тогда вронскиан $W(x)$ этой системы равен нулю всюду на (a, b), что и требовалось доказать. $\rhd$

10.305. $\begin{vmatrix} y & y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x)\\ y' & y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y^{(n)} & y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$. Указание. Всякое решение искомого уравнения вместе с функциями $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ образует линейно зависимую систему.

10.306. $y = e^x + 2\cos x + 3\sin x$. **10.307.** $y = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x}$. **10.308.** $y = C_1x^3 + C_2x^4 + \frac{1}{2}x$. **10.309.** $y = C_1e^{2x} + C_2\sin x + C_3\cos x + e^{3x}$. **10.310.** $y = C_1e^x + C_2x - x^2 - 1$. **10.311.** $y = C_1\cos x + C_2x\cos x - \sin x\cos x$. **10.312.** $y = C_1e^{5x} + C_2e^x + 5x + 6 - e^{2x}$. **10.313.** $y = C_1 + C_2\sin x + C_3\cos x + \frac{1}{2}e^x - \sin 2x$. **10.314.** $y = e^{kx}(1 + (1-k)x)$.

10.315. $y'' - y' - 6y = 0$, $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$. **10.316.** $y'' - 2y' + y = 0$, $y = (C_1 + C_2x)e^x$. **10.317.** $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{3x}$.

10.318. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$, $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{2x}$.

10.319. $y''' - 8y'' + 16y' = 0$, $y = C_1 + (C_2 + C_3x)e^{4x}$. **10.321.** $y = C_1e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2e^{(1+\sqrt{3})x}$. **10.322.** $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. **10.323.** $y = e^{3x}(C_1 + C_2x)$. **10.324.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x/3}$. **10.325.** $y = e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right)$. **10.326.** $y = e^{-x/2}(C_1 + C_2x)$. **10.327.** $y = C_1e^x + e^{2x}(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x)$.

10.328. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos\sqrt{3}x + C_4\sin\sqrt{3}x$.

10.329. $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^{-x}$. **10.330.** $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}$. **10.331.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x(C_3\cos x + C_4\sin x)$. **10.332.** $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + (C_3 + C_4x)e^{-2x}$. **10.333.** $y = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + x(C_4\cos 2x + C_5\sin 2x)$. **10.334.** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5x)$.

10.335. $y = (C_1 + C_2x)e^x + (C_3 + C_4x)\cos x + (C_5 + C_6x)\sin x$.

10.336. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6x)$. **10.337.** $y = e^x$. **10.338.** $y = (7 - 3x)e^{x-2}$. **10.339.** $y = 2 + e^{-x}$. **10.340.** $y = \operatorname{sh} x$. Указание. Начальные условия: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. **10.341.** $y = \frac{5}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{3x}$.

10.342. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1)$.

10.343. $y = (C_1 - \ln|\sin x|)\cos 2x + \left(C_2 - x - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\right)\sin 2x$.

10.344. $y = \left(C_1 + C_2x + \sqrt{4 - x^2} + x\arcsin\frac{x}{2}\right)e^x$.

10.345. $y = \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$.

10.346. $(Ax^3 + Bx^2)e^{4x}$. **10.347.** $x(A\cos 4x + B\sin 4x)$. **10.348.** $Ax + B\cos 8x + C\sin 8x$. **10.349.** $(Ax + B)\sin 2x + (Cx + D)\cos 2x$. **10.350.** $(Ax^2 + Bx)e^{4x}$. **10.351.** $Ax^3 + Bx^2 + Cx$.

10.352. $e^x\big((Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x\big)$.

10.353. $xe^{2x}\big((Ax^2+Bx+C)\cos 3x+(Dx^2+Ex+F)\sin 3x\big)$.

10.354. $y=C_1e^x+\left(C_2-\dfrac{x}{2}\right)e^{-x}$. **10.355.** $y=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+\dfrac{x\operatorname{sh}x}{2}$.

10.356. $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}-\dfrac{x}{5}e^{-4x}\left(\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{36}\right)e^{-x}$.

10.357. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\dfrac{1}{6}(5\cos 3x-\sin 3x)$.

10.358. $y=(C_1+C_2x)e^{mx}+\dfrac{(m^2-n^2)\sin nx+2mn\cos nx}{(m^2+n^2)^2}$.

10.359. $y=(C_1+C_2x)e^{mx}+\dfrac{1}{2m^2}\cos mx$. **10.360.** $y=C_1\cos x+C_2\sin 2x+x(x\sin x+\cos x)$. **10.361.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{8}(1+x\sin 2x)$. **10.362.** $y=C_1e^{x/2}+C_2e^{-x/2}-x^3$. **10.363.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+\dfrac{1}{2}e^{-x}+xe^{-2x}$. **10.364.** $y=C_1+C_2e^{3x}+\dfrac{x}{3}e^{3x}+2x+3x^2$. **10.365.** $y=C_1+C_2x+(C_3+x)e^{-x}+x^3-3x^2$.

10.366. $y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2+\dfrac{x^3}{6}\right)e^x$. **10.367.** $y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x+\dfrac{x^2}{12}(x^2+2x-12)$. **10.368.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x+\dfrac{x}{8}(x-3)e^x-\dfrac{x}{4}\sin x$. **10.369.** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+\dfrac{x^4}{24}+\left(\dfrac{x^2}{2}-4x+C_5\right)e^x$. **10.370.** $y=e^{2x-1}-2e^x+e-1$. **10.371.** $y=e^x-e^{-x}+x^2$. **10.372.** $y=\dfrac{x}{4}+\cos 2x+\dfrac{7}{16}\pi\sin 2x$. **10.373.** $y=2\cos x-5\sin x+2e^x$. **10.374.** $y=2xe^x$. **10.375.** $y=\cos x+2\sin x+e^{-x}+3e^x+2xe^x$. **10.376.** $y=e^x\big((2x-\pi-1)\sin x-\pi\cos x\big)$. **10.377.** $y=C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|$. **10.378.** $y=C_1\cos(2\ln|x|)+C_2\sin(2\ln|x|)+2x$. **10.379.** $y=C_1x^3+\dfrac{C_2}{x^2}-2\ln x+\dfrac{1}{3}$. **10.380.** $y=C_1+C_2x^2+C_3x^4$. **10.381.** $y=C_1+C_2\ln|x|+C_3x^3$. **10.382.** $y=(2x+1)(C_1+C_2\ln|2x+1|)$. **10.383.** $y=\dfrac{1}{\operatorname{sh}2\pi}\operatorname{sh}x$. **10.384.** $y=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}$. **10.385.** $y=-\dfrac{\cos x}{\sin 1}$ (единственное решение). **10.386.** Нет решений. **10.387.** $(x-2)^2+y^2=5$. **10.388.** $y=1-\sin x-\cos x$. **10.389.** $y=\sqrt{\dfrac{e-e^{-x}}{e-1}}$. **10.390.** $y=\dfrac{x}{2}-x^2+x^2\ln x$.

10.391. $x = e^{-\alpha t}\left(a\cos\beta t + \dfrac{a\alpha + v_0}{\beta}\sin\beta t\right)$, где $\alpha = \dfrac{\lambda}{2m}$, $\beta = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \alpha^2}$.

Указание. Уравнение имеет вид $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \lambda\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$.

10.392. $x = e^{-\alpha t}\left(a\operatorname{ch}\beta t + \dfrac{\alpha a + v_0}{\beta}\operatorname{sh}\beta t\right)$, где $\alpha = \dfrac{\lambda}{2m}$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 + \dfrac{k}{m}}$.

Указание. Уравнение имеет вид $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \lambda\dfrac{dx}{dt} - kx = 0$.

10.393. а) $r = a\operatorname{ch}\omega t$; б) $r = \dfrac{v_0}{\omega}\operatorname{sh}\omega t$. Указание. Уравнение имеет вид $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$. **10.394.** $r = ae^{-\mu\omega t}\left(\operatorname{ch}\omega\sqrt{1+\mu^2}\,t + \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\operatorname{sh}\omega\sqrt{1+\mu^2}\,t\right)$.

10.395. $T = \dfrac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80}) \approx 3$ с. Указание. Уравнение имеет вид $\dfrac{d^2s}{dt^2} - \dfrac{g}{9}s = \dfrac{g}{9}$, где s — путь, пройденный за время t концом опускающейся части цепи. **10.396.** $x = \dfrac{2g\sin 30t - 60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t}{g-900}$ (см). Указание. Если x отсчитывать от положения покоя груза, то $4\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4g - k(x_0 + x - y - l)$, где x_0 — расстояние точки покоя груза от начальной точки подвеса пружины, l — длина пружины в состоянии покоя, поэтому $k(x_0 - l) = 4g$ и, следовательно, $4\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(x-y)$, где $k = 4g$, $g = 981$ см/с^2.

10.397.
$$i = e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{E}{(L\omega - 1/(C\omega))^2 + R^2}\left(\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\cos\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t - \right.$$
$$\left. -\frac{R}{2}\left(\omega + \frac{1}{LC\omega}\right)\frac{1}{\sqrt{1/LC - R^2/(4L^2)}}\sin\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t\right) +$$
$$+\frac{E}{(1/(C\omega) - L\omega)^2 + R^2}\left(\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)\cos\omega t + R\sin\omega t\right).$$

Указание. Дифференциальное уравнение цепи: $L\dfrac{d^2i}{dt^2} + R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}i = \dfrac{de}{dt}$.

10.398. $i = \dfrac{E}{2L}t\sin\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$. $\triangleleft$ Имеем $\dfrac{de}{dt} = E\omega\cos\omega t$. Дифференциальное уравнение цепи: $L\dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{1}{C}i = E\omega\cos\omega t$. Общее решение соответствующего однородного уравнения: $i_0 = C_1\cos\dfrac{1}{\sqrt{LC}}t + C_2\sin\dfrac{1}{\sqrt{LC}}t$.

Частное решение линейного неоднородного уравнения имеет вид $\widetilde{i} = t(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$. Тогда $\dfrac{d\widetilde{i}}{dt} = t(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t) + A\cos\omega t + B\sin\omega t$, $\dfrac{d^2\widetilde{i}}{dt^2} = t(-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t) + (-2A\omega\sin\omega t + 2B\omega\cos\omega t)$. Подставляя в уравнение выражения $\widetilde{i}$ и $\dfrac{d^2\widetilde{i}}{dt^2}$ и учитывая, что $L\omega^2 - \dfrac{1}{C} = 0$, получим тождество $L(-2A\omega\sin\omega t + 2B\omega\cos\omega t) \equiv E\omega\cos\omega t$, откуда $A = 0$, $B = \dfrac{E}{2L}$. Следовательно, $\widetilde{i} = \dfrac{E}{2L} t \sin\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$. Общее решение: $i = C_1\cos\dfrac{1}{\sqrt{LC}}t + C_2\sin\dfrac{1}{\sqrt{LC}}t + \dfrac{E}{2L}t\sin\dfrac{1}{\sqrt{LC}}t$. Вычисляя $\dfrac{di}{dt} = -\dfrac{C_1}{\sqrt{LC}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{LC}}t + \dfrac{C_2}{\sqrt{LC}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{LC}}t + \dfrac{E}{2L\sqrt{LC}}t\cos\dfrac{1}{\sqrt{LC}}t + \dfrac{E}{2L}\sin\dfrac{1}{\sqrt{LC}}t$ и используя начальные условия, найдем $C_1 = C_2 = 0$. Искомое частное решение: $i = \dfrac{E}{2L}t\sin\dfrac{1}{\sqrt{LC}}t$. ▷

10.399. $i = -\dfrac{E}{2\omega L}\cos\varphi\sin\omega t + \dfrac{E}{2L}t\cos(\omega t + \varphi)$. **10.400.** $x^2 + y^2 = z^2 - 2z(y - xy')$, $x + yy' = zz' - z'(y' - xy')$. **10.401.** $yy' + zz' = 0$, $y^2 + 2xzz' = x^2z'^2$. **10.402.** $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{u} = \dfrac{du}{xyz - z^3}$. **10.403.** $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{u} = \dfrac{du}{v} = \dfrac{dv}{w} = \dfrac{dw}{y^2}$. **10.404.** $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{v} = \dfrac{dz}{w} = \dfrac{du}{t} = \dfrac{dv}{v + w} = \dfrac{dw}{w + t} = \dfrac{dt}{t + v}$. **10.405.** $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{v} = \dfrac{dz}{u} = \dfrac{du}{2y - z} = \dfrac{dv}{w} = \dfrac{dw}{x + y - z}$. **10.406.** $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{t} = \dfrac{dz}{x^2 - uz} = \dfrac{dt}{z + u} = \dfrac{du}{dv} = \dfrac{dv}{w} = \dfrac{dw}{-xy}$. **10.412.** $C_1x^2 = 2t + C_2$, $y^2 = C_1(2t + C_2)$. **10.413.** $x^2 = t^2 + C_1$, $y^2 = t^2 + C_2$. **10.414.** $y^2 = \dfrac{(C_1 + C_2 - x)^2}{2(C_2 - x)}$, $z^2 = \dfrac{(C_1 - C_2 + x)^2}{2(C_2 - x)}$. **10.415.** $x = \ln|C_3(C_1t + C_2)|$, $y = \ln|C_3(C_1t + C_2)| - C_1$, $z = (C_1 + 1)t + C_2$. **10.416.** $x^2 + y^2 + z^2 = C_1y$, $z = C_2y$. **10.417.** $x = C_1t$, $y = C_2e^t + \dfrac{2}{C_1}$. **10.418.** $z - 2y = C_1$, $2\sqrt{z - x - y} + y = C_2$. **10.419.** $x^2 = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$, $y^2 = C_1e^{2t} - C_2e^{-2t}$. **10.420.** $y = x + \dfrac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}$, $z = C_2e^{C_1x}$; $y = x - e^x$, $z = e^{-x}$. **10.421.** $z = C_1y$, $y^3 = \dfrac{3x^2}{2C_1} + C_2$; $z = y$, $y^3 = \dfrac{3}{2}x^2 + 1$.

10.422. а) Да; б) нет. Указание. Соотношение $\varphi(t,\,x,\,y)=C$ является первым интегралом системы $x'_t=f_1(t,\,x,\,y)$, $y'_t=f_2(t,\,x,\,y)$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+f_1(t,\,x,\,y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+f_2(t,\,x,\,y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0$.

10.423. $2e^{2-y}=x^2+(y-1)^2$. **10.424.** $y^3+3y(x^2-1)-10=0$. **10.425.** $y=x(1+\ln\sqrt{|x|})$. **10.426.** $(y-x)^2+x^2=1$. **10.427.** $y=C_1x^{1+\sqrt2}+C_2x^{1-\sqrt2}$, $z=x^{\sqrt2-1}C_1(2+\sqrt2)+x^{-\sqrt2-1}C_2(2-\sqrt2)$. **10.428.** $y=C_1+C_2x$, $z=2C_2+\dfrac{C_1}{x}$. **10.429.** $x=C_1t+\dfrac{C_2}{t}$, $y=-C_1t+\dfrac{C_2}{t}$. **10.430.** $x=\dfrac{C_2}{t^2}$, $y=C_2e^t-\dfrac{C_1}{t^2}$. **10.431.** $x=C_1e^t+C_2e^{2t}$, $y=C_1e^t+2C_2e^{2t}$. **10.432.** $x=3C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$, $y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$; $x=3e^{2t}$, $y=e^{2t}$. **10.433.** $x=e^{5t}(C_1\cos2t+C_2\sin2t)$, $y=e^{5t}\big((C_1-C_2)\sin2t-(C_1+C_2)\cos2t\big)$; $x=e^{5t}(\cos2t-\sin2t)$, $y=2e^{5t}\sin2t$.

10.434. $x=e^{-2t}(C_1\cos3t+C_2\sin3t)$,
$$y=\frac{1}{5}e^{-2t}\big((4C_1-3C_2)\cos3t+(3C_1+4C_2)\sin3t\big).$$

10.435. $x=(2C_1t+2C_2+C_1)e^{-t}$, $y=(C_1t+C_2)e^{-t}$.

10.436. $x=(C_1t+C_2)e^{-3t}$, $y=\left(-C_1t+\dfrac{C_1}{2}-C_2\right)e^{-3t}$; $x=2te^{-3t}$, $y=(1-2t)e^{-3t}$. **10.437.** $x=C_1e^t+e^{-t/2}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt3}{2}t+C_3\sin\dfrac{\sqrt3}{2}t\right)$, $y=C_1e^t+\dfrac12e^{-t/2}\left((C_3\sqrt3-C_2)\cos\dfrac{\sqrt3}{2}t-(C_2\sqrt3+C_3)\sin\dfrac{\sqrt3}{2}t\right)$, $z=C_1e^t+\dfrac12e^{-t/2}\left((C_2\sqrt3-C_3)\sin\dfrac{\sqrt3}{2}t-(C_3\sqrt3+C_2)\cos\dfrac{\sqrt3}{2}t\right)$; $x=y=z=e^t$. **10.438.** $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$, $y=C_1e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1e^{2t}-(C_2+C_3)e^{-t}$; $x=e^{2t}+e^{-t}$, $y=e^{2t}+e^{-t}$, $z=e^{2t}-2e^{-t}$. **10.439.** $x=C_1+3C_2e^{2t}$, $y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}$. **10.440.** $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$, $y=C_1e^t+2C_3e^{3t}$, $z=2C_1e^t+C_2e^{2t}+2C_3e^{3t}$. **10.441.** $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\dfrac23t-\dfrac{5}{18}$, $y=C_1e^{2t}+3C_2e^{-3t}-\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{12}$. **10.442.** $x=(C_2\cos t+C_2\sin t-1)e^t$, $y=(C_1\sin t-C_2\cos t)e^t$. **10.443.** $x=\left(C_1+C_2t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-3e^t\right)e^{2t}$,

$$y = \left(C_1 - \frac{C_2}{3} + C_2 t + \frac{t^3}{2} - 2e^t\right) e^{2t}.$$

10.444. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t \cos t,$

$$y = (C_2 - C_1)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t + t(\cos t + \sin t).$$

10.445. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t, \quad y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2.$

10.446. $x = 3(C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}) + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t,$

$$y = 2(C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}) - 2(C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t).$$

Указание. Искать решение системы в виде $x = Ae^{kt}$, $y = Be^{kt}$. **10.447.** $x = \dfrac{a(1-2^{-t})}{4}$, $y = \dfrac{3a(1-2^{-t})}{4}$. Указание. Система дифференциальных уравнений: $\dot{x} = k_1(a - x - y)$, $\dot{y} = k_2(a - x - y)$. **10.448.** $x = a\cos\dfrac{k}{\sqrt{m}}t$, $y = \dfrac{v_0\sqrt{m}}{k}\sin\dfrac{k}{\sqrt{m}}t$; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2y^2}{mv_0^2} = 1$. Указание. Дифференциальные уравнения движения: $m\ddot{x} = -k^2x$, $m\ddot{y} = -k^2y$. **10.449.** Неустойчиво. **10.450.** Устойчиво. **10.451.** Неустойчиво. **10.452.** Асимптотически устойчиво. **10.453.** Асимптотически устойчиво, если $\alpha < -1/2$; устойчиво, если $\alpha = -1/2$, и неустойчиво при $\alpha > -1/2$. **10.454.** $\dot{z}_i = -\dot{\varphi}_i + f_i\big(t, z_1 + \varphi_1(t), \ldots, z_n + \varphi_n(t)\big) = F_i(t, z_1, \ldots, z_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Указание. Преобразовать систему (1) к новым переменным, полагая $z_i = x_i - \varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

10.455. Точка покоя $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы дифференциальных уравнений устойчива, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t_0) < \delta^2(\varepsilon)$ следует $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t) < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$. Если, кроме того, выполнено соотношение $\lim\limits_{t\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t) = 0$, то точка покоя системы асимптотически устойчива. Точка покоя неустойчива, если найдутся $\varepsilon > 0$ и номер i такие, что при любом $\delta > 0$ из неравенства $|x_i(t_0)| < \delta$ следует $|x_i(t)| > \varepsilon$ для некоторого $t > t_0$. **10.456.** Неустойчивый фокус. **10.457.** Седло. **10.458.** Неустойчивый фокус. **10.459.** Устойчивый узел. **10.460.** Устойчивый узел. **10.461.** Устойчивый узел. **10.462.** Ни при каких α. **10.463.** $|\alpha| \geqslant 2$.

10.464. $\alpha < 0$, $|\alpha| \geqslant |\beta|$ — случай большого «отрицательного трения», точка покоя — неустойчивый узел; $\alpha < 0$, $|\alpha| < |\beta|$ — случай «отрицательного трения», точка покоя — неустойчивый фокус; $\alpha = 0$, точка покоя устойчива — центр; $\alpha > 0$, $|\alpha| < |\beta|$, точка покоя — устойчивый фокус; $\alpha > 0$, $|\alpha| \geqslant |\beta|$, сопротивление среды велико, точка покоя — устойчивый узел. Указание. Заменить уравнение эквивалентной нормальной системой $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -2\alpha y - \beta^2 x$.

10.465. Указание. Использовать запись частного решения однородной системы при различных значениях характеристического корня. **10.466.** Неустойчива. **10.467.** Устойчива. **10.468.** $V = x^2 + y^2$; устойчива. **10.469.** $V = x^2 + y^2$; неустойчива. **10.470.** $V = x^4 + y^4$; устойчива. **10.471.** $V = x^2+y^2$; неустойчива. **10.472.** $V = 2x^2+y^2$; устойчива. **10.473.** $V = y^2 - \frac{1}{2}x^2$; неустойчива. **10.474.** Устойчива. **10.475.** Неустойчива. **10.476.** Неустойчива. **10.477.** Устойчива. **10.478.** Устойчива. **10.479.** Неустойчива. **10.480.** $V = 3x^2 + 4y^2$; асимптотически устойчива.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

2

- ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ
- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
- КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ФМ