СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

под редакцией
К. С. КОЛЕСНИКОВА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.21
С 23
УДК 531

АВТОРЫ:
К. С. КОЛЕСНИКОВ, Г. Д. БЛЮМИН, В. Н. ДРОНГ,
В. В. ДУБИНИН, М. М. ИЛЬИН, А. И. ОГУРЦОВ,
А. А. ПОЖАЛОСТИН, Ю. С. САРАТОВ

Сборник задач по теоретической механике/Под ред. К. С. Колесникова.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.— 320 с.

Сборник задач охватывает все разделы курса Теоретической механики и наряду с этим содержит главы «Электромеханика», «Гидромеханика», «Автоматическое управление и регулирование», выходящие за рамки традиционного курса. Значительно расширены в сравнении с другими задачниками главы, относящиеся к теории гироскопов, теории устойчивости, удару, теории колебаний. Сборник отличается от других также наличием большого числа прикладных задач, в которых рассматриваются реальные механизмы, машины, устройства, встречающиеся в современной технике. В каждом из разделов сборника имеется часть задач повышенной сложности; они могут быть использованы для углубленного изучения механики в кружковой работе, при подготовке к олимпиадам. Сборник предназначается для студентов высших технических учебных заведений.

Илл. 634.

$С\frac{1703020000-046}{053(02)\ 83}$ 123-82

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел третий

ДИНАМИКА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник задач составлен на основании опыта работы кафедры теоретической механики МВТУ им. Н. Э. Баумана. Он предназначен для студентов технических вузов. Авторы по возможности стремились в основу задач положить схемы машин, механизмов, приборов, с тем чтобы, с одной стороны, наполнить курс теоретической механики инженерным содержанием и, с другой стороны, на ранней стадии знакомства с предметом развивать у студента правильное понимание необходимости применения моделей реальных объектов и роли моделей в проведении расчетов и исследований.

По сравнению со сборником задач И. В. Мещерского расширены разделы по устойчивости движения, теории колебаний, удару, теории гироскопа. Некоторые задачи имеют комплексный характер и рассчитаны на применение теорем из различных разделов курса. Поэтому их расположение по главам является довольно условным.

Законы и теоремы теоретической механики являются основополагающими для всех разделов прикладной механики. И чтобы расширить представление студентов о применимости методов теоретической механики к решению различных задач техники, подчеркнуть фундаментальную роль теоретической механики для прикладных дисциплин, в сборник задач в качестве самостоятельных введены главы «Электромеханика», «Автоматическое управление и регулирование», «Гидромеханика». В этих главах подобраны задачи, которые при использовании сравнительно простых физических предположений, решаются на основании теорем теоретической механики.

Некоторые задачи сборника могут быть рекомендованы для самостоятельной работы хорошо успевающим студентам, их учебно-исследовательской работы, для подготовки к олимпиадам.

Главы 1, 2, 20 написаны К. С. Колесниковым; 3, 17 — В. И. Дронгом; 4, 21 — А. А. Пожалостиным; 5 — М. М. Ильиным, В. В. Дубининым; 6, 15 — Г. Д. Блюминым; 7 — В. И. Дронгом, В. В. Дубининым; 8 — В. И. Дронгом, А. И. Огурцовым, Ю. С. Саратовым; 9 — М. М. Ильиным, В. В. Дубининым; 10 — М. М. Ильиным, Г. Д. Блюминым; 11, 12 — А. И. Огурцовым, В. В. Дубининым; 13 — А. И. Огурцовым, В. В. Дубининым; 14 — Ю. С. Саратовым, К. С. Колесниковым; 16 — В. В. Дубининым; 18 — А. И. Огурцовым; 19 — Ю. С. Саратовым.

К. С. Колесников

Раздел первый

СТАТИКА

Глава 1

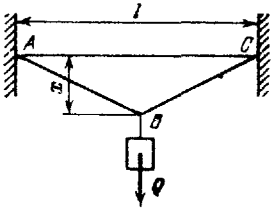
ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 1. Равновесие тела

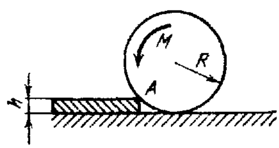
1.1. На нерастяжимой нити ABC в ее середине подвешен груз веса Q. Точки A и C, расстояние между которыми l, находятся на горизонтальной прямой. Смещение точки B от прямой AC равно x.

Определить натяжение нити в зависимости от отношения l/x.

Ответ: $N = \frac{Ql}{4x}\sqrt{\left(\frac{2x}{l}\right)^2 + 1}$.



К задаче 1.1.



К задаче 1.2.

1.2. Однородный круговой цилиндр веса $P = 100$ Н и радиуса $R = 0{,}5$ м требуется вкатить на плиту высоты $h = 0{,}1$ м. Какой момент M пары сил нужно приложить для этого к цилиндру, полагая, что в точке A проскальзывание невозможно?

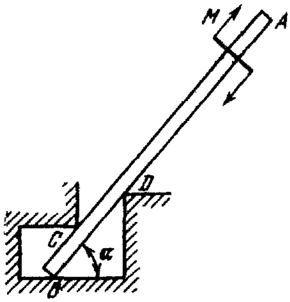
Ответ: $M = 2PR\sqrt{\frac{h}{2R}}\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2R}\right)^2} = 31{,}4$ Н·м.

1.3. Однородный стержень AB веса P опирается на гладкий горизонтальный пол в точке B под углом α и поддерживается двумя опорами C и D.

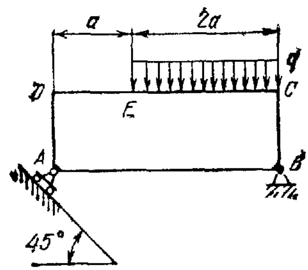
Определить величины реакций опор в точках B, C и D, если стержень нагружен парой сил, момент которой $M = 4Pa$, длина стержня $l = 6a$, расстояние $BC = CD = a$.

Ответ: $R_B = P$, $R_C = R_D = P(4 + 3\cos\alpha)$.

1.4. Жесткая рама $ABCD$ в точке B укреплена на неподвижном шарнире, в точке A поставлена на каток. Пролет рамы CE нагружен равномерно распределенной силой интенсивности $\mathbf{q}$.



К задаче 1.3.



К задаче 1.4.

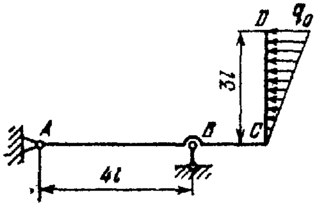
Определить величины реакций опор, если $a = 3$ м, $q = 2$ Н/м.

Ответ: $R_A = 5{,}64$ Н, $R_B = 8{,}96$ Н.

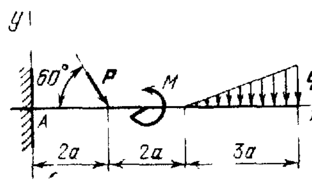
1.5. Пролет $CD = 3l$ Г-образного стержня нагружен силой, распределенной по линейному закону с максимальной интенсивностью $\mathbf{q}_0$.

Определить величины реакций опор, если $l = 3$ м, $q_0 = 2$ Н/м.

Ответ: $R_A = 6{,}72$ Н, $R_B = 3$ Н.



К задаче 1.5.



К задаче 1.6.

1.6. Консольная балка находится под действием силы $\mathbf{P}$, пары сил с моментом M и нагрузки, распределенной по линейному закону с максимальной интенсивностью $\mathbf{q}_0$.

Определить реакцию заделки, если $a = 1$ м, $P = 8$ Н, $M = 16$ Н·м, $q_0 = 2$ Н/м.

Ответ: $X_A = -4$ Н, $Y_A = 9{,}92$ Н, $M_A = 15{,}86$ Н·м.

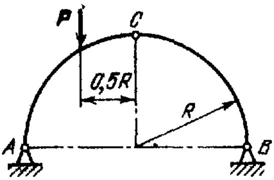
§ 2. Равновесие системы тел

1.7. Симметричная трехшарнирная арка нагружена вертикальной силой $\mathbf{P}$, как показано на рисунке.

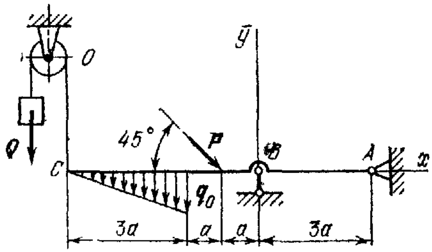
Определить величины реакций шарниров A и B.

Ответ: $R_A = \frac{P\sqrt{10}}{4}$, $R_B = \frac{P\sqrt{2}}{4}$.

1.8. Груз веса $Q = 30$ Н *) подвешен на нити, огибающей блок O и прикрепленной к концу C шарнирно опертого стержня AC.



К задаче 1.7.



К задаче 1.8.

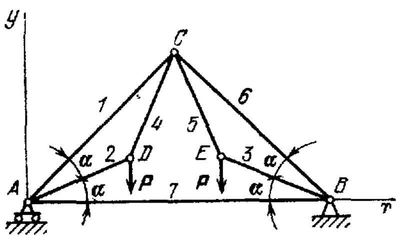
Определить величины реакций в опорах стержня, если $a = 1$ м, $P = 60$ Н, $q_0 = 3$ Н/м.

Ответ: $X_A = -42{,}3$ Н, $Y_A = -40{,}6$ Н, $R_B = 57{,}4$ Н.

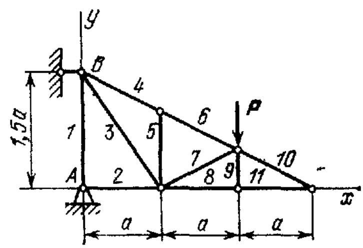
1.9. Ферма, изображенная на рисунке, нагружена во внутренних узлах D и E силами $P = 100$ Н.

Определить реакции опор и силы, действующие в стержнях *1*, *4* и *3*, если $\alpha = 15°$ и длины стержней *2*, *3*, *4*, *5* одинаковы.

Ответ: $X_B = 0$, $Y_B = Y_A = 100$ Н, $S_1 = -274$ Н, $S_3 = -141$ Н, $S_4 = 193$ Н. Знак минус означает, что стержень сжат.



К задаче 1.9.



К задаче 1.10.

1.10. Консольная ферма нагружена силой $P = 150$ Н, как показано на рисунке.

Определить реакции опор и силы, действующие в стержнях *6*, *7* и *8*.

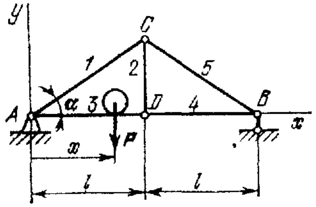
Ответ: $X_A = 200$ Н, $Y_A = 150$ Н, $X_B = -200$ Н, $S_6 = -S_7 = 168$ Н, $S_8 = 0$.

1.11. На мосту, схематично представленному фермой, стоит автомобиль веса **P**,

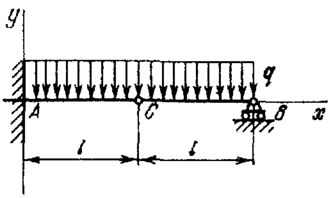
*) В дальнейшем условимся для векторной величины **Q** вместо выражения «вес **Q**, величина которого равна 30 Н», писать «вес $Q = 30$ Н».

Считая автомобиль материальной точкой, определить силы, действующие в стержнях фермы в зависимости от координаты x автомобиля, если $\alpha = 30°$.

Ответ: при $x \leqslant l$ $S_1 = S_5 = -Px/l$, $S_2 = Px/l$, $S_3 = S_4 = \frac{P\sqrt{3}\,x}{2l}$, при $x > l$ $S_1 = S_5 = -\frac{P(2l-x)}{l}$, $S_2 = \frac{P(2l-x)}{l}$, $S_3 = S_4 = \frac{P(2l-x)\sqrt{3}}{2l}$.



К задаче 1.11.



К задаче 1.12.

1.12. Стержни AC и CB, соединенные между собой шарнирно, нагружены равномерно распределенной силой с интенсивностью $\mathbf{q}$. Стержень AC заделан в стену, правый конец стержня CB поставлен на каток B.

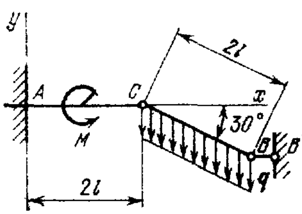
Определить реакции опор.

Ответ: $Y_B = 0{,}5ql$, $X_A = 0$, $Y_A = 1{,}5ql$; $M_A = ql^2$.

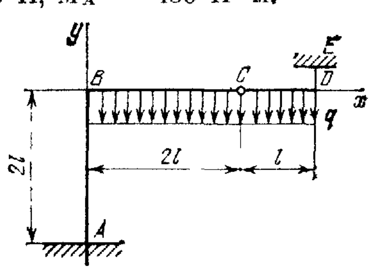
1.13. В стержневой конструкции горизонтальный стержень заделан в стену, наклонный — правым концом удерживается с помощью горизонтального стержня BB'. Нагрузка на конструкцию показана на рисунке; интенсивность распределенной нагрузки $q = 20$ Н/м, $M = 80$ Н · м, $l = 2$ м.

Определить реакцию заделки.

Ответ: $X_A = -69{,}2$ Н, $Y_A = 80$ Н, $M_A = -480$ Н · м.



К задаче 1.13.



К задаче 1.14.

1.14. Г-образный стержень ABC шарнирно соединен со стержнем CD, удерживаемым в горизонтальном положении нитью DE. Пролет BD нагружен равномерно распределенной силой с интенсивностью $\mathbf{q}$.

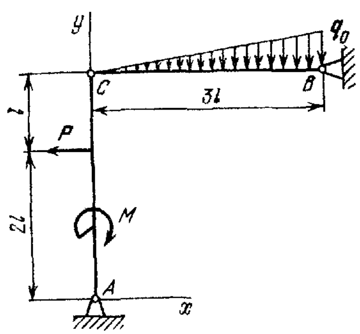
Определить натяжение нити DE и реакцию заделки.

Ответ: $T = 0{,}5ql$, $X_A = 0$, $Y_A = 2{,}5ql$, $M_A = 3ql^2$.

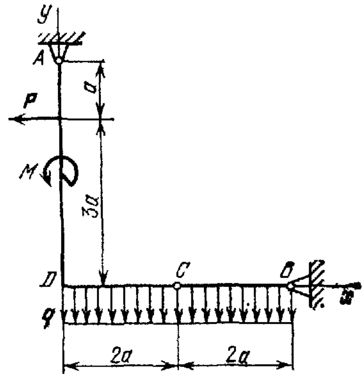
1.15. Два стержня AC и CB соединены шарнирами между собой и с неподвижными опорами. На стержень AC действует сила $P = 40$ Н и пара сил с моментом $M = 120$ Н · м. Стержень BC нагружен линейно распределенной силой с максимальной интенсивностью $q_0 = 30$ Н/м.

Определить реакцию шарнира B, если $l = 1$ м.

Ответ: $X_B = -13{,}3$ Н, $Y_B = 30$ Н.



К задаче 1.15.



К задаче 1.16.

1.16. Стержни ADC и CB соединены шарнирами между собой и с неподвижными опорами. Стержни нагружены, как показано на рисунке.

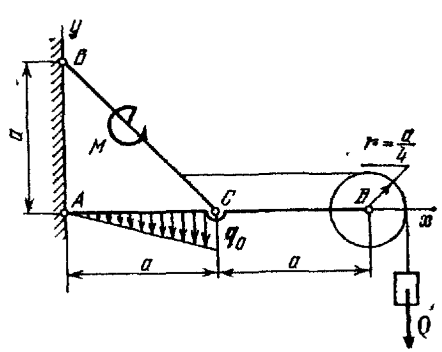
Определить реакции опор, если $P = 100$ Н, $M = 1600$ Н · м, $q = 25$ Н/м, $a = 2$ м.

Ответ: $X_B = -125$ Н, $Y_B = 50$ Н, $X_A = 225$ Н, $Y_A = 150$ Н.

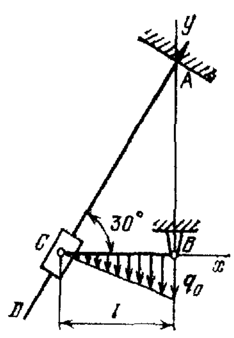
1.17. Груз веса Q подвешен на тросе, огибающем блок D и прикрепленном к стержню BC.

Определить реакцию шарнира B, если $M = 4Qa$, $q_0 = 3Q/a$.

Ответ: $X_B = 0{,}75Q$, $Y_B = 3Q$.



К задаче 1.17.



К задаче 1.18.

1.18. Заделанный одним концом в стену стержень AD соединен посредством скользящего шарнира C со стержнем CB, нагруженным линейно распределенной силой с максимальной интенсивностью q_0.

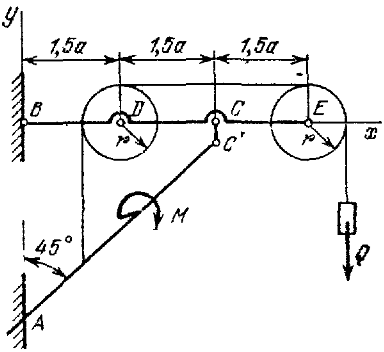
Определить опорные реакции, если $q_0 = 100$ Н/м, $l = 3$ м.

Ответ: $X_A = -28{,}8$ Н, $Y_A = 50$ Н, $M_A = -200$ Н м, $X_B = 28{,}8$ Н, $Y_B = 100$ Н.

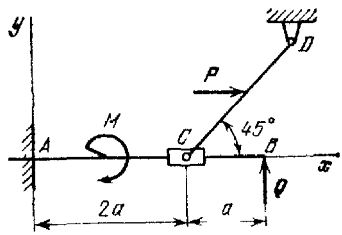
1.19. На стержне BE с помощью шарниров D и E укреплены два блока одинакового радиуса $r = a/2$. Груз веса Q подвешен на нити, огибающей оба блока и прикрепленной к стержню AC, заделанному в стену. На стержень AC действует пара сил с моментом $M = 6Qa$.

Определить реакцию в точке C и момент в заделке.

Ответ: $R_C = 2Q$, $M_A = 11Qa$.



К задаче 1.19.



К задаче 1.20.

1.20. Заделанный в стену горизонтальный стержень AB соединен со стержнем CD скользящим шарниром C. К середине стержня CD приложена горизонтальная сила $\mathbf{P}$; на стержень AB действует пара сил с моментом M и вертикальная сила $\mathbf{Q}$.

Определить реакцию в шарнире C и в заделке, если

$$P = 4 \text{ Н}, \quad M = 12 \text{ Н м}, \quad Q = 16 \text{ Н}, \quad a = 1 \text{ м}.$$

Ответ: $R_C = 2$ Н, $X_A = 0$, $Y_A = -14$ Н, $M_A = -32$ Н м.

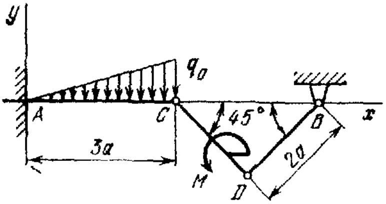
1.21. Для стержневой конструкции, изображенной на рисунке, определить величину реакции в шарнире B и момент в заделке, если дано $q_0 = 10$ Н/м, $M = 40$ Н м, $a = 1$ м.

Ответ: $R_B = 20$ Н, $M_A = 72$ Н · м.

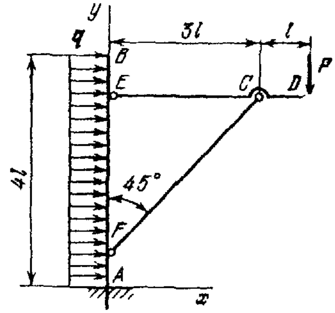
1.22. Стержни DE и FC соединены между собой и прикреплены к вертикальному заделанному в основание стержню AB шарнирами. Конструкция нагружена как показано на рисунке.

Определить величину реакции в шарнире C и момент в заделке, если $q = 0{,}5P/l$.

Ответ: $R_C = 1{,}88P$, $M_A = 8Pl$.



К задаче 1.21.

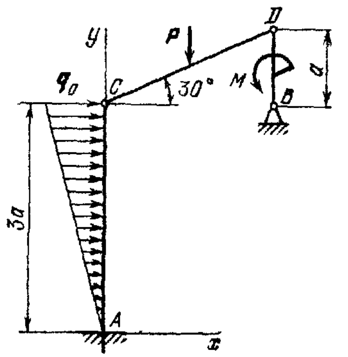


К задаче 1.22.

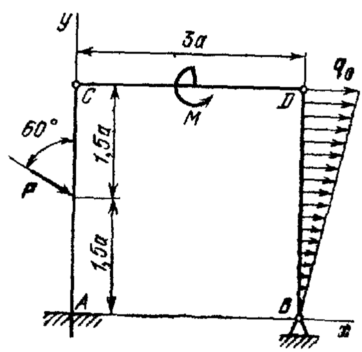
1.23. Система состоит из трех стержней, один из которых заделан в основание, а два другие соединены между собой и с неподвижным основанием шарнирами. К стержню AC приложена линейно распределенная сила с максимальной интенсивностью q_0. К середине стержня CD приложена параллельно оси y сила **P**, на стержень BD действует пара сил с моментом M.

Определить величину реакции в шарнире D и момент в заделке, если $q_0 = 50$ Н/м, $P = 200$ Н, $M = 400$ Н · м, $a = 1$ м.

Ответ: $R_D = 421$ Н, $M_A = -1050$ Н · м.



К задаче 1.23.



К задаче 1.24.

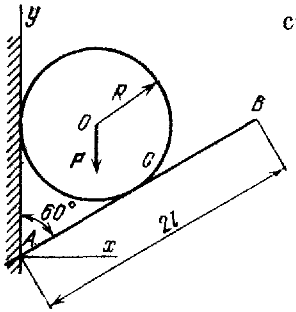
1.24. Для стержневой конструкции, изображенной на рисунке, определить реакцию в шарнире C и момент в заделке, если дано: **P**, $M = 6Pa$; $q_0 = 2P/a$.

Ответ: $R_C = 2\sqrt{2}P$; $M_A = 7{,}3Pa$.

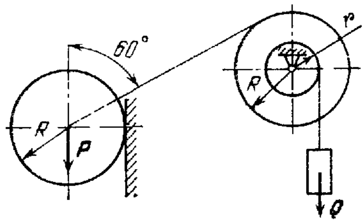
1.25. Шар веса **P** и радиуса R опирается на гладкую стенку и однородный гладкий стержень, заделанный в стену. Вес стержня $Q = 4P$, его длина $2l = 3R\sqrt{3}$.

Определить силу давления шара на стенку и момент в заделке.

Ответ: $N = P/\sqrt{3}$; $M_A = 11PR$.



К задаче 1.25.



К задаче 1.26.

1.26. На ступенчатый блок намотаны две нити. Одна из них прикреплена к шару веса **P**, другая — к грузу веса **Q**.

Пренебрегая трением, определить вес **Q**, при котором система будет находиться в равновесии, и силу давления шара на стенку. Радиус ступени блока $r = a/2$, радиусы шара и блока $R = a$.

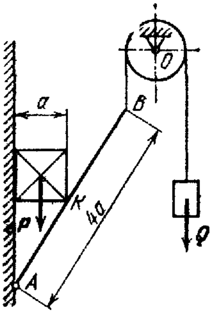
Ответ: $Q = 4P$; $N = 1{,}73P$.

1.27. Однородный куб веса **P** опирается одной из сторон на гладкую стену, а ребром — на гладкий стержень AB, прикрепленный к стене шарниром A. Другой конец стержня скреплен с нитью, переброшенной через блок O и несущей на конце груз веса **Q**.

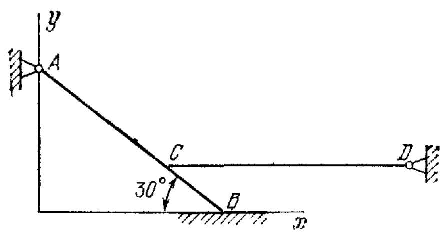
Определить вес **Q**, необходимый для равновесия, и силу давления куба на стенку, если $AK = KB$.

Ответ: $Q = 2P$; $N = 1{,}73P$.

1.28. Два однородных стержня веса P и длины $4l$ каждый прикреплены к неподвижным шарнирам A и D. Стержень CD



К задаче 1.27.



К задаче 1.28.

опирается на стержень AB, который в свою очередь опирается на горизонтальную плоскость.

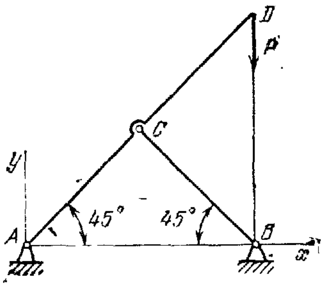
Определить реакцию в шарнире A и в точке соприкосновения стержней C, если $CB = l$.

Ответ: $R_C = 0{,}577P$; $X_A = 0{,}289P$; $Y_A = 0{,}5P$.

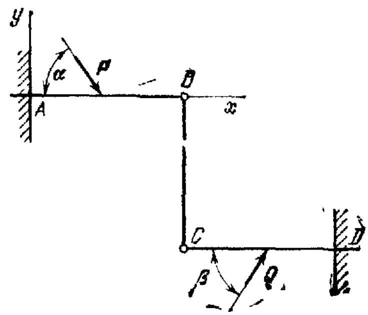
1.29. Стержни AD и CB соединены между собой и с неподвижным основанием шарнирами. К стержню AD приложена вертикальная сила **P**.

Определить реакции в точках A и C, если $AC = CD = CB$.

Ответ: $R_C = 1{,}41P$; $X_A = P$; $Y_A = 0$.



К задаче 1.29.



К задаче 1.30.

1.30. Стержневая система, показанная на рисунке, нагружена силами **P** и **Q**.

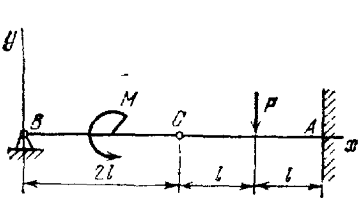
Является ли система статически определимой? Какие из неизвестных реакций могут быть определены?

Ответ: система статически неопределима; могут быть определены X_A и X_D.

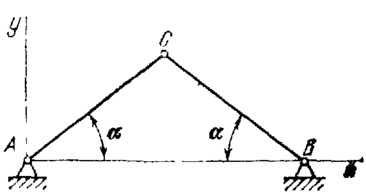
1.31. Стержневая система, изображенная на рисунке, нагружена силой **P** и парой сил с моментом $M = 6Pl$.

Является ли система статически определимой? Какие из неизвестных могут быть определены?

Ответ: система — статически неопределима; могут быть определены Y_A, Y_B и M_A.



К задаче 1.31.



К задаче 1.32.

1.32. Два однородных стержня одинакового веса P и одинаковой длины соединены между собой и с неподвижным основанием шарнирами так, что образуют с горизонталью углы α.

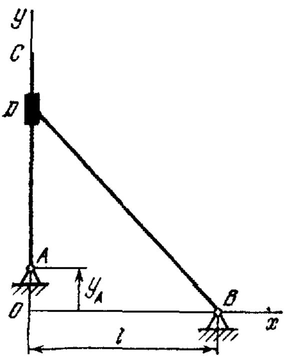
Определить реакции опор. Будет ли система статически определимой при $\alpha = 0$?

Ответ $Y_A = Y_B = P$, $X_A = X_B = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha$. При $\alpha = 0$ система статически неопределима.

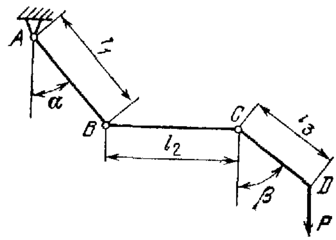
1.33. Однородный стержень веса P жестко соединен с ползуном D, который может скользить вдоль гладкого вертикального стержня AC. Положение точки A определяется координатами $x_A = 0$, y_A.

Пренебрегая весом стержня AC, определить реакции опор. При какой величине y_A равновесие невозможно?

Ответ: $X_A = -X_B = \frac{Pl}{2y_A}$, $Y_A = 0$, $Y_B = P$. Равновесие невозможно при $y_A = 0$.



К задаче 1.33



К задаче 1.34

1.34. Рычажная система манипулятора состоит из трех стержней, соединенных между собой шарнирами и расположенных в вертикальной плоскости. К точке D механизма подвешен груз веса $\mathbf{P}$.

Какие моменты приводных двигателей нужно приложить в шарнирах C, B и A, чтобы удержать механизм в равновесии в указанном на рисунке положении? Весом стержней пренебречь.

Ответ $M_C = Pl_3 \sin \beta$, $M_B = P(l_2 + l_3 \sin \beta)$, $M_A = P(l_1 \sin \alpha + l_2 + l_3 \sin \beta)$.

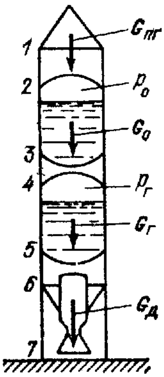
К задаче 1.35

1.35. Стропила крыши состоят из двух однородных стержней веса P каждый. Стержни соединены между собой шарниром и удерживаются под углом $\alpha = 45°$ к горизонтали стяжкой DE, прочность которой соответствует растягивающей силе $F = 4P$.

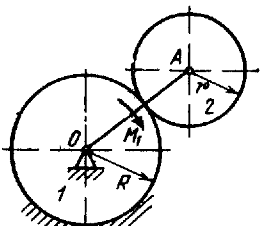
Определить интенсивность равномерной нагрузки q от снежного покрова, при которой стропила еще удерживаются стяжкой, если $DC = EC = 0{,}75l$. Весом стяжки пренебречь.

Ответ: $q < 5P/l$.

1.36. Определить осевые сжимающие силы в стенках корпуса ракеты, установленной на стартовом столе, от полезного груза, топлива в баках и двигательной установки с учетом давления наддува в баках. Дано: $p_о$, $G_о$ — давление наддува в баке и вес окислителя; $p_г$, $G_г$ — давление наддува в баке и вес горючего; $G_{пг}$ — вес полезного груза, $G_д$ — вес двигательной установки.



К задаче 1 36



К задаче 1 37.

Указание Величина давления наддува выбирается из условии нормальной работы топливных насосов и некоторой разгрузки баков от сжимающих сил Осевая растягивающая сила, создаваемая давлением $p_г$ газов наддува, не зависит от формы дна бака и равна $P = p_г \cdot \frac{\pi d^2}{4}$, где d — внутренний диаметр бака в виде кругового цилиндра При расчете принять

$$p_о \frac{\pi d^2}{4} = G_{пг}, \quad p_г \frac{\pi d^2}{4} = G_{пг} + \frac{1}{2} G_о.$$

Ответ сжимающие силы в любом поперечном сечении в пределах выделенных участков одинаковы и равны

$$N_{1-2} = G_{пг}, \quad N_{2-3} = 0, \quad N_{3-4} = G_{пг} + G_о, \quad N_{4-5} = 0{,}5G_о,$$
$$N_{5-6} = G_{пг} + G_о + G_г, \quad N_{6-7} = G_{пг} + G_о + G_г + G_д.$$

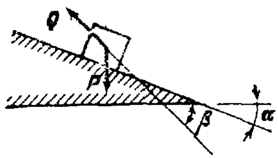
1.37. К водилу OA планетарного механизма, соединяющему шарнирно ось подвижной шестерни *2* с осью неподвижной шестерни *1*, приложена пара сил с моментом M_1.

Какой момент M_2 пары сил нужно приложить к шестерне *2*, чтобы уравновесить механизм? Механизм расположен в горизонтальной плоскости, радиусы неподвижной *1* и подвижной *2* шестерен равны R и r.

Ответ: $M_2 = \frac{M_1 r}{R + r}$.

§ 3. Равновесие с учетом трения

1.38. Груз веса **P** лежит на шероховатой наклонной плоскости. Угол наклона плоскости к горизонту равен α; коэффициент трения скольжения груза о плоскость f.



К задаче 1.38.

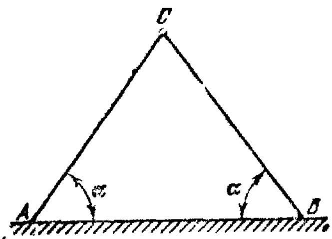
Под каким углом β к горизонту нужно приложить силу **Q**, чтобы сдвинуть груз вверх при минимальной силе **Q**?

Ответ: $\beta = \alpha + \operatorname{arctg} f$, $Q = P \sin \beta$.

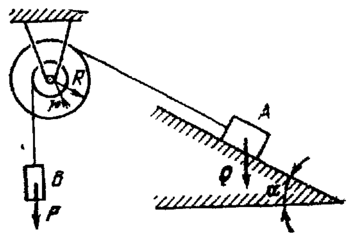
1.39. На шероховатой горизонтальной плоскости стоит лестница, состоящая из двух однородных частей одинакового веса и длины, соединенных шарниром C.

При каких значениях угла α возможно равновесие лестницы, если коэффициент трения между лестницей и плоскостью равен f?

Ответ: $\operatorname{tg} \alpha \geqslant \frac{1}{2f}$.



К задаче 1.39.



К задаче 1.40.

1.40. Груз A веса **Q** лежит на шероховатой, наклоненной к горизонту на угол α, плоскости и удерживается нитью, намотанной на ступень блока радиуса R.

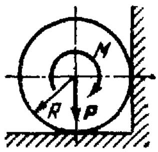
При каком весе P груза B система будет находиться в равновесии, если коэффициент трения скольжения груза о плоскость равен f, а радиус меньшей ступени блока $r = R/2$.

Ответ: $2Q(\sin \alpha - f \cos \alpha) < P < 2Q(\sin \alpha + f \cos \alpha)$.

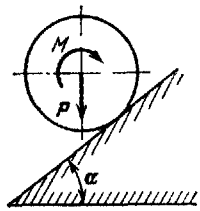
1.41. Цилиндр веса **P** и радиуса R лежит на шероховатой горизонтальной плоскости и соприкасается с шероховатой вертикальной стенкой.

При каком моменте пары сил, приложенных к диску, он будет находиться в равновесии, если коэффициенты трения скольжения диска по плоскости и стенке равны f?

Ответ: $M < \dfrac{PR(1+f)f}{1+f^2}$.



К задаче 1.41.



К задаче 1.42.

1.42. Цилиндр веса **P** и радиуса R лежит на шероховатой наклонной плоскости. Коэффициент трения скольжения цилиндра по плоскости равен f.

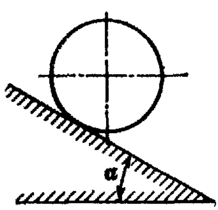
При каком моменте M пары сил, приложенных к цилиндру и каком угле наклона α плоскости к горизонту возможно равновесие цилиндра? Трением качения пренебречь.

Примечание. Образующая цилиндра перпендикулярна линии наибольшего ската наклонной плоскости.

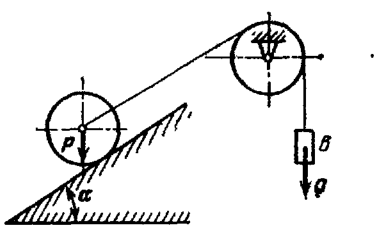
Ответ: $M = PR\sin\alpha$, $\alpha \leqslant \operatorname{arctg} f$.

1.43. При каком угле наклона шероховатой плоскости к горизонту тяжелый цилиндр не покатится, если коэффициент трения качения равен δ, а радиус цилиндра R. (См. примечание к задаче 1.42.)

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \delta/R$.



К задаче 1.43.



К задаче 1.44.

1.44. Цилиндр веса $P = 10$ Н и радиуса $R = 0{,}1$ м находится на шероховатой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. К оси цилиндра привязана нить, перекинутая через блок и несущая на другом конце груз *B*.

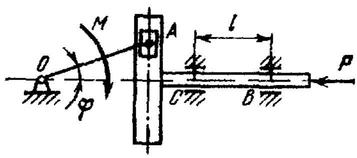
При каком весе Q груза *B* цилиндр не покатится, если коэффициент трения качения равен $\delta = 0{,}01$ м? (См. примечание к задаче 1.42.)

Ответ: $4{,}1\ \text{Н} \leqslant Q \leqslant 5{,}9\ \text{Н}$.

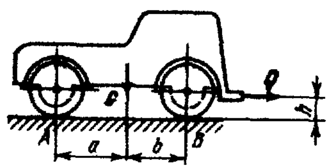
1.45. Кривошип *OA* длины l соединен шарниром с камнем, помещенным в прорезь кулисы. Шток кулисы может двигаться в горизонтальных направляющих, расстояние между которыми равно l. К штоку приложена сила **P**. Коэффициент трения скольжения штока по направляющим равен f.

Пренебрегая трением в прорези кулисы, определить, при каком моменте M пары сил, приложенных к кривошипу, механизм будет находиться в равновесии? Весом механизма пренебречь.

Ответ: $\dfrac{Pl\sin\varphi}{1+2f\sin\varphi} \leqslant M \leqslant \dfrac{Pl\sin\varphi}{1-2f\sin\varphi}$.



К задаче 1.45.



К задаче 1.46.

1.46. Колесный трактор веса **G** соединен с прицепом водилом, расположенным на расстоянии h от площадки контакта колес с дорогой (грунтом). Сила сопротивления движению прицепа равна **Q**. Радиусы передних и задних (ведущих) колес принять одинаковыми, равными R, коэффициент трения качения колес δ, коэффициент трения скольжения между колесом и дорогой f.

Полагая, что ведущие колеса трактора не проскальзывают, найти: 1) при каком моменте M на ведущей оси трактор стронется с места? 2) вертикальные силы N_A и N_B давления на колеса в этот момент; 3) силу тяги трактора Q_1 из условия, что она не опрокидывает его, 4) силу тяги Q_2, при которой отсутствует проскальзывание ведущих колес.

Указание. Моменты трения качения передних и задних колес принять равными их максимальным значениям, т. е. δN_A и δN_B.

Ответ: 1) $M = QR + \delta G$;

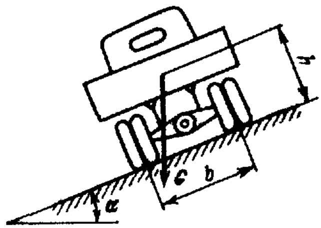
2) $N_A = \dfrac{G(b-\delta) - Qh}{a+b}$, $N_B = \dfrac{G(a+\delta) + Qh}{a+b}$;

3) $Q_1 \leqslant \dfrac{G(b-\delta)}{h}$; 4) $Q_2 \leqslant \dfrac{G[fR(a+\delta) - \delta(b-\delta)]}{R(a+b) - h(fR+\delta)}$.

1.47. Автомобиль веса **G** стоит на наклонном участке дороги. Высота центра тяжести грузовика над полотном дороги равна h, расстояние между центрами колес b; коэффициент трения скольжения колес о дорогу равен f.

При каком угле наклона дороги α к плоскости горизонта может произойти опрокидывание грузовика и когда может начаться боковое скольжение?

Ответ: опрокидывание — при $f > \operatorname{tg}\alpha > \frac{b}{2h}$; боковое скольжение — при $\frac{b}{2h} > \operatorname{tg}\alpha > f$.



К задаче 1.47

1.48. Какого веса состав ($G_{сост}$) может стронуть с места электровоз на горизонтальном участке пути, если вес электровоза $G_э$, все его колеса — ведущие, радиусы колес электровоза и вагонов одинаковы и равны R, коэффициент трения скольжения колес о рельсы $f = 0,3$, коэффициент трения качения колеса по рельсу $\delta = 0,004R$, трением качения в осях колес пренебречь.

Ответ: $G_{сост} \leqslant \frac{fR}{\delta} G_э = 75G_э$.

Глава 2

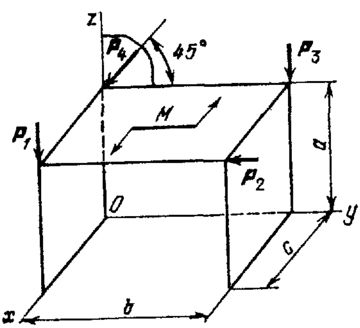
ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 1. Приведение системы сил к центру

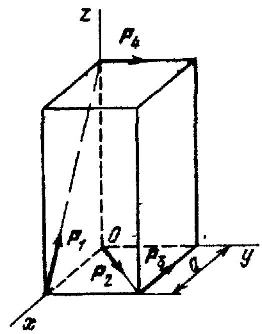
2.1. При установке панельной коробки к ней приложили четыре силы с одинаковым модулем $P = 10$ Н и пару сил с моментом $M = 10$ Н · м.

Определить главный вектор **R** и главный момент $\mathbf{L}_0$ данной системы сил относительно начала координат, если $b = 2c = 2a = 1$ м.

Ответ: $R_X = 0$, $R_Y = -17$ Н, $R_Z = -27$ Н, $R = 32$ Н; $L_X = -1,5$ Н · м, $L_Y = 5$ Н · м, $L_Z = 5$ Н · м, $L_0 = 7,25$ Н · м.



К задаче 2.1

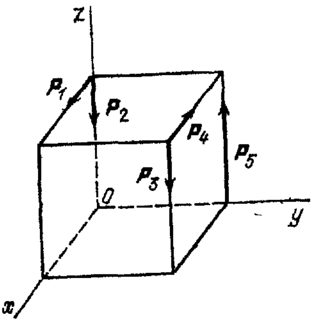


К задаче 2.2

2.2. К вершинам прямоугольного параллелепипеда, основание которого квадрат со стороной $a = 0{,}5$ м, а высота 1,5 м, приложено четыре силы, модуль каждой из которых равен $P = 20$ Н.

Определить главный вектор $\mathbf{R}$ и главный момент $\mathbf{L}_0$ этой системы сил относительно начала координат.

Ответ: $R_X = -12{,}2$ Н, $R_Y = 34$ Н, $R_Z = 18{,}8$ Н, $R = 40{,}8$ Н; $L_X = -30$ Н · м, $L_Y = -9{,}4$ Н · м, $L_Z = 10$ Н · м, $L_0 = 33$ Н · м.



К задаче 2.3.

2.3. К вершинам куба со стороной a приложены силы, как показано на рисунке. Модули сил $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ одинаковы и равны P, модуль силы $\mathbf{P}_5$ равен $2P$. Определить главный вектор и главный момент заданной системы сил относительно начала координат и указать, к какому простейшему виду эта система сил приводится.

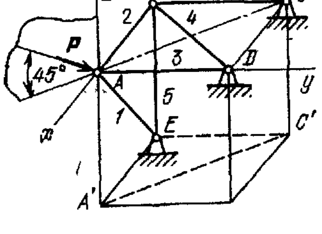
Ответ: $R_X = 0$, $R_Y = 0$, $R_Z = 0$; $L_X = Pa$, $L_Y = Pa$; $L_Z = Pa$.

Система приведена к паре сил, момент которой $L = \sqrt{3}Pa$. Вектор момента направлен по диагонали куба от точки O к противоположной вершине.

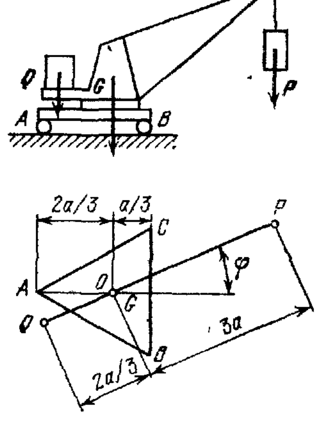
§ 2. Равновесие произвольной системы сил

2.4. Конструкция, состоящая из шести стержней, соединенных между собой шарнирами, нагружена в узле B вертикальной силой $Q = 10$ Н, а в узле A силой $P = 20$ Н, расположенной в плоскости $ACA'C'$ и направленной под углом 45° к диагонали AC.

Определить силы, действующие в стержнях, и составляющие реакций в шарнирах D и E.



К задаче 2.4.



К задаче 2.5.

Ответ: $S_1 = -20$ Н, $S_2 = 4{,}1$ Н, $S_3 = -10$ Н, $S_4 = -5{,}8$ Н, $S_5 = -10$ Н, $S_6 = 4{,}1$ Н (знак минус означает, что стержень сжат); $X_B = 14{,}1$ Н, $Y_E = 0$; $Z_E = 24{,}1$ Н, $X_D = -4{,}1$ Н, $Y_D = -10$ Н, $Z_D = 0$.

2.5. Кран с поворотной стрелой установлен на трехколесной тележке. Вес крана без противовеса G; центр тяжести крана находится на вертикали, проведенной из центра O равностороннего треугольника ABC, в вершинах которого располагаются колеса. Поворот стрелы осуществляется вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O.

Рассчитать вес противовеса Q и грузоподъемность P крана из *условия его неопрокидывания*, если вылет стрелы равен $3a$; вылет противовеса $2a/3$. Какой максимальный груз P_{max} может поднять кран из условия неопрокидывания при том же противовесе.

Ответ: $Q < G$, $P < G/2$, $P_{max} = 5G/7$.

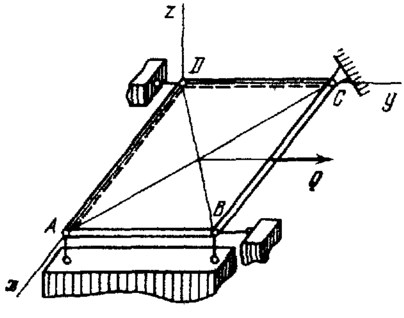
2.6. Полагая в предыдущей задаче $Q = G$, $P = 0{,}5G$ найти давления колес на рельсы в зависимости от угла поворота стрелы крана.

Ответ:
$$N_A = \frac{5}{6} G (1 - \cos\varphi),$$
$$N_B = \frac{G (10 + 5\cos\varphi - 5\sqrt{3}\sin\varphi)}{12},$$
$$N_C = \frac{G (10 + 5\cos\varphi + 5\sqrt{3}\sin\varphi)}{12}.$$

2.7. Однородная плита $ABCD$ веса P и нагруженная силой Q удерживается в горизонтальном положении с помощью сферического шарнира C и четырех шарнирных стержней.

Доказать, что система статически неопределима. Какие из реакций опор могут быть определены?

Ответ: Y_D и Y_C не определяются; X_C, Z_C, Z_A, Z_B, Y_B можно определить.

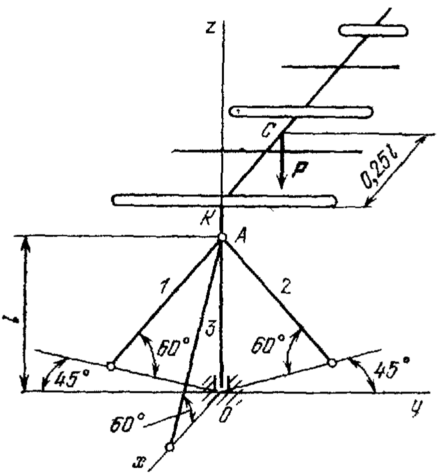


К задаче 2.7.

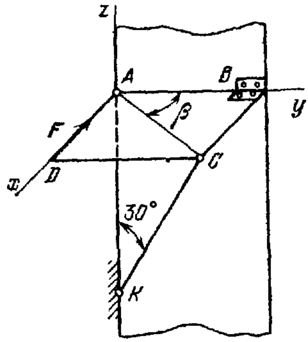
2.8. Горизонтальная телевизионная антенна веса **P** прикреплена к вертикальной стойке, установленной в гнездо O и удерживаемой тремя растяжками, нижние концы которых закреплены в плоскости xy. Расстояние CK от центра тяжести антенны до оси стойки равно $0{,}25l$, расстояние от точки крепления растяжек A до гнезда O равно l. Точка C лежит в плоскости xz.

Найти силу натяжения растяжки *3*, необходимую для равновесия, и реакцию гнезда O, если силы натяжения растяжек *1* и *2* равны $T_1 = T_2 = P\sqrt{2}/4$.

Ответ: $T_3 = P$, $X_O = -P/4$, $Y_O = 0$, $Z_O = 2{,}48P$.



К задаче 2.8.



К задаче 2.9.

2.9. К однородной прямоугольной плите веса $Q = 15$ Н, удерживаемой в горизонтальном положении сферическим шарниром A, петлей (цилиндрическим шарниром) B и стержнем KC, приложена горизонтальная сила $F = 30$ Н.

Определить сжимающую силу S в стержне KC и реакции опор, если $\beta = 30°$.

Ответ: $S = 8{,}7$ Н, $X_A = 27{,}75$ Н, $Y_A = -3{,}75$ Н, $Z_A = 7{,}5$ Н, $X_B = 0$, $Z_B = 0$.

2.10. Однородная прямоугольная плита веса $Q = 10$ Н, прикреплена к стене с помощью шарового шарнира B, петли (цилиндрического шарнира) C и удерживается в горизонтальном положении нитью EF, прикрепленной одним концом к плите, другим — к стене. На плиту действуют сила $P = 5$ Н и пара сил с моментом $M = 20$ Н · м.

Определить натяжение нити T и реакции опор, если $DE = EC = 0{,}5$ м, $BC = 2$ м, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

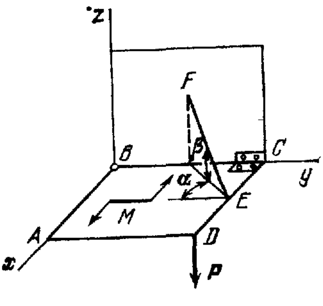
Ответ: $T = 40$ Н, $X_B = -5{,}68$ Н, $Y_B = 17{,}3$ Н, $Z_B = 7{,}5$ Н, $X_C = 35{,}68$ Н, $Z_C = -10$ Н.

2.11. Откидная лестница веса $P = 300$ Н прикреплена к кузову грузовика цилиндрическими шарнирами A и B и стержнем EF. Лестница составляет с вертикальной плоскостью угол $\alpha = 60°$.

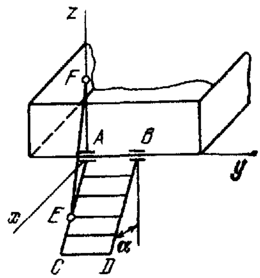
а) Определить реакцию стержня EF и шарниров A и B, если $EC = EA = AB = AF$. Центр тяжести лестницы находится в точке пересечения диагоналей.

б) Определить реакции, если на середине нижней ступеньки лестницы стоит человек, вес которого $G = 600$ Н.

Ответ: а) $S = 519$ Н, $X_A = 259{,}5$ Н, $Z_A = -300$ Н, $X_B = 0$, $Z_B = 150$ Н;



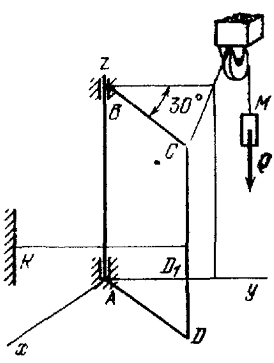
К задаче 2.10.



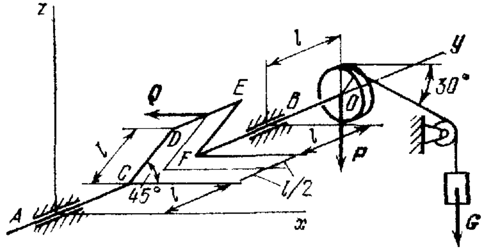
К задаче 2.11.

б) $S = 2595$ Н, $X_A = 1297$ Н, $Z_A = -1800$ Н, $X_B = 0$, $Z_B = 450$ Н.

2.12. Однородная прямоугольная дверь веса $P = 300$ Н укреплена с помощью подпятника A и петли B. Дверь удерживается в приоткрытом положении двумя веревками, одна из которых CM натягивается грузом, вес которого $Q = 100$ Н, а другая прикреплена в точке K к стене и расположена параллельно координатной оси Oy.



К задаче 2.12



К задаче 2.13.

Определить силу натяжения веревки KD_1 и реакции опор, если $BC = AB/3 = 1$ м, $DD_1 = D_1C$.

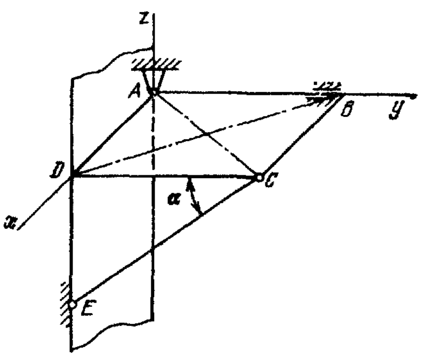
Ответ: $T = 109{,}8$ Н, $X_A = 93{,}6$ Н, $Y_A = 25{,}2$ Н, $Z_A = 300$ Н, $X_B = -52{,}5$ Н, $Y_B = 24{,}3$ Н.

2.13. Коленчатый вал с жестко насаженным на него шкивом радиуса $R = l/2$ и веса $P = 100$ Н укреплен в подшипниках A и B. К шейке DE вала приложена сила $Q = 50$ Н, как показано на рисунке. Плоскость колена $CDEF$ составляет с плоскостью горизонта угол 45°.

Определить реакции подшипников и вес G груза, необходимый для равновесия вала.

Ответ: $X_A = 45{,}44$ Н, $Z_A = -42{,}5$ Н, $X_B = -56{,}6$ Н, $Z_B = 180{,}5$ Н, $G = 70{,}5$ Н.

2.14. Квадратная однородная полка веса $Q = 80$ Н, прикреплена к стене с помощью шарового шарнира A и цилиндрического шарнира B и удерживается в горизонтальном положении однородным стержнем веса $P = 20$ Н, соединенным с полкой и стеной сферическими шарнирами C и E.



К задаче 2.14.

Определить реакции шарниров A, B и E, если $\alpha = 60°$.

Ответ: $X_B = -X_A = 28{,}8$ Н, $Y_A = -28{,}8$ Н, $Z_A = 40$ Н, $X_E = Z_B = 0$, $Y_F = 28{,}8$ Н, $Z_E = 60$ Н

2.15. Конструкция автомобиля позволяет крутящий момент от двигателя подводить или к передней, или к задней оси. В каком случае при прочих равных условиях автомобиль может преодолеть более крутой подъем без проскальзывания ведущих колес и почему?

Ответ: когда ведущая ось задняя.

§ 3. Равновесие пространственных стержней

2.16. Стержень, заделанный нижним концом в пол, нагружен, как показано на рисунке.

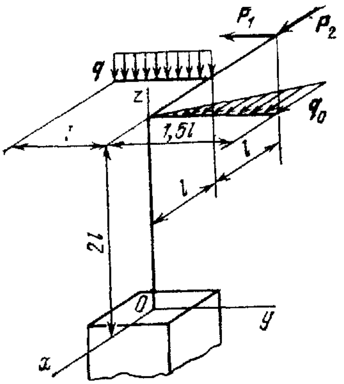
Определить реакцию заделки, если $P_2 = P_1 = P$, $q = 2P/l$; $q_0 = 6P/l$.

Ответ: $X_O = -5{,}5P$, $Y_O = P$, $Z_O = 2P$; $L_X = -3Pl$, $L_Y = -9Pl$, $L_Z = 2{,}5Pl$.

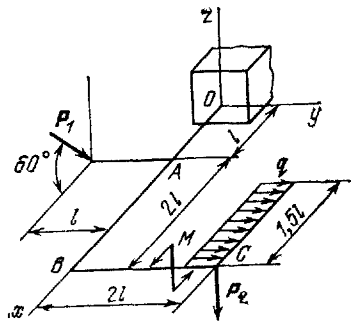
2.17. Заделанный в стену стержень нагружен равномерно распределенной силой интенсивности $q = 60$ Н/м, парой сил с моментом $M = 20$ Н · м, силой $P_1 = 20$ Н, расположенной в вертикальной плоскости под углом 60° к плоскости горизонта, и вертикальной силой $P_2 = 10$ Н, приложенной в точке C.

Определить реакцию заделки.

Ответ: $X_O = 10$ Н, $Y_O = -45$ Н, $Z_O = 27{,}3$ Н; $L_X = 1{,}35$ Н · м, $L_Y = -43{,}65$ Н · м, $L_Z = -45{,}625$ Н · м.



К задаче 2.16.

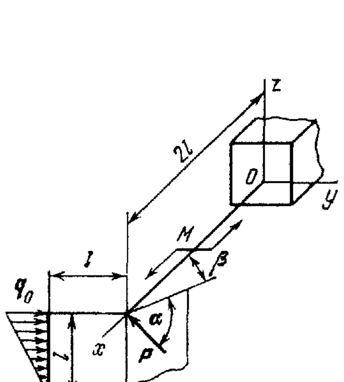


К задаче 2.17.

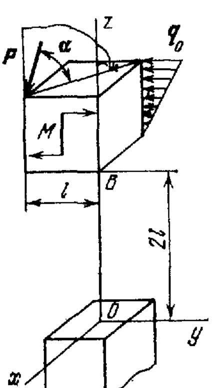
2.18. Стержень, заделанный в стену, нагружен силой $P = 100$ Н, действующей в вертикальной плоскости, которая наклонена к плоскости xz на угол β, парой сил с моментом $M = 200$ Н · м и силой, распределенной по линейному закону с максимальной интенсивностью $q_0 = 600$ Н/м, как показано на рисунке.

Определить реакцию заделки, если $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $l = 1$ м.

Ответ: $X_O = 43$ Н, $Y_O = -275$ Н, $Z_O = -86{,}5$ Н; $L_X = -100$ Н · м, $L_Y = 173$ Н · м, $L_Z = -750$ Н · м.



К задаче 2.18.



К задаче 2.19.

2.19. К стержню OB, заделанному в неподвижную опору, приварено тело в форме куба, на которое действует сила $P = 20$ Н, пара сил с моментом $M = 30$ Н · м и распределенная по линейному закону сила с максимальной интенсивностью $q_0 = 160$ Н/м.

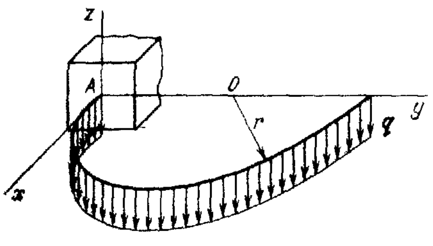
Определить реакцию заделки, если $\alpha = 60°$, $l = 0{,}5$ м.

Ответ: $X_O = 7$ Н, $Y_O = 47$ Н, $Z_O = 17{,}3$ Н, $L_X = -42{,}6$ Н · м, $L_Y = -10{,}6$ Н · м, $L_Z = -23{,}5$ Н · м.

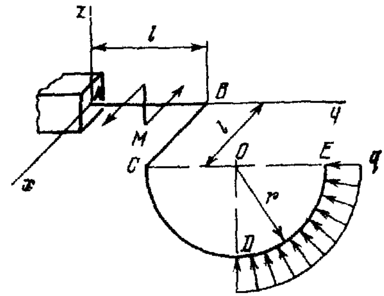
2.20. Стержень, имеющий форму дуги полуокружности, расположен в горизонтальной плоскости и нагружен равномерно распределенной силой интенсивности **q**. Левый конец стержня заделан в стену, правый конец свободен.

Определить реакцию заделки, если радиус окружности равен r.

Ответ: $X_A = Y_A = 0$, $Z_A = q\pi r$; $L_X = q\pi r^2$, $L_Y = 2qr^2$, $L_Z = 0$.



К задаче 2 20.

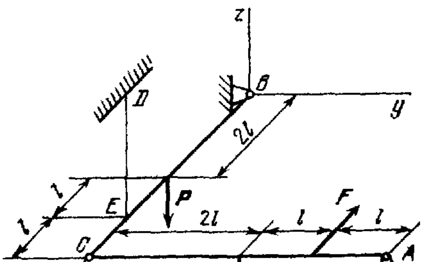


К задаче 2 21.

2.21. Стержень концом A заделан в стену. Участок ABC расположен в горизонтальной плоскости и нагружен парой сил с моментом $M = 4qr^2$, участок CDE, имеющий форму дуги окружности радиуса r, нагружен равномерно распределенными радиальными силами интенсивности **q** Угол ABC равен 90°

Определить реакцию заделки, если $l = r$

Ответ: $X_A = 0$, $Y_A = qr$, $Z_A = -qr$; $L_X = -2qr^2$, $L_Y = -3qr^2$, $L_Z = qr^2$.



К задаче 2 22

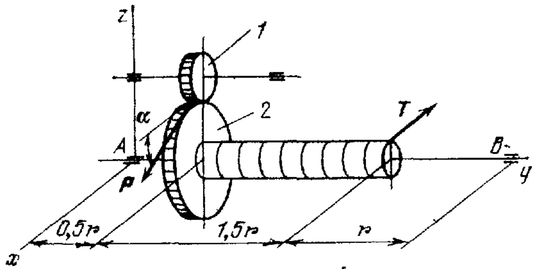
2.22. Два однородных стержня одинаковой длины $4l = 2$ м и одинакового веса $P = 120$ Н соединены между собой и с опорами сферическими шарнирами. В горизонтальном положении стержни удерживаются тросом DE. К стержню AC приложена сила $F = 240$ Н, которая параллельна оси x

Определить реакции шарниров A и B и силу натяжения T троса.

Ответ: $T = 160$ Н, $X_A = 180$ Н, $Y_A = 0$, $Z_A = 60$ Н; $X_B = 60$ Н, $Y_B = 0$, $Z_B = 20$ Н.

§ 4. Равновесие механизмов с зубчатыми парами

2.23. Зубчатое колесо *2* радиуса R, закрепленное на валу лебедки, находится в зацеплении с колесом *1*. Сила натяжения каната лебедки $T = 100$ Н направлена параллельно оси x. Сила давления $\mathbf{P}$ зуба колеса *1* на зуб колеса *2* направлена по линии,



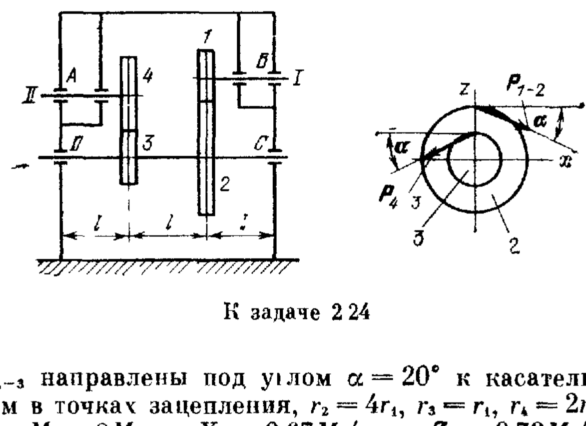
К задаче 2.23.

образующей угол $\alpha = 20°$ с касательной к окружности колеса в точке зацепления.

Определить силу P и реакции подшипников A и B, если радиус барабана лебедки $r = R/2$, $AB = 3r$. Весом лебедки пренебречь

Ответ. $P = 53{,}2$ Н, $X_A = -8{,}33$ Н, $Z_A = 15{,}17$ Н, $X_B = 41{,}67$ Н, $Z_B = 3{,}03$ Н

2.24. К валу *I* зубчатого редуктора приложена пара сил с моментом M_1. Определить момент M_2 пары сил, приложенных к валу *II*, и реакции подшипников промежуточного вала CD в условиях равновесия. Считать, что силы давления зубчатых колес



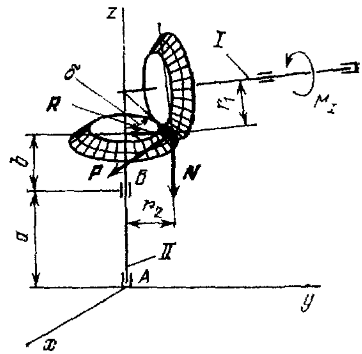
К задаче 2.24

P_{1-2} и P_{4-3} направлены под углом $\alpha = 20°$ к касательным к окружностям в точках зацепления, $r_2 = 4r_1$, $r_3 = r_1$, $r_4 = 2r_1$.

Ответ: $M_2 = 8M_1$; $X_C = 0{,}67M_1/r_1$, $Z_C = 0{,}73M_1/r_1$, $X_D = -2{,}33M_1/r_1$, $Z_D = 1{,}09M_1/r_1$.

2.25. К ведущему валу *I* конической передачи приложена пара сил с моментом M_1.

Определить момент пары сил M_2, который надо приложить к ведомому валу *II*, чтобы валы находились в равновесии, а так-



К задаче 2.25.

же реакции опор ведомого вала. Радиусы шестерен равны соответственно r_1 и r_2.

Указание. Сила давления на зуб в прямозубой конической передаче имеет три составляющие: окружную P, радиальную $R = P\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\delta$ и осевую $N = P\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\delta$, где $\mathrm{tg}\,\delta = r_2/r_1$, $\alpha = 20°$.

Ответ:

$$M_2 = \frac{M_1 r_2}{r_1}; \quad X_A = -\frac{M_1 b}{r_1 a}, \quad Y_A = \frac{M_1\,\mathrm{tg}\,\alpha}{r_1 a}\,[r_2\sin\delta - b\cos\delta],$$

$$Z_A = \frac{M_1}{r_1}\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\delta; \quad X_B = -\frac{M_1(a+b)}{r_1 a},$$

$$Y_B = \frac{M_1\,\mathrm{tg}\,\alpha}{r_1 a}[(a+b)\cos\delta - r_2\sin\delta].$$

Раздел второй

КИНЕМАТИКА

Глава 3

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 1. Естественный способ задания движения точки

3.1. Точка M движется прямолинейно по закону $s(t) = Ae^{-nt}\left(\cos\omega t + \frac{n}{\omega}\sin\omega t\right)$, где A, n и ω — некоторые положительные числа.

Найти путь, пройденный точкой за время от $t = 0$ до $t = 3\pi/(2\omega)$. За начало отсчета расстояний принять произвольную точку на траектории точки M.

Ответ: $L = A\left(1 + 2e^{-\frac{n\pi}{\omega}} - \frac{n}{\omega}e^{-\frac{3n\pi}{2\omega}}\right)$.

3.2. Конькобежец, двигаясь равномерно по беговой дорожке стадиона, проходит путь $L = 1000$ м за 1 мин 15 с.

Полагая, что траектория, по которой движется конькобежец,— плоская кривая, состоящая из двух прямолинейных участков и двух криволинейных, имеющих вид полуокружностей радиуса $R = 30$ м, определить наибольшую и наименьшую величины ускорения конькобежца.

Ответ: $a_{max} = 5{,}93$ м/с^2; $a_{min} = 0$.

3.3. Материальная точка движется на плоскости с постоянной по величине скоростью v_0 по траектории, уравнение которой $y = bx^2$, где $b = \text{const} > 0$.

Определить величину максимального ускорения точки, изобразить ее траекторию и вектор максимального ускорения.

Ответ: $a_{max} = 2bv_0^2$.

3.4. Материальная точка движется на плоскости с постоянной по величине скоростью v_0 по траектории, уравнение которой $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ $(b > c, b = \text{const} > 0$ и $c = \text{const} > 0)$.

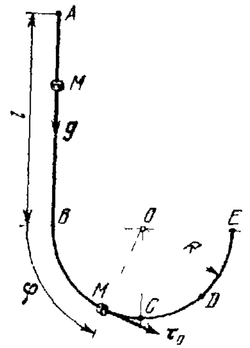
Найти величины и направления векторов наименьшего и наибольшего ускорений точки, указать местоположения точки на траектории, которым соответствуют эти ускорения.

Ответ: $a_{\min} = v_0^2 \frac{c}{b^2}$, $a_{\max} = v_0^2 \frac{b}{c^2}$. Ускорение точки будет наименьшим там, где ее координата $x = 0$, а наибольшим — где $y = 0$.

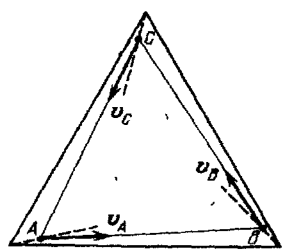
3.5. Кольцо M скользит из состояния покоя по стержню $ABCE$, расположенному в вертикальной плоскости. На прямолинейном участке стержня $AB = l$ кольцо движется с постоянным ускорением $\mathbf{g}$. При движении по криволинейному участку стержня BCE (дуге окружности радиуса R) касательная составляющая ускорения кольца равна $(g\cos\varphi)\boldsymbol{\tau}_0$, где $\boldsymbol{\tau}_0$ — единичный вектор касательной к траектории BCE.

Определить скорость кольца в положениях C и $D(\breve{CD} = \breve{DE})$.

Ответ: $v_C = \sqrt{2g(l+R)}$, $v_C = \sqrt{2g\left(l + \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)}$.



К задаче 3.5.



К задаче 3.6.

3.6. Три точки начинают одновременно двигаться из вершин равностороннего треугольника, длина стороны которого равна a. Точки движутся так, что скорость $\mathbf{v}_A$ точки A во все время движения направлена на точку B, $\mathbf{v}_B$ — на точку C и $\mathbf{v}_C$ — на точку A.

Найти время движения точек до встречи, если модули их скоростей одинаковы и равны u каждый.

Ответ: $t = 2a/(3u)$.

§ 2. Координатные способы задания движения точки

3.7. Движение точки на плоскости задано уравнениями $x = a\cos^2\omega t$, $y = b\sin^2\omega t$, где $a = \text{const} > 0$, $b = \text{const} > 0$, $\omega = \text{const} > 0$.

Найти уравнение траектории точки, радиус кривизны траектории, а также дуговую координату s и величины скорости v и ускорения a точки как функции времени. Изобразить графически траекторию точки и построить графики $s = s(t)$, $v = v(t)$, $a = a(t)$.

Ответ: уравнение траектории точки

$$y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

где $0 \leqslant x \leqslant a$, $\rho = \infty$, $s(t) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}(1 - \cos 2\omega t)$, $v(t) = \omega\sqrt{a^2 + b^2}\sin 2\omega t$, $a(t) = 2\omega^2\sqrt{a^2 + b^2}\cos 2\omega t$.

3.8. Движение точки на плоскости в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant \pi/(2\omega)$ задано уравнениями: $x = b\sec\omega t$, $y = b\operatorname{tg}\omega t$, где $b = \mathrm{const} > 0$, $\omega = \mathrm{const} > 0$.

Найти: 1) траекторию точки; 2) проекции скорости и ускорения точки на естественные и полярные оси координат в момент времени $t = 0$.

За полюс полярной системы координат принять начало декартовой системы координат, за полярную ось — горизонтальную прямую, совпадающую с осью x. Траекторию точки, а также векторы ее скорости и ускорения при $t = 0$ изобразить графически.

Ответ: 1) траектория точки — ветвь гиперболы $x^2 - y^2 = b^2$; 2) $v_\tau(0) = b\omega$, $a_\tau(0) = 0$, $a_n(0) = b\omega^2$, $v_r(0) = 0$, $v_p(0) = b\omega$, $a_r(0) = b\omega^2$, $a_p(0) = 0$.

3.9. Движение точки на плоскости задано в декартовой системе координат Oxy уравнениями $x = at\cos\omega t$, $y = at\sin\omega t$, где $a = \mathrm{const} > 0$, $\omega = \mathrm{const} > 0$.

Найти: 1) радиус кривизны траектории точки в начальный момент времени ($t = 0$) и предельную (при $t \to \infty$) величину этого радиуса; 2) траекторию точки в полярных координатах; 3) проекции скорости и ускорения точки на орты полярной системы координат. За полюс принять начало декартовой системы координат, за полярную ось — ось x.

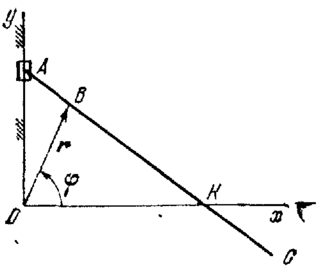
Ответ: 1) $\rho(0) = \frac{a}{2\omega}$, $\rho_{\text{пр}} = \infty$; 2) $r = \frac{a}{\omega}\varphi$ — спираль Архимеда; 3) $v_r = a$, $v_p = a\omega t$, $a_r = -a\omega^2 t$, $a_p = 2a\omega$.

3.10. Движение точки на плоскости задано в полярных координатах уравнениями $r = ae^{\omega t}$, $\varphi = \omega t$, где $a = \mathrm{const} > 0$, $\omega = \mathrm{const} > 0$.

Найти траекторию точки и проекции скорости и ускорения точки на оси полярной и естественной систем координат.

Ответ: $r = ae^{\varphi}$ — логарифмическая спираль; $v_r = v_p = a\omega e^{\omega t}$, $a_r = 0$, $a_p = 2a\omega^2 e^{\omega t}$, $v_\tau = \sqrt{2}\,a\omega e^{\omega t}$, $a_\tau = a_n = \sqrt{2}\,a\omega^2 e^{\omega t}$.

3.11. Стержень AC в точке A шарнирно прикреплен к ползуну, который перемещается вдоль вертикальной направляющей. Движение точки B стержня в полярных координатах описывается уравнениями



К задаче 3.11.

$$OB = r = \frac{1}{4} l \sqrt{\cos^2 \omega t + 9 \sin^2 \omega t},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg} \omega t),$$

где $\omega = \text{const} > 0$, $l = \text{const} > 0$.

Найти для точки B в декартовой системе координат Oxy траекторию, годографы скорости и ускорения.

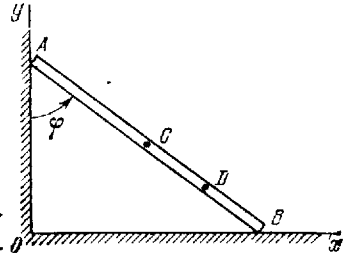
Ответ: $\frac{4x^2}{l^2} + \frac{4y^2}{9l^2} = 1$, $\frac{4\dot{x}^2}{l^2\omega^2} + \frac{4\dot{y}^2}{9l^2\omega^2} = 1$, $\frac{4\ddot{x}^2}{l^2\omega^4} + \frac{4\ddot{y}^2}{9l^2\omega^4} = 1$.

3.12. В условиях предыдущей задачи найти траекторию точки K стержня AC в декартовых координатах и, перейдя к естественному способу задания движения точки, ее дуговую координату s как функцию времени, если $AK = l$ $(AB = l/4)$. Построить годограф скорости точки K.

Ответ: траектория точки K — отрезок прямой $y = 0$; $s(t) = l(1 - \cos \omega t)$, где координата s отсчитывается влево от точки, декартовы координаты которой $x = l$, $y = 0$; годограф $\mathbf{v}_K$ — отрезок прямой $[-l\omega, l\omega]$.

3.13. Стержень AB длины l падает, находясь во все время движения в вертикальной плоскости. Концы A и B стержня при этом скользят по вертикальной стене и горизонтальному полу соответственно.

Найти траектории точек C и D стержня $(AC = l/2,\quad AD = 3l/4)$, а также радиус кривизны траектории точки D в момент соприкосновения стержня с полом.

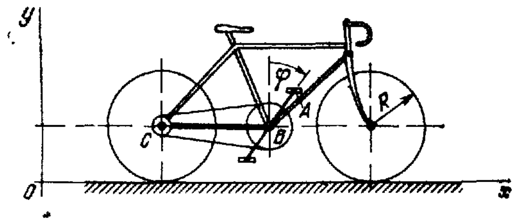


К задаче 3.13.

Ответ: траектория точки C — окружность $x_C^2 + y_C^2 = l^2/4$, траектория точки D — эллипс $x_D^2 + 9y_D^2 = \frac{9}{16} l^2$, $\rho|_{\varphi=\pi/2} = \frac{1}{12} l$.

3.14. Велосипедист движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$, по горизонтальному участку дороги. Радиус колес велосипеда R, отношение чисел зубцов ведущей и ведомой звездочек цепной передачи равно z, длина кривошипа AB педали h. Колеса велосипеда катятся по дороге без скольжения.

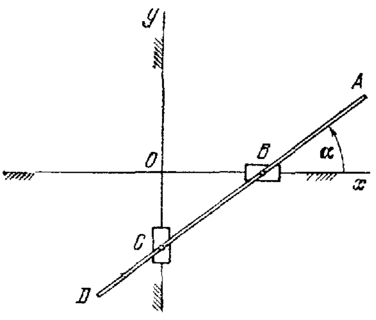
Найти нормальное и касательное ускорения, а также радиус кривизны траектории точки A при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = \pi$. В начальный момент времени ($t=0$) точка C оси заднего колеса находилась на оси Oy, а точка A кривошипа занимала верхнее положение.



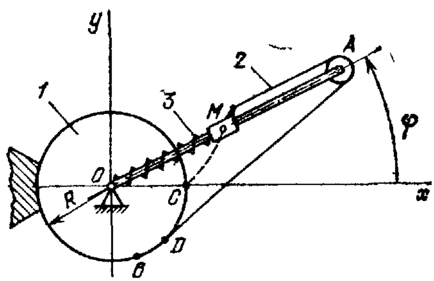
К задаче 3.14.

Ответ: при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{h^2 v_0^2}{z^2 R^2 \sqrt{h^2 + z^2 R^2}}$, $a_\tau = \frac{-hv_0^2}{zR\sqrt{h^2 + z^2 R^2}}$, $\rho = \frac{(h^2 + z^2 R^2)^{3/2}}{h^2}$, при $\varphi = \pi$, $a_n = \frac{hv_0^2}{z^2 R^2}$, $a_\tau = 0$, $\rho = \frac{(Rz - h)^2}{h}$.

3.15. В механизме Рифлера линейка AD в точках B и C шарнирно прикреплена к ползунам, которые движутся в прямолинейных взаимно перпендикулярных направляющих. Угол α, который линейка образует с осью Ox, изменяется по закону $\alpha = \omega t$, где $\omega = \text{const} > 0$.



К задаче 3.15.



К задаче 3.16.

Найти траекторию точки A и радиусы кривизны этой траектории при $t=0$ и $t=\pi/(2\omega)$, если $AB = BC = l$. Построить годографы векторов скорости и ускорения точки A.

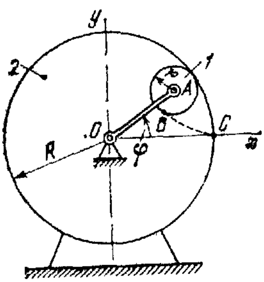
Ответ: $\frac{x^2}{4} + y^2 = l^2$, $\rho(0) = \frac{1}{2} l$, $\rho\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 4l$; годографы $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{a}_A$ — эллипсы $\frac{\dot{x}^2}{4} + \dot{y}^2 = l^2\omega^2$, $\frac{\ddot{x}^2}{4} + \ddot{y}^2 = l^2\omega^4$.

3.16. По стержню OA, который вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, скользит ползун M. Движение ползуна происходит под действием нити *2*, которая при вращении стержня наматывается на неподвижный диск *1* радиуса R. Нить прикреплена одним концом к ползуну, а другим (в точке B) к диску *1* и во все время движения натянута пружиной *3*. В начальный момент времени ($t = 0$) стержень OA горизонтален, а ползун M совпадает с точкой C диска.

Найти уравнения движения ползуна относительно системы координат Oxy, скорость, нормальное и касательное ускорения ползуна как функции угла φ; радиус кривизны траектории ползуна в начальный момент времени, если $\varphi = \omega t$ ($\omega = \text{const} > 0$).

Ответ: $x = R(1 + \omega t)\cos\omega t$, $y = R(1 + \omega t)\sin\omega t$ — спираль Архимеда, $v(\varphi) = R\omega\sqrt{1 + (1+\varphi)^2}$, $a_\tau(\varphi) = \dfrac{R\omega^2(1+\varphi)}{\sqrt{1+(1+\varphi)^2}}$, $a_n(\varphi) = \dfrac{R\omega^2[2 + (1+\varphi)^2]}{\sqrt{1+(1+\varphi)^2}}$, $\rho(0) = \dfrac{1}{2}R$.

3.17. Кривошип OA вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Он приводит в движение подвижную шестерню *1* радиуса r, которая обкатывается по внутренней поверхности неподвижной шестерни *2* радиуса R.



К задаче 3.17.

Найти уравнения движения точки B подвижной шестерни *1* в декартовых координатах, если угол поворота кривошипа $\varphi = \omega t$ ($\omega = \text{const} > 0$). В начальный момент времени ($t = 0$) точка B совпадала с точкой C неподвижной шестерни *2*, а кривошип OA был расположен на оси Ox.

Ответ: $x = (R - r)\cos\omega t + r\cos\left[\dfrac{(R-r)}{r}\omega t\right]$,

$y = (R - r)\sin\omega t - r\sin\left[\dfrac{(R-r)}{r}\omega t\right]$.

3.18. В условиях предыдущей задачи найти радиус кривизны траектории точки B шестерни *1* и дуговую координату s этой точки как функцию времени, если $s(0) = 0$ и $R = 2r$.

Ответ: $\rho = \infty$, $s(t) = 2r(1 - \cos\omega t)$.

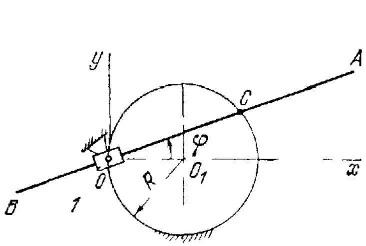
3.19. В условиях задачи 3.17 найти траекторию точки B шестерни *1* и дуговую координату s этой точки как функцию времени, если $R = 4r$. Определить, в какие моменты времени (при одном полном обороте кривошипа OA из его начального положения) скорость точки B будет равна нулю и найти проекции ускорения точки B на полярные оси в эти моменты времени. За полюс полярной системы координат принять точку O, за полярную ось — ось Ox.

Ответ: траектория точки B — астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=(4r)^{2/3}$, $s(t)=6r\sin^2\omega t$, $v=0$, $a_r=-12r\omega^2$, $a_p=0$ при $t=\frac{(n-1)}{2\omega}\pi$, где $n=1, 2, 3, 4$.

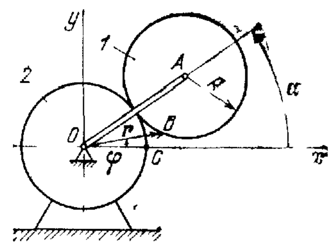
3.20. Кривая — улитка Паскаля — может быть вычерчена грифелем, закрепленным в точке A стержня AB, который проходит через вращающуюся вокруг оси O муфту *1* и движется в плоскости рисунка так, что $\varphi=\omega t$ ($\omega=\text{const}>0$), а неизменно связанная с ним точка C описывает окружность радиуса R с центром в точке O_1.

Найти уравнения движения точки A в декартовых и полярных координатах, а также проекции скорости и ускорения этой точки на полярные оси, если $AC=a=\text{const}$. За полюс полярной системы координат принять точку O, за полярную ось — ось Ox.

Ответ: $x=(2R\cos\omega t+a)\cos\omega t$, $y=(2R\cos\omega t+a)\sin\omega t$, $r=2R\cos\omega t+a$, $\varphi=\omega t$; $v_r=-2R\omega\sin\omega t$, $v_p=r\omega$; $a_r=-\omega^2(4R\cos\omega t+a)$, $a_p=-4R\omega^2\sin\omega t$.



К задаче 3.20.



К задаче 3.21.

3.21. Кривошип OA вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Он приводит в движение шестерню *1* радиуса R, которая обкатывается вокруг неподвижной шестерни *2* того же радиуса.

Найти траекторию точки B шестерни *1* в декартовых и полярных координатах, если угол поворота кривошипа $\alpha=\omega t$ ($\omega=\text{const}>0$). За полюс полярной системы координат принять точку O, за полярную ось — ось Ox. В начальный момент времени ($t=0$) точка B совпадала с точкой C шестерни *2*, а кривошип OA был расположен на оси Ox.

Ответ: траектория точки — кардиоида,

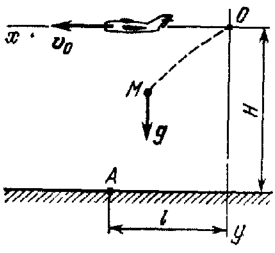
$$x=R(2\cos\omega t-\cos 2\omega t),\quad y=R(2\sin\omega t-\sin 2\omega t),$$

$$OB=r=R\sqrt{5-4\cos\omega t},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\left[\frac{2\sin\omega t(1-\cos\omega t)}{(2\cos\omega t-\cos 2\omega t)}\right].$$

3.22. В условиях предыдущей задачи найти наименьшее и наибольшее значения скорости и ускорения точки B за время одного полного оборота кривошипа OA из его начального положения. Кроме того, найти радиус кривизны траектории точки B в момент времени $t = \pi/\omega$.

Ответ: $v_{min} = 0$, $a_{min} = 2R\omega^2$ при $t = 0$, $v_{max} = 4R\omega$, $a_{max} = 6R\omega^2$ при $t = \pi/\omega$; $\rho(\pi/\omega) = 8R/3$.

3.23. От самолета, который летит с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$ на высоте H над Землей, в некоторый момент времени отделяется точка M. Движение точки происходит в вертикальной плоскости с постоянным ускорением $\mathbf{g}$.



К задаче 3.23.

Найти: 1) траекторию точки в неподвижной системе координат Oxy, начало которой совпадает с положением точки в момент ее отделения от самолета; 2) расстояние l, на котором точка должна отделиться от самолета, чтобы попасть в точку A на поверхности Земли; 3) величину скорости точки M и угол α между вектором скорости этой точки и вертикалью в положении A.

Ответ: 1) $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$; 2) $l = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$; 3) $v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{2gH}}\right)$.

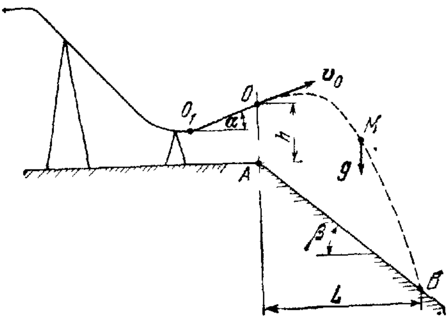
3.24. Лыжник (точка M), оторвавшись от горы разгона трамплина со скоростью $\mathbf{v}_0$, движется в вертикальной плоскости с постоянным ускорением $\mathbf{g}$. Углы, которые образуют с горизонтом прямолинейный участок O_1O горы разгона трамплина и линия наибольшего ската горы приземления равны α и β соответственно, $OA = h$.

Найти наибольшую высоту подъема H лыжника над точкой его отрыва от горы разгона трамплина и горизонтальную дальность полета L.

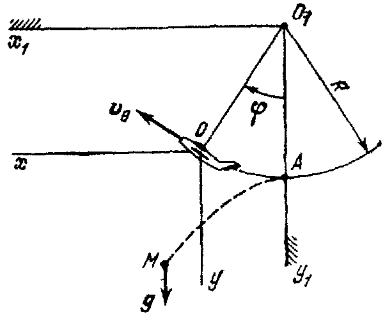
Ответ:
$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$
$$L = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}\left[(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) + \sqrt{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2 + \frac{2gh}{v_0^2\cos^2\alpha}}\right].$$

3.25. Самолет (точка O) движется в вертикальной плоскости по дуге окружности радиуса R с постоянной по величине скоростью $\mathbf{v}_0$. В момент времени, когда самолет находился в положении A, от него отделилась точка M, движение которой после отделения происходит с постоянным ускорением $\mathbf{g}$ относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1$.

Найти ускорение точки M как функцию угла φ относительно системы координат Oxy, связанной с самолетом в точке O и движущейся поступательно (оси систем координат $O_1x_1y_1$ и Oxy соответственно параллельны).



К задаче 3.24.

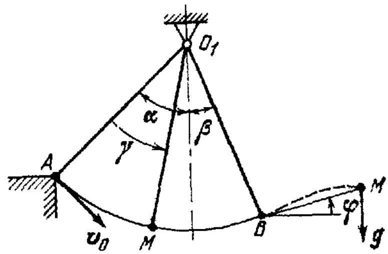


К задаче 3.25.

Ответ: $a = \sqrt{g^2 + \dfrac{v_0^4}{R^2}\left(1 + \dfrac{2gR\cos\varphi}{v_0^2}\right)}$.

3.26. Гимнаст (точка M), держась за перекладину трапеции, отталкивается от опоры A со скоростью $\mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0 \perp O_1A)$ и движется вместе с трапецией в вертикальной плоскости. Проекция ускорения гимнаста на касательную к его траектории на участке AB равна $g\sin(\alpha-\beta)$, длина трапеции $O_1M = l$.

В положении $B(\gamma = \alpha + \beta)$ гимнаст отделяется от трапеции и продолжает двигаться в той же плоскости с постоянным ускорением $\mathbf{g}$.



К задаче 3.26.

Найти: 1) скорость и ускорение гимнаста в положении B; 2) уравнения движения гимнаста после его отделения от трапеции (в полярных координатах r, φ).

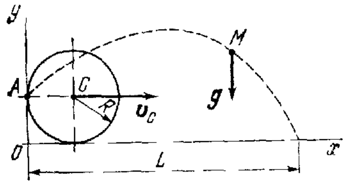
Ответ:

1) $v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gl(\cos\beta - \cos\alpha)}$, $a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}$, где $a_B^\tau = -g\sin\beta$, $a_B^n = \dfrac{v_0^2 + 2gl(\cos\beta - \cos\alpha)}{l}$;

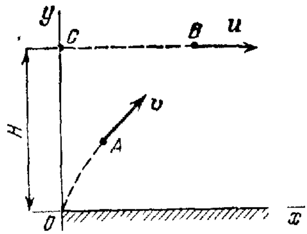
2) $r = t\sqrt{v_B^2 - (gv_B\sin\beta)\,t + \frac{1}{4}g^2t^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\beta - \dfrac{g}{2v_B\cos\beta}t\right)$.

3.27. Найти дальность полета точки M, отделившейся от колеса велосипеда радиуса $R = 0{,}55$ м в положении A. Движение точки происходит в вертикальной плоскости с постоянным ускорением $\mathbf{g}$ ($g = 10$ м/с^2). Скорость центра C колеса, катящегося без проскальзывания, постоянна и равна $v_C = 5$ м/с.

Ответ: $L = 5{,}5$ м.



К задаче 3.27.



К задаче 3.28.

3.28. Зенитная ракета (точка A) стартует с поверхности Земли вертикально и движется в вертикальной плоскости с постоянной по величине скоростью $\mathbf{v}$, все время направленной на самолет (точка B). Самолет движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\mathbf{u}$ на высоте H над поверхностью Земли.

Найти траекторию ракеты, если $u = v$ и в момент старта ракеты ($t = 0$) самолет находился в положении C. Кривизну поверхности Земли не учитывать, уравнение траектории ракеты представить в виде $x = f(y)$.

Ответ: $x(y) = \frac{H}{4}\left[\left(\frac{y}{H} - 1\right)^2 - 2\ln\left(\frac{y}{H} - 1\right) - 1\right]$.

Глава 4

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Поступательное движение тела

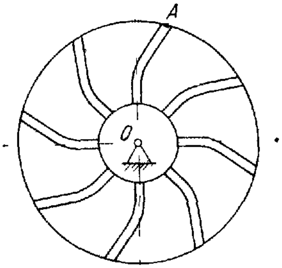
4.1. Крыльчатка центробежного насоса вращается равномерно вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью, соответствующей 2135 об/мин.

Найти угловые скорость и ускорение колеса, скорость и ускорение точки A, расположенной на ободе колеса, если его радиус равен 200 мм.

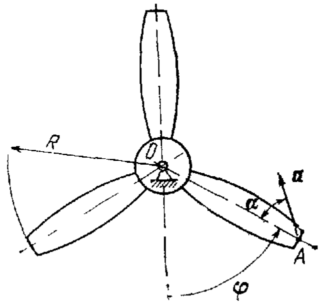
Ответ: $\omega = 223{,}6$ рад/с, $\varepsilon = 0$, $v = 44{,}7$ м/с, $a_\tau = 0$, $a_n = 9997$ м/с^2.

4.2. Точка A на кромке трехлопастного винта самолета имеет в момент разгона ускорение **a**.

Найти скорость точки A и зависимость угла поворота вала винта от времени, если $OA = R$, а вектор ускорения в некоторый



К задаче 4 1.



К задаче 4 2.

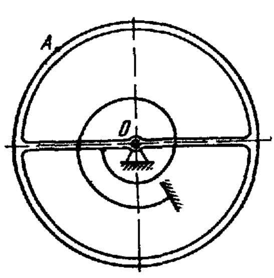
момент наклонен к прямой OA под углом α. Считать, что винт разгоняется из состояния покоя $\varphi = 0$ равноускоренно.

Ответ: $\varphi = a(\sin\alpha)t^2/(2R)$, $v_A = a(\sin\alpha)t$.

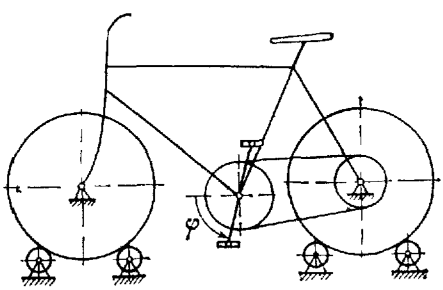
4.3. Часовой баланс совершает крутильные колебания по синусоидальному закону с периодом $T = 0{,}5$ с и амплитудой $\alpha = \pi/3$ рад.

Найти путь S, пройденный точкой A, находящейся на ободе баланса за время $t = 1$ с после начала движения, если $OA = 5$ мм. Вычислить также значение дуговой координаты s точки A в этот же момент времени. В начальный момент времени угол поворота баланса равен нулю.

Ответ: $S = 13{,}3\,\pi$ мм, $s = 0$.



К задаче 4.3.



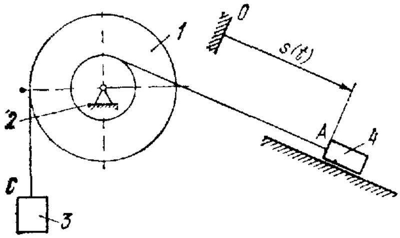
К задаче 4.4.

4.4. На рисунке показан велосипед-тренажер. Оси колес закреплены.

Найти угол поворота педали как функцию времени так, чтобы велосипедист «проехал» за 1 ч расстояние 30 км. Отношение чисел зубьев ведущего зубчатого колеса к ведомой шестерне равно 2, радиус заднего колеса равен 50 см. Вычислить также угловую скорость и число оборотов в минуту ведущего зубчатого колеса, полагая его вращение равномерным.

Ответ: $\varphi = 8{,}33t$ рад, $\omega = 8{,}33$ рад/с, $n = 79{,}6$ об/мин.

4.5. Механизм для подъема груза состоит из ворота, изготовленного в виде двух жестко связанных между собой блоков *1* и *2*. На блок *1* радиуса r_1 и на блок *2* радиуса r_2 намотаны нити. К концу *C* одной из них прикреплен груз *3*, а к концу *A* другой нити — груз *4*. Груз *4*, опускаясь по наклонной плоскости вниз, вращает ворот и поднимает груз *3*.



К задаче 4.5.

Считая нить нерастяжимой, найти скорость и ускорение груза *3*, если перемещение груза *4* происходит по закону $s = at^2$. В начальный момент времени система находилась в покое.

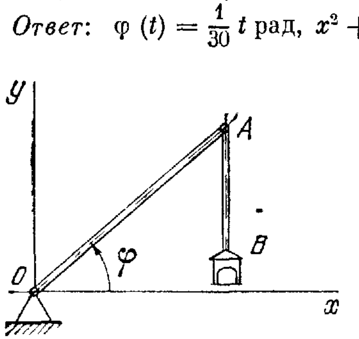
Ответ: $v = 2at\,\dfrac{r_1}{r_2}$, $a = 2a\,\dfrac{r_1}{r_2}$.

4.6. Устройство, подающее детали в печь для просушивания, состоит из кривошипа *OA*, вращающегося в вертикальной плоскости, и соединенного с ним шарнирно стержня *AB* с поддоном. Во время движения устройства стержень *AB* вертикален.

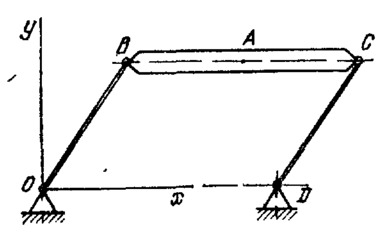
Определить зависимость угла поворота φ кривошипа *OA* от времени при условии, чтобы скорость транспортируемого груза в поддоне была постоянна и равна 0,05 м/с.

Найти также уравнение траектории точки *B*, если $AB = 0{,}8$ м, $OA = 1{,}5$ м. Считать, что в начальный момент времени $\varphi = 0$.

Ответ: $\varphi(t) = \dfrac{1}{30}t$ рад, $x^2 + (y + 0{,}8)^2 = 2{,}25$ м^2.



К задаче 4.6.



К задаче 4.7.

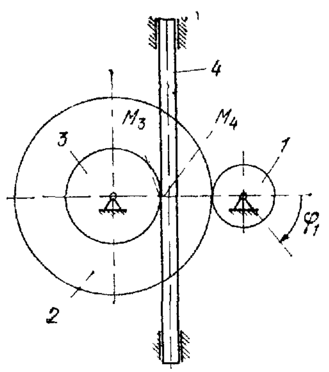
4.7. В четырехзвенном механизме *OBCD* точка *A*, находящаяся на середине спарника *BC*, движется равноускоренно. Касательное ускорение этой точки $a_A^\tau = 5$ м/с^2. Длина спарника $BC = 1$ м, а кривошипа $OB = DC = 50$ см. В начальном положении стержень OB горизонтален, а угловая скорость его равна 0.

Найти уравнение траектории точки A, угловую скорость и угловое ускорение кривошипа, скорость и ускорение точки B.

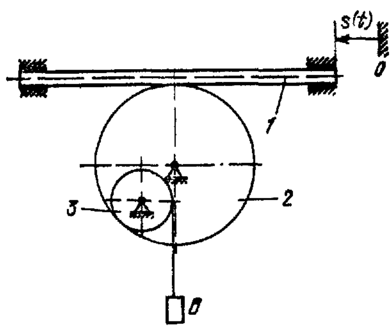
Ответ: $y_A^2 + \left(x_A - \frac{BC}{2}\right)^2 = OB^2$, $\omega_{OB} = 10\,t$ рад/с, $\varepsilon_{OB} = 10$ рад/с^2, $v_B = 5\,t$ м/с, $a_B = 5\sqrt{1 + 100\,t^4}$ м/с^2.

4.8. В механизме, приводящем в движение зубчатую рейку *4* строгального станка, колесо *1* с числом зубцов z_1 вращается по закону $\varphi_1 = a \sin pt$. Для момента времени $t_1 = \frac{\pi}{4p}$ с, прошедшего от начала движения ($t = 0$), найти скорости и ускорения точек M_3 и M_4, колеса *3* и рейки *4*, если числа зубцов колес *2* и *3* равны z_2 и z_3 соответственно. Зубья нарезаны на колесах с шагом h. Считать, что положение механизма, изображенное на рисунке, соответствует моменту времени t_1.

Ответ: $v_{M_3} = v_{M_4} = 0{,}112 h z_1 z_2 a p / z_2$, $a_{M_3} = 0{,}112 a p^2 \frac{h}{z_2} \times z_1 z_3 \sqrt{1 + 0{,}5\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 a^2}$, $a_{M_4} = 0{,}112 a p^2 h z_1 z_3 / z_2$.



К задаче 4.8.



К задаче 4.9.

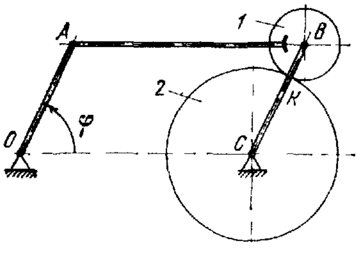
4.9. Зубчатая рейка *1* движется горизонтально по закону $s = at^3$ м из состояния покоя и приводит во вращение шестерни *2* и *3*. С шестерней *3* жестко связан барабан, на который намотана нерастяжимая нить с грузом B на конце.

Найти скорость и ускорение груза, если радиусы шестерни *3* и барабана равны между собой.

Ответ: $v = 3at^2$ м/с, $a = 6at$ м/с^2.

4.10. В четырехзвенном механизме к спарнику $AB = OC$ приварен зубчатый сектор *1* в виде диска, находящийся в зацеплении с колесом *2*. Зубчатое колесо *2* радиуса r_2, не связанное с кривошипом BC, может вращаться вокруг оси, проходящей через точку C.

Для момента времени $t = \frac{\pi}{2\omega}$ с определить угловую скорость и угловое ускорение колеса *2*, если кривошип $OA = l = CB$ вращается по закону $\varphi = b \sin \omega t$. В начальный момент времени стержень OA горизонтален ($\varphi = 0$).



К задаче 4.10.

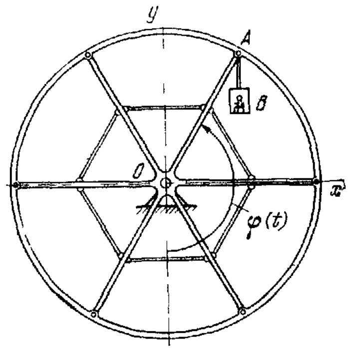
Ответ: $\omega = 0$, $\varepsilon = bl\omega^2/r_2$.

4.11. В четырехзвенном механизме (см. рис. к задаче 4.10) к спарнику $AB = OC$ приварен зубчатый сектор *1* в виде диска, находящийся в зацеплении с колесом *2*. Зубчатое колесо *2* радиуса r_2, не связанное с кривошипом BC, вращается равноускоренно с угловым ускорением ε вокруг оси, проходящей через точку C.

Найти закон вращения кривошипа $OA = l = CB$, если механизм приводится в движение из состояния покоя.

Ответ: $\varphi = \frac{r_2 \varepsilon}{2l} t^2$.

4.12. «Колесо обозрения» вращается вокруг горизонтальной оси O в вертикальной плоскости. В точке A к нему прикреплена шарнирно кабина B, которая движется поступательно.



К задаче 4.12.

Найти максимальную перегрузку в вертикальном направлении $n = |a_y|/g$ (g — ускорение силы тяжести), испытываемую человеком, находящимся в кабине, если $OA = R$, а колесо вращается равномерно с угловой скоростью ω. Через a_y обозначена проекция ускорения человека на вертикаль.

Ответ: $n = R\omega^2/g$.

§ 2. Преобразование простейших движений тела

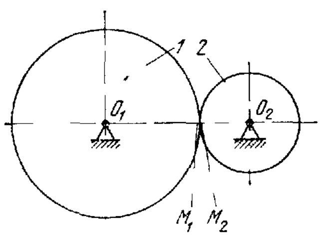
4.13. В цилиндрической зубчатой передаче находятся в зацеплении два колеса радиусов r_1 и r_2.

Найти скорости и ускорения двух соприкасающихся точек колес M_1 и M_2 в момент времени $t_1 = \frac{\pi}{3\omega}$ с после начала движения, если первое колесо вращается по закону $\varphi_1 = \sin \omega t$ рад и $r_1/r_2 = 2$. Положение механизма, изображенное на рисунке, соответствует моменту времени t_1.

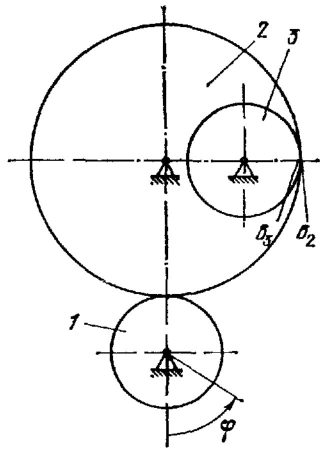
Ответ: $v_{M_1} = v_{M_2} = r_1\omega/2$, $a_{M_1} = r_1\omega^2 \sqrt{13}/4$, $a_{M_2} = r_1\omega^2$.

4.14. В редукторе с внешним (*1*, *2*) и внутренним (*2*, *3*) зацеплением шестерен вал, на котором жестко закреплена шестерня *1*, вращается по закону $\varphi(t) = b(t)^2$ рад из состояния покоя.

Найти угловую скорость и угловое ускорение шестерни *3*, скорости и ускорения двух соприкасающихся точек B_2, B_3. Радиусы колес равны соответственно r_1, r_2, r_3.



К задаче 4.13.

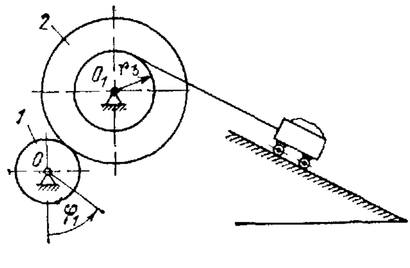


К задаче 4.14.

Ответ: $\omega_3 = 2btr_1/r_3$, $\varepsilon_3 = 2br_1/r_3$, $v_{B_2} = v_{B_3} = 2btr_1$, $a_{B_2} = 2br_1\sqrt{1 + 4b^2t^4r_1^2/r_2^2}$, $a_{B_3} = 2br_1\sqrt{1 + 4b^2t^4r_1^2/r_3^2}$.

4.15. Редуктор лебедки, поднимающей вагонетку с грузом из шурфа, состоит из двух зубчатых колес *1* и *2*, числа зубцов которых равны соответственно z_1 и z_2. С колесом *2* жестко связан барабан радиуса r_3, на который намотан трос, привязанный к вагонетке.

Найти закон вращения колеса *1* такой, чтобы вагонетка двигалась равноускоренно с ускорением 0,5 м/с². Известно, что $z_1 = 30$, $z_2 = 90$, а $r_3 = 40$ см. В начальный момент времени система находилась в покое.



К задаче 4.15.

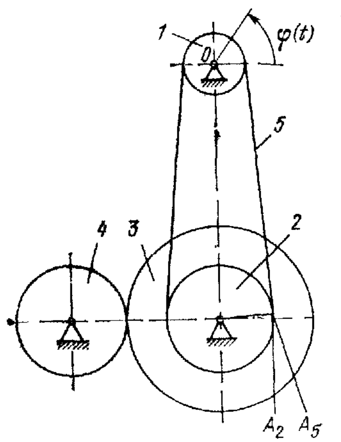
Ответ: $\varphi_1 = 0{,}0185\, t^2$ рад.

4.16. Механический привод состоит из шкива *1* радиуса r_1, вращающегося вокруг неподвижной оси O по закону $\varphi(t) = at^2$

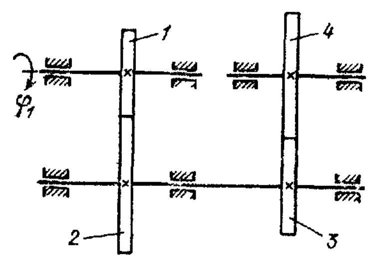
из состояния покоя, и ремня 5, надетого на шкивы 1 и 2; со шкивом 2 радиуса r_2 жестко связана зубчатая шестерня 3 с числом зубцов z_3, приводящая во вращение шестерню 4 с числом зубцов z_4 выходного вала.

Найти величины угловой скорости и углового ускорения шестерни 4, скорости и ускорения двух соприкасающихся точек A_2 и A_5. Точки A_2 и A_5 принадлежат соответственно шкиву 2 и ремню 5 и расположены в месте схода ремня со шкива. Проскальзывание ремня относительно шкивов отсутствует

Ответ: $v_{A_2} = v_{A_5} = 2ar_1t$, $a_{A_2} = 2ar_1\sqrt{1+(2ar_1t^2/r_2)^2}$, $a_{A_5} = 2ar_1$, $\omega_4 = \frac{z_3}{z_4}\cdot\frac{r_1}{r_2}\cdot 2at$, $\varepsilon_4 = \frac{z_3}{z_4}\cdot\frac{r_1}{r_2}\cdot 2a$.



К задаче 4 16



К задаче 4 17

4.17. Редуктор состоит из четырех цилиндрических шестерен с числом зубцов z_1, z_2, z_3, z_4 соответственно Вал 1 вращается по закону $\varphi_1 = t^2 - 3t^3$ рад из состояния покоя Все шестерни жестко закреплены на валах.

Найти угловую скорость и угловое ускорение шестерни 4 для момента времени $t = 1$ с, если $z_1 = 6$, $z_2 = 18$, $z_3 = 12$, $z_4 = 16$.

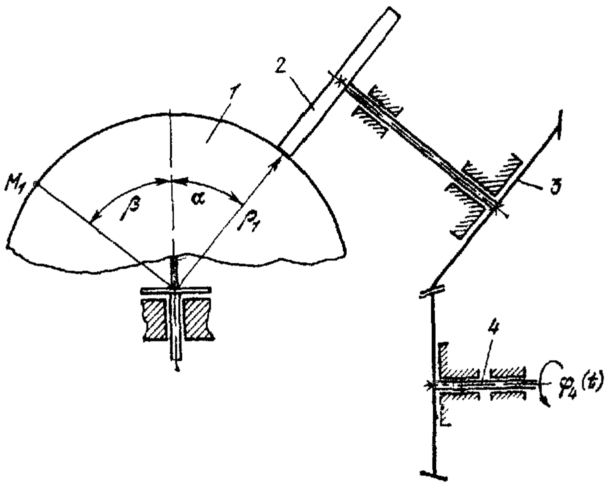
Ответ $\omega = 1{,}75$ рад/с, $\varepsilon = 4$ рад/с^2.

4.18. Во фрикционном вариаторе скоростей сфера 1 радиуса $\rho_1 = 10$ см приводится во вращение роликом 2 радиуса $r_2 = 5$ см. Ролик 2 вращается вместе с шестерней 3 радиуса $r_3 = 8$ см конической передачи. Коническая шестерня 4 радиуса $r_4 = 6$ см жестко насажена на вал, который вращается по закону $\varphi_4 = t^2 - 2t$ рад.

Полагая, что ролик 2 не проскальзывает относительно сферы 1, определить ускорение точки M_1 на сфере в момент времени $t_1 = 1$ с после начала движения, а также угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 сферы, если $\beta = 60°$, $\alpha = 30°$.

В начальный момент времени угол поворота $\varphi_4 = 0$. Положение механизма, изображенное на рисунке, соответствует моменту времени t_1.

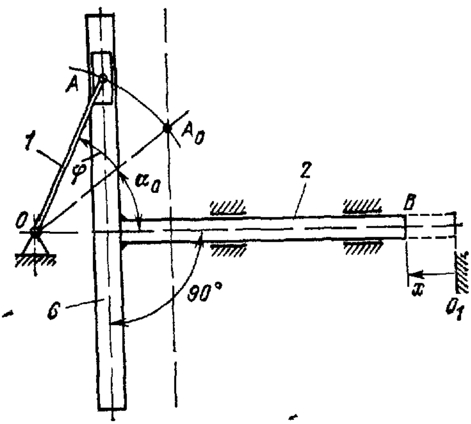
Ответ. $a_{M_1} = 12{,}99$ см/с², $\omega_1 = 0$, $\varepsilon_1 = 1{,}5$ рад/с².



К задаче 4.18.

4.19. В кулисном механизме рейка 2, имеющая вертикальный паз C, соединяется с кривошипом OA посредством камня A, шарнирно укрепленного на конце кривошипа и способного скользить в пазу C.

Определить в момент времени $t = \frac{\pi}{p}$ с после начала движения, величину скорости и нормального ускорения камня A, а также угловую скорость ω и угловое ускорение ε кривошипа OA, если рейка движется по закону $x = a \sin pt$. В начальный момент времени смещение рейки равно нулю, а кривошип OA составляет с прямой OB угол $\alpha_0 = \pi/3$.

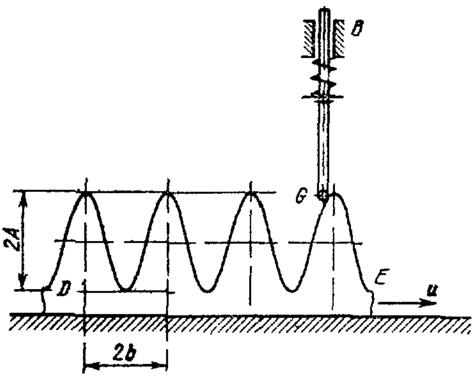


К задаче 4.19.

Ответ. $\omega = 1{,}155ap/OA$, $\varepsilon = 0{,}77a^2p^2/OA^2$, $v_A = 1{,}15ap$, $a_A^n = 1{,}33(3)\,a^2p^2/OA$.

4.20. Рейка DE, выполненная в виде косинусоиды, движется поступательно с постоянной скоростью u.

Определить скорость и ускорение точки B конца стержня, опирающегося своим нижним концом G на рейку. В начальный



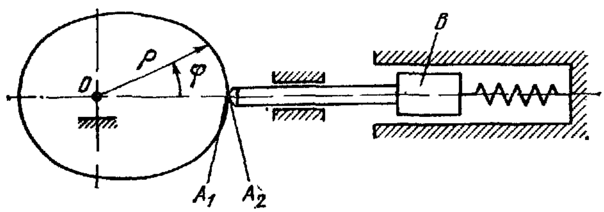
К задаче 4.20.

момент времени конец G стержня находился в нижнем положении.

Ответ: $v = \frac{u\pi}{b} A \sin \frac{\pi u}{b} t$, $a = A\left(\frac{\pi u}{b}\right)^2 \cos \frac{\pi}{b} ut$.

4.21. Уравнение профиля эксцентрика, вращающегося относительно оси O, в полярных координатах имеет вид $\rho = \rho_0 + b\,|\sin\varphi|$.

Найти для момента времени $t = 2/3$ с после начала движения скорость и ускорение точки A_1 эксцентрика и точки A_2, принадлежащей штанге B, которая прижимается к эксцентрику пружиной. Эксцентрик вращается равномерно с угловой скоростью



К задаче 4.21.

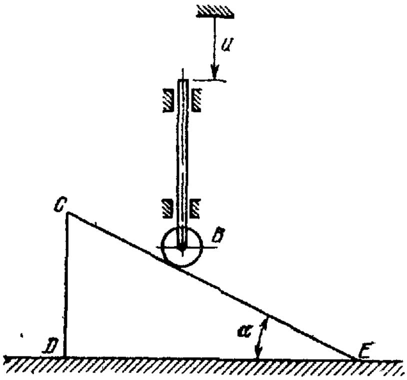
$\omega = \pi/2$ рад/с и $\rho_0 = 2$ см, $b = 4$ см. В начальный момент времени угол поворота эксцентрика считать равным нулю.

Ответ: $v_A = 8{,}57$ см/с, $a_A = 13{,}47$ см/с^2, $v_B = 3{,}14$ см/с, $a_B = 8{,}54$ см/с^2.

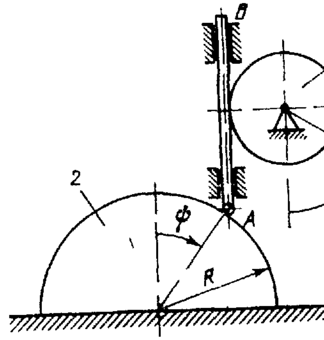
4.22. Стержень B движется в вертикальных направляющих по закону $u(t) = bt^3$ и надавливает нижним концом на призму CED.

Найти скорость и ускорение призмы, если угол CED равен α. В начальный момент времени ($t=0$) $BE=CE$.

Ответ: $v=3bt^2 \operatorname{ctg}\alpha$, $a=6bt\operatorname{ctg}\alpha$.



К задаче 4.22.



К задаче 4.23.

4.23. Шестерня *1* радиуса $r_1=R/2$ вращается по закону $\varphi=t^2$ рад из состояния покоя и приводит в поступательное движение зубчатую рейку AB. Зубчатая рейка надавливает на кулачок *2*, имеющий форму полуокружности радиуса $r_2=R$, и сообщает ему движение.

Определить скорость поступательного движения кулачка, если при $t=0$ $\psi=\psi_0=\pi/3$.

Ответ: $v=Rt\Big/\sqrt{\left(\dfrac{2}{1-t^2}\right)^2-1}$.

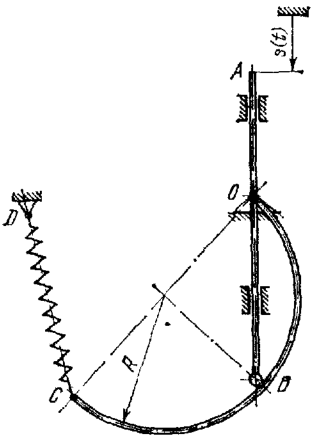
4.24. Эксцентрик, изготовленный в виде диска радиуса r, вращается вокруг оси, проходящей через точку O и приводит в движение стержень AB.

К задаче 4.24.

Найти скорость точки B, если эксцентриситет OC равен e, а угол поворота диска задан функцией $\varphi(t)$. В начальный момент времени прямая OC горизонтальна.

Ответ: $v=\left[\left(e-\dfrac{e^2\cos\varphi}{\sqrt{r^2-e^2\sin^2\varphi}}\right)\sin\varphi\right]\dot{\varphi}$.

4.25. Штанга AB движется в вертикальных направляющих по закону $s(t) = ut$. Упираясь нижним концом B в стержень OC, представляющий собой дугу окружности радиуса R, она приводит его во вращение вокруг оси O.



К задаче 4.25.

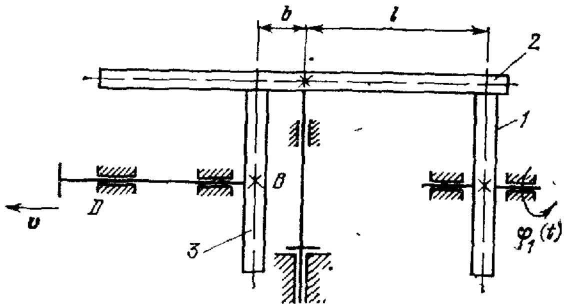
Найти угловую скорость ω стержня OC и скорость точки C в момент времени t, если в начальный момент времени угол COB равен $\pi/4$.

Ответ: $\omega = \dfrac{\gamma}{2\sin\eta}$, $v_C = \dfrac{R\gamma}{\sin\eta}$, где

$$\gamma = \frac{u}{R},\ \sin\eta = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{2}\gamma t - \gamma^2 t^2}.$$

4.26. Во фрикционном вариаторе скоростей диск 2 радиуса $R_2 = 20$ см приводится во вращение роликом 1 радиуса $r_1 = 5$ см, который вращается по закону $\varphi_1 = 2t - t^3$ рад. От диска при помощи ролика 3 радиуса $r_3 = 5$ см вращение передается валу BD.

Полагая, что ролики 1 и 3 не проскальзывают относительно диска 2, а ролик 3 движется равномерно со скоростью $v = 1$ мм/с вдоль оси BD, определить в момент времени $t_1 = 1$ с после

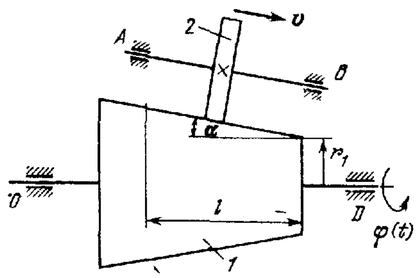


К задаче 4.26.

начала движения угловую скорость и угловое ускорение вала BD, если $l = 10$ см. В начальный момент времени $b = 2$ см, а угол поворота ролика 1 равен нулю.

Ответ: $\omega = 0{,}21$ рад/с, $\varepsilon = 1{,}27$ рад/с^2.

4.27. Фрикционный вариатор скоростей состоит из конического колеса 1 и находящегося с ним в зацеплении цилиндри-



К задаче 4.27.

ческого ролика *2* радиуса r_2. Колесо *1* вращается вокруг оси OD по закону $\varphi = at$ рад.

Определить величину угловой скорости ω и углового ускорения ε вала AB, если ролик *2* перемещается равномерно со скоростью $\mathbf{v}$ вдоль оси AB. Проскальзывание между колесом и роликом отсутствует. В начальный момент времени ролик *2* находится на расстоянии l от правого торца колеса *1* радиуса r_1, угол конусности которого равен α, а $\varphi = 0$.

Ответ: $\omega = \dfrac{a}{r_2}\left[r_1 + \left(\dfrac{l}{\cos\alpha} - vt\right)\sin\alpha\right]$, $\varepsilon = \dfrac{a}{r_2} v \sin\alpha$.

Глава 5

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Системы с одной степенью свободы

5.1. Доказать, что при движении плоской фигуры в ее плоскости концы векторов скоростей точек, лежащих на одной прямой, также лежат на некоторой прямой.

5.2. Доказать, что при движении плоской фигуры в ее плоскости концы векторов ускорений точек, лежащих на одной прямой, также лежат на некоторой прямой.

5.3. Какому условию должны удовлетворять скорость и ускорение центра колеса, имеющего возможность катиться без скольжения по прямолинейному пути, чтобы мгновенный центр ускорений совпадал с точкой контакта?

Ответ: $v = 0$ при произвольном a.

5.4. Цилиндрический каток радиуса r катится без скольжения по цилиндрической лунке радиуса R так, что его центр C имеет постоянную по модулю скорость $\mathbf{v}$.

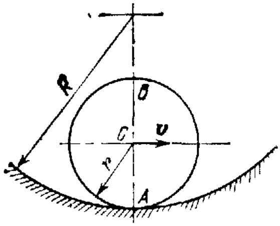
Определить ускорение точки контакта катка A и диаметрально противоположной ей точки B.

Ответ: $a_A = v^2 \dfrac{R}{r(R-r)}$, $a_B = v^2 \dfrac{R-2r}{r(R-r)}$.

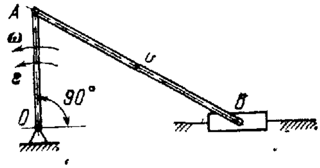
5.5. Кривошип OA кривошипно-ползунного механизма OAB в указанном на рисунке положении имеет угловую скорость $\omega = 1$ рад/с и угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ рад/с^2.

Определить ускорение точки C и положение мгновенного центра ускорений шатуна AB, если $OA = AC = CB = 0{,}1$ м.

Ответ: $a_C = 0{,}0577$ м/с^2. мгновенный центр ускорений совпадает с точкой B.



К задаче 5.4.

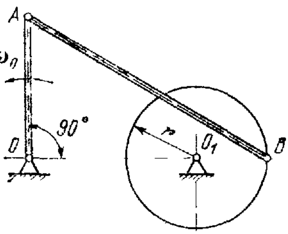


К задаче 5.5.

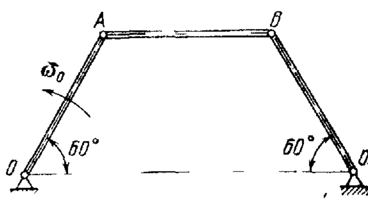
5.6. Кривошип OA длины 0,2 м, вращаясь равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 2$ рад/с, приводит в движение посредством шатуна AB длины 0,4 м диск радиуса $r = 0{,}1$ м, вращающийся вокруг оси, проходящей через точку O_1.

В положении, указанном на рисунке, определить скорость и ускорение точки B.

Ответ: $v_B = 0{,}69$ м/с, $a_B = 7{,}62$ м/с^2.



К задаче 5.6.



К задаче 5.7.

5.7. Стержень OA шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 2$ рад/с.

В положении, указанном на рисунке, определить угловые скорости и угловые ускорения звеньев AB и BO_1, а также скорость и ускорение точки B, если $OA = AB = BO_1 = 0{,}1$ м.

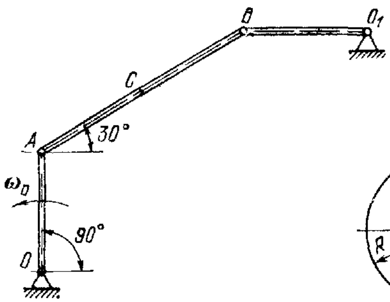
Ответ: $\omega_{AB} = 2$ рад/с; $\varepsilon_{AB} = 4{,}62$ рад/с^2, $\omega_{BO_1} = 2$ рад/с, $\varepsilon_{BO_1} = 9{,}25$ рад/с^2, $v_B = 0{,}2$ м/с, $a_B = 1{,}01$ м/с^2.

5.8. Стержень OA шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 1$ рад/с.

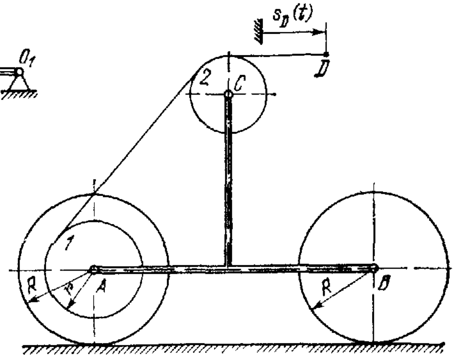
В положении, указанном на рисунке, определить угловую скорость и угловое ускорение звена AB, а также скорости и ускорения точек B и C, если $OA = AC = CB = BO_1 = 0{,}1$ м.

Ответ: $\omega_{AB} = 1$ рад/с, $\varepsilon_{AB} = 4{,}73$ рад/с^2, $v_B = 0{,}173$ м/с, $a_B = 1{,}06$ м/с^2, $v_C = 0{,}1$ м/с, $a_C = 0{,}56$ м/с^2.

5.9. Тележка AB, катящаяся без скольжения по горизонтальной плоскости, приводится в движение нерастяжимой нитью, намотанной на ступень радиуса r двухступенчатого колеса 1 и



К задаче 5.8.



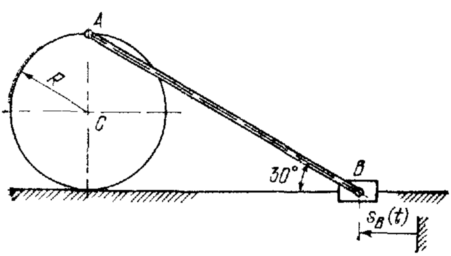
К задаче 5.9.

переброшенной через блок 2. Свободный конец нити D движется в горизонтальном направлении по закону $s_D(t) = 4t^2 - 2t^3$ м.

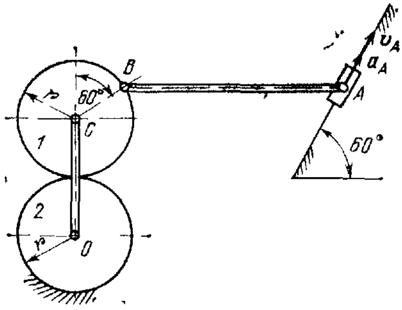
В момент времени $t = 1$ с определить скорость и ускорение тележки, если $R = 0{,}5$ м и $r = 0{,}3$ м.

Ответ: $v = 1{,}25$ м/с, $a = 2{,}5$ м/с^2 — тележка движется замедленно.

5.10. Ползун B, перемещаясь по горизонтальной направляющей по закону $s_B(t) = 0{,}01t^2 + 0{,}18t$ м, приводит в движение через шатун AB колесо радиуса $R = 0{,}1$ м. Колесо катится по горизонтальной плоскости без скольжения.



К задаче 5.10.



К задаче 5.11.

В момент времени $t = 1$ с определить скорости и ускорения точек A и C, если в этот момент механизм занимает положение, указанное на рисунке.

Ответ: $v_A = 0{,}2$ м/с, $a_A = 0{,}127$ м/с^2, $v_C = 0{,}1$ м/с, $a_C = 0{,}039$ м/с^2.

5.11. Ползун A, перемещаясь по прямолинейной направляющей, приводит в движение через стержень AB колесо *1* радиуса $r=0{,}1$ м, которое катится без скольжения по неподвижному колесу *2* того же радиуса.

В положении, указанном на рисунке, определить скорости и ускорения точек B и C, если в данный момент ползун A имеет скорость $v_A=0{,}3$ м/с и ускорение $a_A=0{,}1$ м/с². Длина стержня AB равна 0,4 м.

Ответ: $v_B=0{,}173$ м/с, $v_C=0{,}1$ м/с, $a_B=0{,}496$ м/с², $a_C=0{,}295$ м/с².

5.12. В механизме, рассмотренном в задаче 5.11, кривошип OC вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0=1$ рад/с.

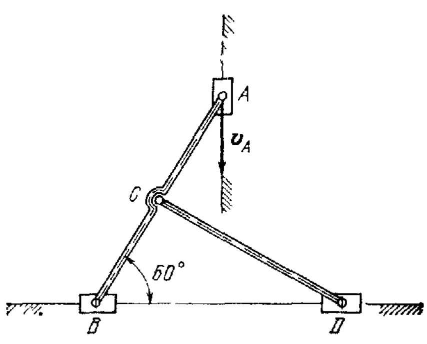
В положении, указанном на рисунке, определить скорость и ускорение ползуна A.

Ответ: $v_A=0{,}6$ м/с, $a_A=3{,}09$ м/с².

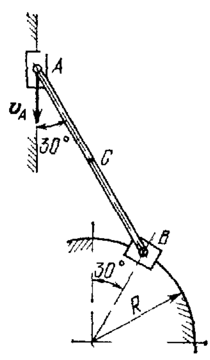
5.13. В стержневом механизме, состоящем из двух шарнирно связанных стержней с ползунами на концах, ползун A движется по вертикальной направляющей с постоянной скоростью $v_A=0{,}6$ м/с, а ползуны B и D скользят по горизонтальной направляющей.

В положении, указанном на рисунке, определить скорость и ускорение ползуна D, а также угловую скорость и угловое ускорение стержня CD, если $AC=CB=0{,}2$ м, $CD=0{,}2\sqrt{3}$ м.

Ответ: $v_D=0{,}346$ м/с, $a_D=3{,}2$ м/с², $\omega_{CD}=1$ рад/с, $\varepsilon_{CD}=0{,}577$ рад/с².



К задаче 5.13.



К задаче 5.14.

5.14. Стержень AB имеет на концах ползуны A и B, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей с постоянной скоростью $v_A=0{,}4$ м/с, а другой B — по криволинейной направляющей, представляющей собой дугу окружности радиуса $R=0{,}2$ м.

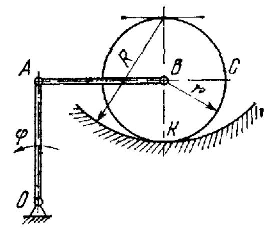
В положении, указанном на рисунке, определить скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение стержня, если $AC = CB = 0{,}2$ м.

Ответ: $v_B = 0{,}4$ м/с, $v_C = 0{,}346$ м/с, $a_B = 1{,}22$ м/с^2, $a_C = 0{,}61$ м/с^2, $\omega_{AB} = 1$ рад/с, $\varepsilon_{AB} = 2{,}89$ рад/с^2.

5.15. Кривошип OA, вращаясь вокруг оси, проходящей через точку O с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с, приводит в движение посредством шатуна AB колесо радиуса r, катящееся без скольжения по цилиндрической лунке радиуса R.

В положении, указанном на рисунке, определить скорости и ускорения точек B и C, а также положение мгновенного центра ускорений (МЦУ) колеса, если $OA = AB = R = 2r = 1$ м.

Ответ: $v_B = 2$ м/с, $a_B = 8$ м/с^2, $v_C = 2{,}83$ м/с, $a_C = 11{,}31$ м/с^2; МЦУ находится на ободе колеса в точке, противоположной точке K.

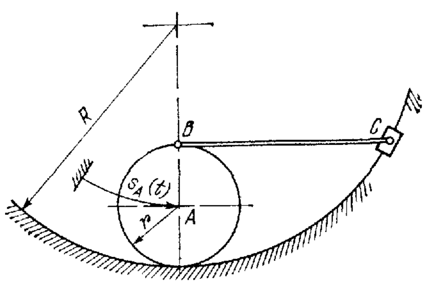


К задаче 5.15.

5.16. В механизме, рассмотренном в задаче 5.15, кривошип OA вращается вокруг оси, проходящей через точку O по закону $\varphi(t) = t^2 - t$ рад. В момент времени $t = 1$ с определить скорости и ускорения точек B и C, а также положение мгновенного центра ускорений колеса, если в данный момент механизм занимает положение, указанное на рисунке.

Ответ: $v_B = 1$ м/с, $a_B = 2{,}83$ м/с^2, $v_C = 1{,}41$ м/с, $a_C = 5{,}66$ м/с^2; МЦУ находится на ободе колеса в точке, противоположной точке C.

5.17. Колесо радиуса r катится без скольжения внутри цилиндрической лунки радиуса R. Стержень BC шарнирно связан



К задаче 5.17.

с точкой B на ободе колеса и ползуном C. Центр колеса — точка A движется по закону $s_A(t) = 0{,}3\ e^{t-1}$ м.

В момент времени $t = 1$ с определить скорость и ускорение ползуна C, если в этот момент точка B диаметрально противоположна точке контакта колеса с поверхностью лунки. Известно, что $R = 4r = 1{,}2$ м, $BC = 0{,}6\sqrt{3}$ м.

Ответ: $v_C = 1{,}2$ м/с, $a_C = 1{,}7$ м/с^2.

5.18. В механизме, рассмотренном в задаче 5.17, ползун C движется в направлении против хода часовой стрелки по закону $s_C(t) = 0{,}6(6t - t^2)$ м.

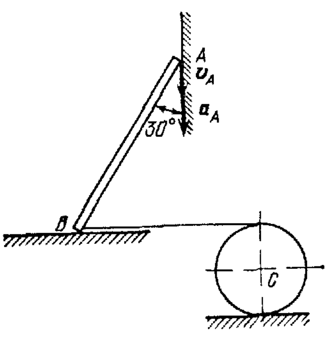
В момент времени $t = 1$ с определить скорость и ускорение центра колеса A, если в этот момент механизм занимает положение, указанное на рисунке.

Ответ: $v_A = 0{,}6$ м/с, $a_A = 0{,}5$ м/с^2.

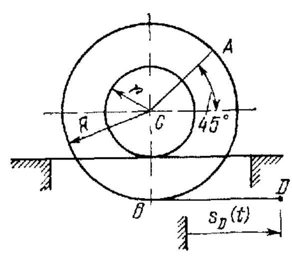
5.19. Стержень AB скользит своими концами по вертикальной и горизонтальной направляющим. К нижнему концу стержня привязана нерастяжимая нить, намотанная на колесо, катящееся по горизонтальной плоскости без скольжения.

Считая, что нить не скользит по колесу, определить угловую скорость и угловое ускорение стержня, а также скорость и ускорение центра колеса C, если в данный момент времени скорость и ускорение точки A равны $v_A = 0{,}5$ м/с и $a_A = 2\sqrt{3}$ м/с^2, а стержень составляет с вертикалью угол в 30°. Длина стержня равна 1 м.

Ответ: $\omega_{AB} = 1$ рад/с, $\varepsilon_{AB} = 5{,}2$ рад/с^2, $v_C = 0{,}433$ м/с, $a_C = 2$ м/с^2.



К задаче 5 19.



К задаче 5.20.

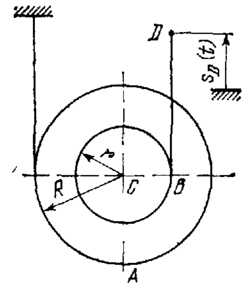
5.20. Двухступенчатый каток с радиусами ступеней r и $R = 2r = 0{,}2$ м катится без скольжения по горизонтальным направляющим благодаря нити, намотанной на наружную ступень. Конец D нити движется горизонтально по закону $s_D(t) = 0{,}1e^{t-1}$ м.

Определить скорость и ускорение точки A в момент времени $t = 1$ с. Положение точки A в этот момент указано на рисунке. Нить по катку не скользит.

Ответ: $v_A = 0{,}28$ м/с, $a_A = 0{,}383$ м/с^2.

5.21. Двухступенчатый блок с радиусами ступеней $r = 0{,}05$ м и $R = 0{,}1$ м подвешен на двух нитях, намотанных на малую и большую ступени блока. Конец D нити BD движется вертикально по закону $s_D(t) = 0{,}01t^3$ м.

Полагая, что нити не скользят по блоку, определить скорость и ускорение точки A блока в момент времени $t = 1$ с. Положение точки A в этот момент указано на рисунке.



К задаче 5.21.

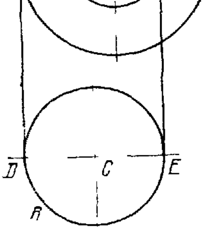
Ответ: $v_A = 0{,}0283$ м/с, $a_A = 0{,}0594$ м/с^2.

5.22. Двухступенчатый барабан A с радиусами ступеней $r = 0{,}1$ м и $R = 0{,}2$ м вращается вокруг оси, проходящей через точку O, по закону $\varphi(t) = t^3 - 3t$ рад. Нерастяжимая нить намотана на ступени барабана A и охватывает блок B.

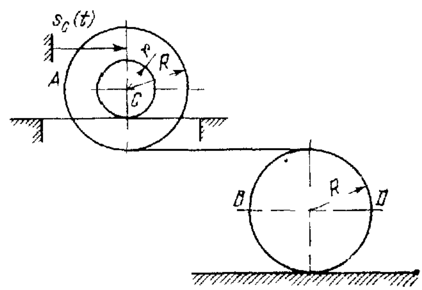
Считая, что нить не скользит по поверхностям блока и барабана, определить в момент времени $t = 1$ с скорости и ускорения точек C, D и E, а также угловую скорость и угловое ускорение блока B. Положение точек C, D и E в этот момент указано на рисунке.

Ответ: $v_C = 0{,}05$ м/с, $v_D = 0{,}2$ м/с, $v_E = 0{,}1$ м/с, $a_C = 0{,}1$ м/с^2, $a_D = 0{,}427$ м/с^2, $a_E = 0{,}25$ м/с^2, $\omega_B = 1$ рад/с, $\varepsilon_B = 2$ рад/с^2.

5.23. Двухступенчатый каток A и одноступенчатый каток B, катящиеся без скольжения



К задаче 5.22.



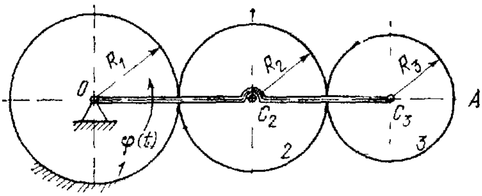
К задаче 5.23.

по прямолинейным направляющим, связаны между собой нерастяжимой нитью, намотанной на катки. Точка C катка A движется по закону $s_C(t) = 0{,}2t - 0{,}05t^2$ м.

Считая, что скольжение нити по каткам отсутствует, определить для момента времени $t = 1$ с скорость и ускорение точки D, если $R = 2r = 0{,}1$ м. Положение точки D в этот момент указано на рисунке.

Ответ: $v_D = 0{,}0707$ м/с, $a_D = 0{,}0559$ м/с^2.

5.24. В планетарном механизме колесо *1* неподвижно, а кривошип OC_3 вращается вокруг оси, проходящей через точку O по произвольному закону $\varphi(t)$.



К задаче 5.24.

Выяснить, при каких соотношениях между радиусами колес, колесо *3* будет двигаться поступательно.

Ответ: $R_1 = R_3$, радиус R_2 произволен.

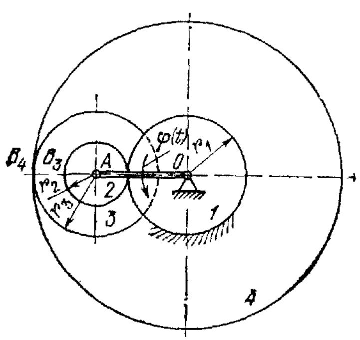
5.25. Для механизма, рассмотренного в задаче 5.24, считая, что $R_1 = 0{,}3$ м, $R_2 = R_3 = 0{,}2$ м, определить скорость и ускорение точки A на ободе колеса *3*, если в данный момент времени угловая скорость и угловое ускорение кривошипа, вращающегося ускоренно, равны: $\omega = 1$ рад/с, $\varepsilon = 3$ рад/с^2.

Ответ: $v_A = 0{,}8$ м/с, $a_A = 2{,}58$ м/с^2.

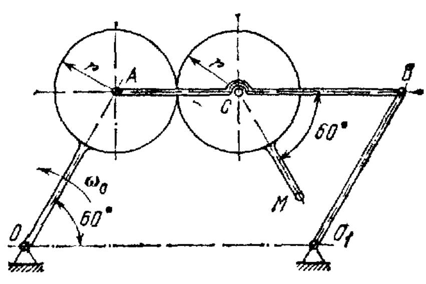
5.26. В планетарном механизме кривошип OA, вращаясь вокруг оси, проходящей через точку O по закону $\varphi(t) = 5t - t^2$ рад приводит в движение шестерни *2* и *3*, жестко связанные между собой. Шестерня *2* обкатывается по неподвижной шестерне *1*, а шестерня *3* находится в зацеплении с шестерней *4*.

В момент времени $t = 2$ с определить угловую скорость и угловое ускорение шестерни *4*, а также ускорения соприкасающихся точек B_3 и B_4, если $r_1 = r_3 = 2r_2 = 0{,}2$ м.

Ответ: $\omega_4 = 1{,}8$ рад/с, $\varepsilon_4 = 3{,}6$ рад/с^2, $a_{B_3} = 2{,}77$ м/с^2, $a_{B_4} = 2{,}42$ м/с^2.



К задаче 5.26.



К задаче 5.27.

5.27. В зубчато-рычажном эллипсографе звено OA вращается вокруг оси, проходящей через точку O с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с. Звено CM шарнирно связано со спарником AB в точке C и находится в зубчатом зацеплении со звеном OA.

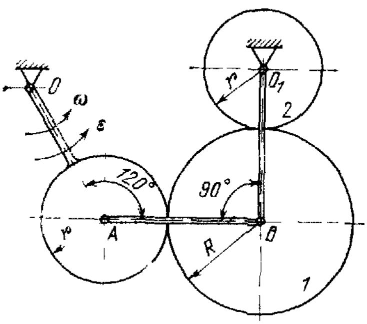
Определить скорость и ускорение точки M в положении, указанном на рисунке. Известно, что $OA = O_1B = 0{,}6$ м, $CM = 0{,}4$ м.

Ответ: $v_M = 0{,}436$ м/с, $a_M = 0{,}132$ м/с^2.

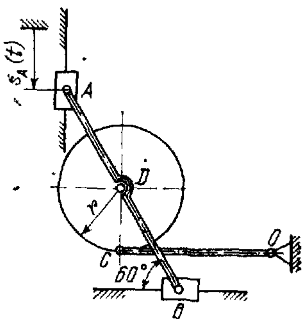
5.28. В зубчато-рычажном механизме ведущее звено OA вращается вокруг оси, проходящей через точку O, имея в данный момент времени угловую скорость $\omega = 2$ рад/с и угловое ускорение $\varepsilon = 4$ рад/с^2.

Определить угловую скорость и угловое ускорение зубчатого колеса 2, если в этот момент времени механизм занимает положение, указанное на рисунке. Известно, что $OA = AB = BO_1 = 0{,}5$ м, $R = 0{,}3$ м, $r = 0{,}2$ м.

Ответ: $\omega_2 = 8{,}83$ рад/с, $\varepsilon_2 = 11{,}32$ рад/с^2.



К задаче 5.28.



К задаче 5.29.

5.29. Ось вращения диска радиуса $r = 0{,}2$ м проходит через точку D стержня AB, на концах которого имеются ползуны A и B, движущиеся соответственно по вертикальной и горизонтальной направляющим. Точка C на ободе диска шарнирно связана со стержнем CO, вращающимся вокруг оси O. Ползун A движется по закону $s_A(t) = t^3 - t^2 + t$ м.

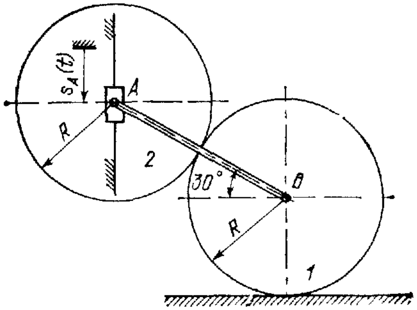
В момент времени $t = 1$ с определить угловую скорость и угловое ускорение диска, если в этот момент механизм занимает положение, указанное на рисунке. Дано: $AB = 1$ м, $CO = 0{,}5$ м, $AD = DB$.

Ответ: $\omega = 8{,}66$ рад/с, $\varepsilon = 72{,}7$ рад/с^2.

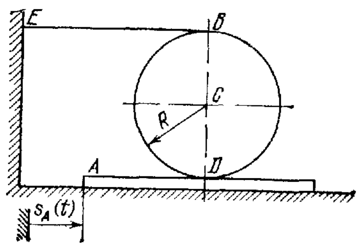
5.30. В механизме, изображенном на рисунке, оси колес связаны стержнем AB, на конце A которого находится ползун, движущийся по вертикальной направляющей по закону $s_A(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}t^3$ м.

Считая, что скольжение между колесами и колесом *1* и горизонтальной плоскостью отсутствует, определить в момент времени $t = 1$ с угловую скорость и угловое ускорение колеса *2*, если в этот момент механизм занимает положение, указанное на рисунке, а радиусы колес одинаковы и равны 0,5 м.

Ответ: $\omega_2 = 6$ рад/с, $\varepsilon_2 = 1,86$ рад/с^2.



К задаче 5.30.



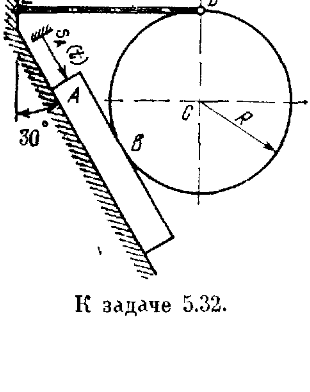
К задаче 5.31.

5.31. Пластина A перемещается по горизонтальной плоскости по закону $s_A(t) = 0,1(t^4 + 7,5t)$ м. На пластине находится каток радиуса $R = 0,2$ м, обмотанный нерастяжимой нитью, конец E которой закреплен на стене.

Считая, что скольжение катка по пластине и нити по катку отсутствует, определить в момент времени $t = 0,5$ с ускорения точек B, C и D катка, указанных на рисунке.

Ответ: $a_B = 0,8$ м/с^2, $a_C = 0,15$ м/с^2, $a_D = 0,854$ м/с^2.

5.32. Пластина A движется по наклонной плоскости по закону $s_A(t) = 0,1t^2 + 0,4t$ м. По пластине катится без скольжения каток радиуса $R = 0,2$ м. С точкой D на ободе катка шарнирно связан стержень ED длины 0,4 м, вращающийся вокруг оси E.



К задаче 5.32.

В момент времени $t = 1$ с определить угловую скорость и угловое ускорение катка, а также скорости и ускорения точек B, C и D, если в этот момент механизм занимает положение, указанное на рисунке.

Ответ: $\omega = 1$ рад/с, $\varepsilon = \frac{4}{3}$ рад/с^2, $v_B = 0,6$ м/с, $v_C = 0,4$ м/с, $v_D = 0,346$ м/с, $a_B = 0,283$ м/с^2, $a_C = 0,067$ м/с^2, $a_D = 0,332$ м/с^2.

5.33. В механизме, рассмотренном в задаче 5.32, каток вращается в направлении против часовой стрелки по закону $\varphi(t) = 0{,}5t^2$ рад.

В момент времени $t = 2$ с определить скорость и ускорение пластины, если механизм занимает в этот момент положение, указанное на рисунке.

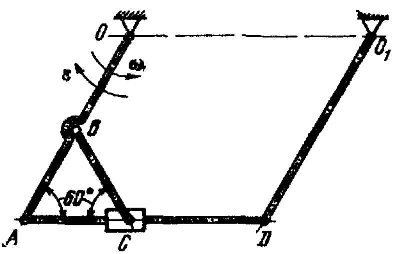
Ответ: $v_A = 1{,}2$ м/с, $a_A = 1{,}8$ м/с^2.

5.34. Два кривошипа OA и O_1D соединены спарником AD, по которому скользит ползун C, связанный стержнем BC с кривошипом OA. В положении механизма, указанном на рисунке, кривошипы имеют угловую скорость $\omega = 2$ рад/с и угловое ускорение $\varepsilon = 1$ рад/с^2.

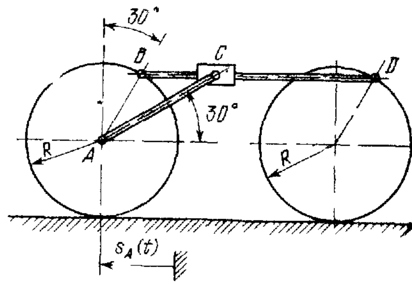
Определить скорость и ускорение ползуна C, если $OB = AB = 0{,}1$ м.

Указание. Рассмотреть движение ползуна C как сложное.

Ответ: $v_C = 0{,}2$ м/с, $a_C = 0{,}793$ м/с^2.



К задаче 5.34.



К задаче 5.35.

5.35. Два катка радиуса $R = 0{,}2$ м, связанные спарником BD, катятся по горизонтальной плоскости без скольжения. По спарнику BD скользит ползун C, связанный шатуном AC с осью A. Положение механизма, указанное на рисунке, соответствует моменту времени $t = 1$ с.

Для этого момента времени определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна AC, скорость и ускорение ползуна C, если центр катка A движется по закону $s_A(t) = 0{,}6e^{t-1}$ м.

Указание. Рассмотреть движение ползуна C как сложное.

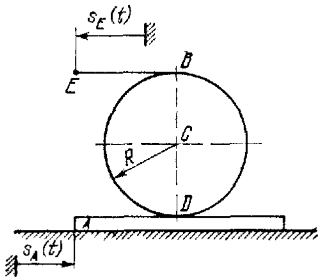
Ответ: $\omega_{AC} = 1$ рад/с, $\varepsilon_{AC} = 3{,}62$ рад/с^2, $v_C = 0{,}83$ м/с, $a_C = 1{,}29$ м/с^2.

§ 2. Системы с двумя степенями свободы

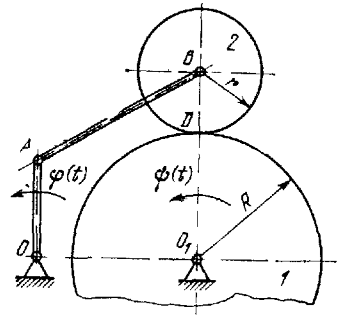
5.36. Пластина A движется по горизонтальной плоскости по закону $s_A(t) = 0{,}1(t^4 + 7{,}5t)$ м. На пластине находится каток радиуса $R = 0{,}5$ м, обмотанный нерастяжимой нитью, конец которой, точка E, движется горизонтально по закону $s_E(t) = 0{,}2t^2$ м.

Считая, что скольжение катка по пластине и нити по катку отсутствует, определить в момент времени $t = 0{,}5$ с ускорения точек B, C и D катка, указанных на рисунке.

Ответ: $a_B = 0{,}64$ м/с^2; $a_C = 0{,}05$ м/с^2; $a_D = 0{,}588$ м/с^2.



К задаче 5.36.



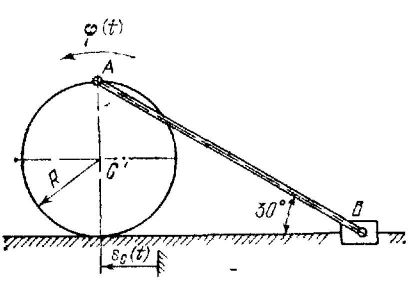
К задаче 5.37.

5.37. В зубчато-рычажном механизме кривошип OA и шестерня 1 вращаются по законам $\varphi(t) = 2t^2$ рад, $\psi(t) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t$ рад.

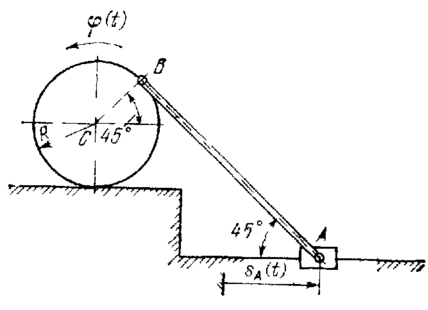
В момент времени $t = 0{,}5$ с определить угловую скорость и угловое ускорение шестерни 2, а также ускорение ее точки D, если в этот момент механизм занимает положение, указанное на рисунке, и $OA = 0{,}3$ м, $AB = 0{,}6$ м, $r = 0{,}2$ м, $R = 0{,}4$ м.

Ответ: $\omega_2 = 1$ рад/с, $\varepsilon_2 = 14{,}02$ рад/с^2, $a_D = 1{,}31$ м/с^2.

5.38. Движение катка радиуса $R = 0{,}5$ м по прямолинейному пути задано законом перемещения его центра C и углом поворота: $s_C(t) = 0{,}5e^{t-1}$ м, $\varphi(t) = t^2 - 2t$ рад. С катком связан шатун AB.



К задаче 5.38.



К задаче 5.39.

Считая, что в момент времени $t = 1$ с механизм занимает положение, указанное на рисунке, определить скорость и ускорение ползуна B.

Ответ: $v_B = 0{,}5$ м/с, $a_B = 1{,}5$ м/с^2.

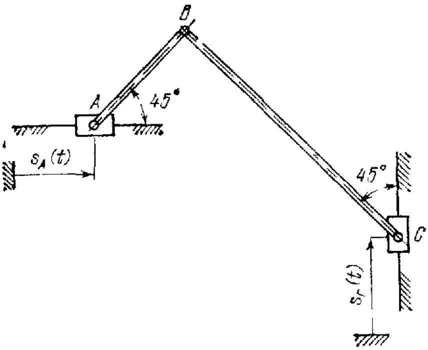
5.39. Каток радиуса $R = 0{,}1$ м катится со скольжением по горизонтальной плоскости, вращаясь по закону $\varphi(t) = 2t^2$ рад. С помощью шатуна AB длины $4R$ он связан с ползуном A, который движется по горизонтальной направляющей по закону $s_A(t) = 0{,}4t$ м.

Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна AB, а также скорость и ускорение центра C катка в момент времени $t = 1$ с, если в этот момент механизм занимает положение, указанное на рисунке.

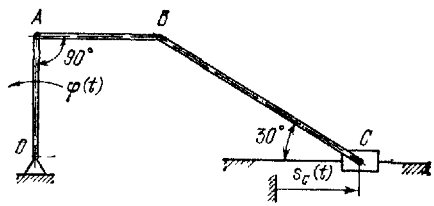
Ответ: $\omega_{AB} = 1$ рад/с, $\varepsilon_{AB} = 2$ рад/с^2, $v_C = 0{,}965$ м/с, $a_C = 1{,}13$ м/с^2.

5.40. Ползуны A и C, соединенные двумя стержнями AB длины 0,4 м и BC длины 1 м, движутся по прямолинейным, взаимно перпендикулярным направляющим соответственно по законам $s_A(t) = 0{,}1t^2$ м, $s_C(t) = 0{,}4t - 0{,}1t^2$ м. В момент времени $t = 1$ с механизм занимает положение, указанное на рисунке.

Для этого момента времени определить угловые скорости и угловые ускорения стержней AB и BC, а также скорость и ускорение точки B.



К задаче 5.40.



К задаче 5.41.

Ответ: $\omega_{AB} = 0{,}707$ рад/с, $\varepsilon_{AB} = 0$, $\omega_{BC} = 0$, $\varepsilon_{BC} = 0{,}0828$ рад/с^2, $v_B = 0{,}2$ м/с, $a_B = 0{,}153$ м/с^2.

5.41. В представленном на рисунке механизме кривошип OA вращается вокруг точки O по закону $\varphi(t) = 3t - 2t^2$ рад, а ползун C перемещается горизонтально по закону $s_C(t) = t + 0{,}5t^2$ м.

Считая, что указанное на рисунке положение соответствует моменту времени $t = 1$ с, определить в этот момент скорость и ускорение точки B, если $OA = AB = 1$ м.

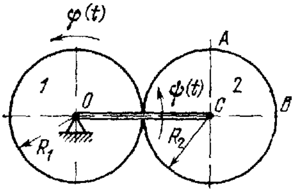
Ответ: $v_B = 2$ м/с, $a_B = 4{,}12$ м/с^2.

5.42. В дифференциальном механизме с внешним зацеплением шестерня *1* и кривошип OC вращаются независимо друг от друга вокруг оси O по законам $\varphi(t) = 3t^2 - 2t$ рад и $\psi(t) = \frac{1}{3}t^3$ рад соответственно.

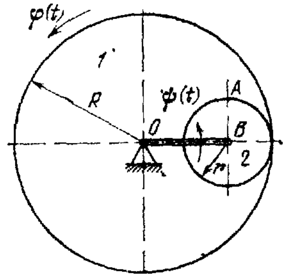
В момент времени $t = 1$ с определить скорости и ускорения точек A и B шестерни *2*, занимающих в этот момент положения, указанные на рисунке, если $R_1 = R_2 = 0{,}1$ м.

Ответ: $v_A = 0{,}283$ м/с, $a_A = 0$, $v_B = 0$, $a_B = 0{,}632$ м/с^2.

5.43. В дифференциальном механизме с внутренним зацеплением шестерня *1* и кривошип OB



К задаче 5.42.



К задаче 5.43.

вращаются независимо друг от друга по законам $\varphi(t) = 4t - t^2$ рад и $\psi(t) = t + 0{,}5t^2$ рад соответственно.

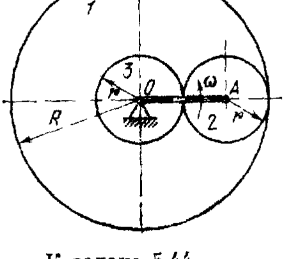
В момент времени $t = 1$ с определить скорость и ускорение точки A шестерни *2*, если $R = 0{,}3$ м, $r = 0{,}1$ м, а точка A занимает положение, указанное на рисунке.

Ответ: $v_A = 0{,}447$ м/с, $a_A = 0{,}2$ м/с^2.

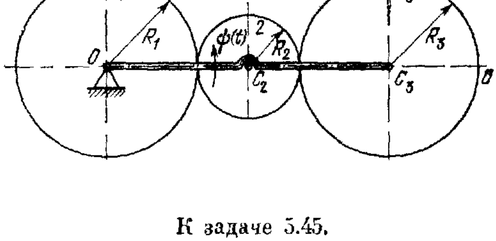
5.44. В дифференциальном механизме шестерни *1*, *3* и кривошип OA могут вращаться вокруг оси O независимо друг от друга. Шестерня *2* одинакового радиуса с шестерней *3* шарнирно связана с кривошипом OA и находится в зацеплении с шестернями *1* и *3*. Известно, что шестерня *1* и кривошип OA вращаются против часовой стрелки с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω.

Определить: 1) в каком соотношении должны находиться ω_1 и ω, чтобы шестерня *3* не вращалась; 2) угловую скорость шестерни *3*, если $\omega_1 = 2\omega$.

Ответ: 1) $\omega_1 = 4\omega/3$; 2) $\omega_3 = -2\omega$ — шестерня *3* будет вращаться по часовой стрелке.



К задаче 5.44.



К задаче 5.45.

5.45. В дифференциальном механизме шестерня *1* и кривошип OC_3 вращаются независимо друг от друга вокруг оси O по законам $\varphi(t) = 2t - t^2$ рад, $\psi(t) = t + 0{,}5t^2$ рад соответственно.

Считая, что в момент времени $t = 1$ с механизм занимает положение, указанное на рисунке, определить в этот момент скорости и ускорения точек A и B шестерни *3*, если $R_1 = R_3 = 0{,}4$ м, $R_2 = 0{,}2$ м.

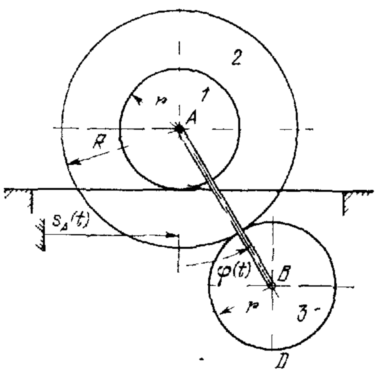
Ответ: $v_A = v_B = 2{,}4$ м/с, $a_A = 4{,}18$ м/с^2, $a_B = 4{,}82$ м/с^2.

5.46. Механическая система состоит из катка *1* радиуса $r = 0{,}1$ м, шестерни *2* радиуса $R = 2r$, скрепленной с катком, кривошипа AB, шарнирно соединенного с осью A катка, и шестерни *3* радиуса r. Каток катится без скольжения, при этом ось A движется по закону $s_A(t) = 0{,}1e^{t-1}$ м, а угол отклонения кривошипа AB от вертикали изменяется по закону

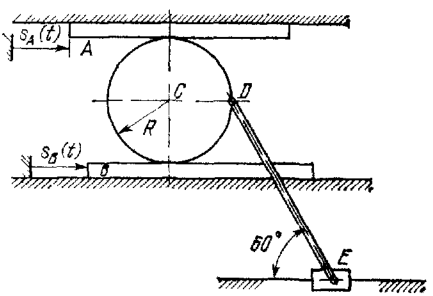
$$\varphi(t) = \frac{\pi}{6} + 1{,}5 - 2t + 0{,}5t^2 \text{ рад.}$$

В момент времени $t = 1$ с определить угловую скорость и угловое ускорение шестерни *3*, а также скорость и ускорение ее нижней точки D.

Ответ: $\omega_3 = 1$ рад/с, $\varepsilon_3 = 5$ рад/с^2, $v_D = 0{,}3$ м/с, $a_D = 0{,}874$ м/с^2.



К задаче 5.46.



К задаче 5.47.

5.47. Зубчатые рейки A и B суммирующего механизма движутся горизонтально по законам $s_A(t) = 6t - 2t^2$ м, $s_B(t) = t^2 - 3t$ м соответственно. С точкой D шестерни радиуса $R = 0{,}2$ м шарнирно связан стержень DE длины 1 м, имеющий на другом конце ползун E, движущийся по горизонтальной прямолинейной направляющей.

В момент времени $t = 1$ с определить скорость и ускорение ползуна E, если в этот момент механизм занимает положение, указанное на рисунке.

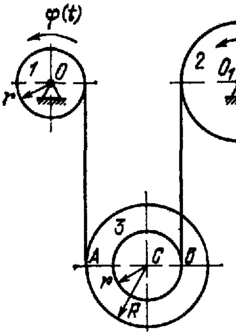
Ответ: $v_E = 3{,}1$ м/с, $a_E = 35{,}4$ м/с^2.

5.48. В механизме, рассмотренном в задаче 5.47, зубчатая рейка A движется по закону $s_A(t)=2e^{t-1}$ м, а ползун E перемещается слева направо с постоянной скоростью $v_E=1{,}5$ м/с.

В момент времени $t=1$ с определить скорость и ускорение рейки B, если в этот момент механизм занимает положение, указанное на рисунке.

Ответ: $v_B=3{,}37$ м/с, $a_B=9{,}2$ м/с^2.

5.49. Барабан *1* радиуса $r=0{,}1$ м и барабан *2* радиуса $R=0{,}2$ м, вращающиеся по законам $\varphi(t)=5e^{0,5-t}$ рад и $\psi(t)=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t$ рад вокруг осей O и O_1 соответственно, связаны нерастяжимыми нитями с двухступенчатым блоком *3*. Нити по барабанам и ступеням блока не скользят. В момент времени $t=0{,}5$ с определить ускорения точек A, B и C блока, указанных на рисунке.



К задаче 5.49.

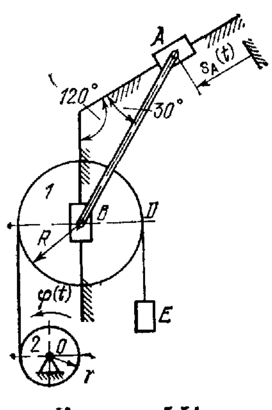
Ответ: $a_A=0{,}538$ м/с^2, $a_B=0{,}186$ м/с^2, $a_C=0{,}271$ м/с^2.

5.50. В механизме, рассмотренном в задаче 5.49, барабан *1* вращается вокруг оси O по закону $\varphi(t)=8e^{0,5-t}$ рад, а центр блока *3* — точка C — опускается вниз по закону $s_C(t)=t^2$ м.

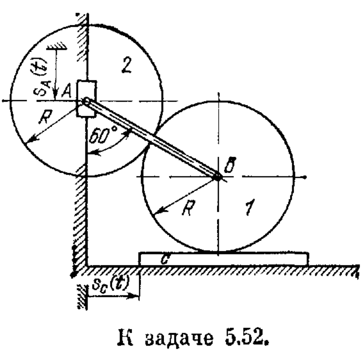
В момент времени $t=0{,}5$ с определить угловую скорость и угловое ускорение барабана *2*.

Ответ: $\omega_2=5{,}5$ рад/с, $\varepsilon_2=17$ рад/с^2.

5.51. Ползун A, двигаясь по закону $s_A(t)=0{,}1(4t^2-t^3)$ м, приводит в движение линейку AB длины 0,5 м, с которой шарнирно связаны ползун B и блок *1* радиуса $R=0{,}3$ м. Барабан *2* радиуса



К задаче 5.51.



К задаче 5.52.

$r = 0{,}1$ м вращается вокруг оси O по закону $\varphi(t) = 4e^{1-t}$ рад, наматывая нерастяжимую нить, переброшенную через блок *1* и скрепленную с грузом E.

В момент времени $t = 1$ с определить скорость и ускорение точки D блока, а также ускорение груза E, если в данный момент механизм занимает положение, указанное на рисунке, а скольжение нити по барабану и блоку отсутствует.

Ответ: $v_D = 1{,}4$ м/с, $a_D = 2{,}94$ м/с^2, $a_E = 1{,}15$ м/с^2.

5.52. В механизме, представленном на рисунке, оси колес *1* и *2* одинакового радиуса $R = 0{,}5$ м связаны стержнем AB, один из концов которого движется вместе с ползуном A по вертикальной направляющей по закону $s_A(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} t^3$м. При этом колесо *1* катится по пластине C, перемещающейся по горизонтальной плоскости по закону $s_C(t) = 6t - 2t^2$ м.

Считая, что скольжение между колесами и между колесом *1* и пластиной C отсутствует, определить в момент времени $t = 1$ с угловую скорость и угловое ускорение колеса *2*, если в этот момент механизм занимает положение, указанное на рисунке.

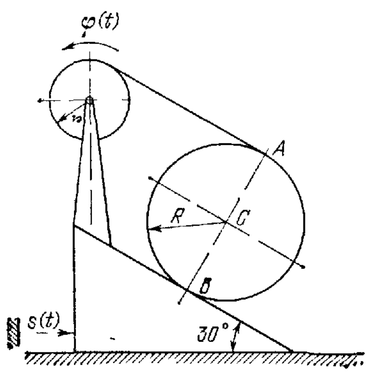
Ответ: $\omega_2 = 2$ рад/с; $\varepsilon_2 = 6{,}14$ рад/с^2.

5.53. В механизме, рассмотренном в задаче 5.52, ползун A движется по закону $s_A(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} t^3$м, а колесо *2* вращается по закону $\varphi(t) = 5t - 1{,}5t^2$ рад (положительное направление вращения против часовой стрелки).

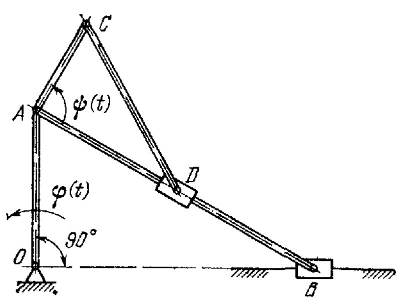
В момент времени $t = 1$ с определить скорость и ускорение пластины C, если механизм в данный момент занимает положение, указанное на рисунке.

Ответ: $v_C = 2$ м/с, $a_C = 0{,}57$ м/с^2.

5.54. Ворот радиуса $r = 0{,}1$ м, вращаясь по закону $\varphi(t) = 2t^2 - 6t$ рад, приводит в движение посредством нерастяжимой нити каток радиуса $R = 0{,}2$ м, который катится без скольжения



К задаче 5.54.



К задаче 5.55.

по грани треугольной призмы. Призма перемещается по горизонтальной плоскости по закону $s(t) = 0{,}1(t^2 + t)$ м.

Считая, что скольжение нити по вороту и катку отсутствует, определить в момент времени $t = 0{,}5$ с скорости и ускорения точек A, B и C, указанных на рисунке.

Указание. Рассмотреть движение катка как сложное.

Ответ: $v_A = 0{,}582$ м/с, $v_B = 0{,}2$ м/с, $v_C = 0{,}386$ м/с, $a_A = 0{,}248$ м/с^2, $a_B = 0{,}346$ м/с^2, $a_C = 0{,}104$ м/с^2.

5.55. Кривошип OA вращается вокруг оси, проходящей через точку O, по закону $\varphi(t) = e^{t-1}$ рад. Кривошип AC вращается вокруг оси, проходящей через точку A, поворачиваясь относительно шатуна AB на угол $\psi(t) = \frac{\pi}{2} - t + t^2$ рад.

Определить в момент времени $t = 1$ с скорость и ускорение ползуна D, если $AB = 2OA = 2$ м, $CD = 2AC = 1$ м, и в данный момент угол AOB равен 90°.

Указание. Рассмотреть движение ползуна D как сложное.

Ответ: $v_D = 1{,}455$ м/с, $a_D = 1{,}382$ м/с^2.

Глава 6

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ И ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Сферическое движение и общий случай движения тела

6.1. Углы Эйлера, определяющие положение твердого тела с одной неподвижной точкой, изменяются по закону: $\varphi = at$, $\psi = bt$, $\theta = c \sin \frac{\pi}{2} t$, a, b, c — постоянные.

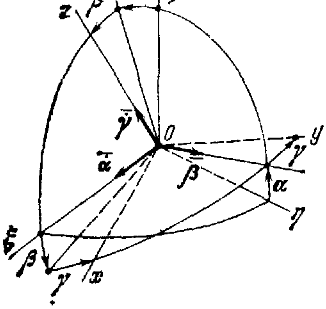
Определить величину угловой скорости тела для момента времени $t = 1$ с.

Ответ: $\omega = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos c}$.

6.2. Определить величину углового ускорения тела, если углы Эйлера заданы уравнениями $\varphi = nt$, $\psi = mt$, $\theta = \theta_0$, n, m и θ_0 — постоянные.

Ответ: $\varepsilon = nm \sin \theta_0$.

6.3. Положение тела с неподвижной точкой задано углами Крылова. Углы Крылова определяют ориентацию связанного с телом трехгранника $Oxyz$ относительно какой-либо системы отсчета $O\xi\eta\zeta$, как это показано на рисунке.



К задаче 6.3.

Получить формулы, аналогичные кинематическим уравнениям Эйлера, выразив угловую скорость тела через углы Крылова и их производные.

Ответ: проекции угловой скорости тела на связанные с ним оси равны

$$\omega_x = \dot\alpha \cos\beta \cos\gamma + \dot\beta \sin\gamma,$$

$$\omega_y = -\dot\alpha \cos\beta \sin\gamma + \dot\beta \cos\gamma,$$

$$\omega_z = \dot\alpha \sin\beta + \dot\gamma.$$

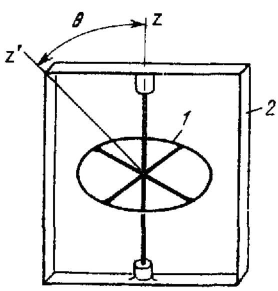
6.4. Доказать, что если проекции абсолютной угловой скорости тела на связанные с ним оси остаются постоянными, то движение тела представляет собой вращение вокруг неподвижной оси с постоянной скоростью.

6.5. Колесо *1* может свободно поворачиваться на своей оси относительно рамки *2*. При вращении последней вокруг какой-либо оси z', не совпадающей с осью z, колесо вынуждено также совершать некоторое вращательное движение. Если колесо симметрично относительно оси z и трение отсутствует, то движение его будет таким, что проекция абсолютной угловой скорости колеса на ось z является величиной постоянной (это доказывается методами динамики).

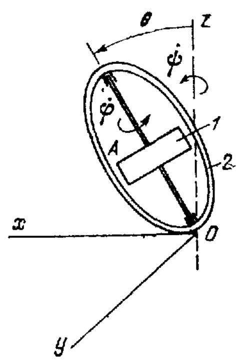
В начальный момент рамка и колесо покоились, затем рамку повернули вокруг неподвижной оси z' на 360°.

Какова будет ориентация колеса к концу этого поворота?

Ответ: по отношению к первоначальному положению колесо окажется повернутым вокруг оси z на угол $\varphi = 4\pi \sin^2 \frac{\theta}{2}$, где θ — угол между осями z и z'.



К задаче 6.5.



К задаче 6.6.

6.6. Волчок *1*, помещенный в обойму *2*, опертую в неподвижной точке O, прецессирует так, что обойма вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью $\dot\psi$, а волчок вращается относительно нее с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$; при этом ось волчка образует с вертикалью постоянный угол θ.

Определить абсолютную угловую скорость и угловое ускорение волчка в проекциях на оси $Oxyz$, скрепленные с обоймой (ось волчка лежит в плоскости xz).

Ответ: $\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$, $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$, $\varepsilon_y = \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta$.

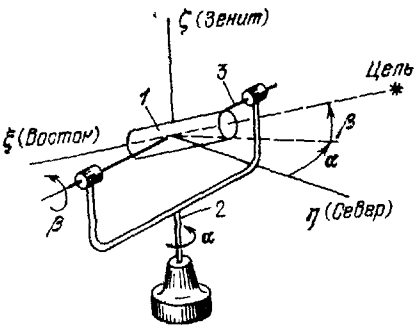
6.7. В условиях предыдущей задачи вычислить скорость точки A волчка с координатами $x = z = 10$ см, $y = 0$, если $\dot{\varphi} = 30$ рад/с, $\dot{\psi} = 3$ рад/с, $\theta = 30°$.

Ответ: $v_x = 0$, $v_y = 140$ см/с, $v_z = 0$.

6.8. В условиях задачи 6.6 вычислить ускорение точки A волчка в момент, когда координаты точки равны $x = y = 0$, $z = 20$ см.

Ответ: $a_x = 96$ м/с^2, $a_y = 0$, $a_z = -45$ м/с^2.

6.9. Оптический визир *1* установлен в кардановом подвесе, наружная ось *2* которого вертикальна, а внутренняя *3* горизонтальна; оптическая ось визира горизонтальна и направлена на Север. При наведении визира на цель пришлось повернуть его вокруг вертикальной оси на угол $\alpha = 45°$, а вокруг горизонтальной — на угол $\beta = 60°$.



К задаче 6.9.

Вычислить углы, образуемые линией визирования с осями ξ, η, ζ, направленными соответственно на Восток, Север и в Зенит (трехгранник Дарбу, ориентированный географически).

Ответ: углы, образуемые с осями ζ, η, ξ, соответственно равны: 110°40′, 69°20′, 30°.

6.10. В условиях предыдущей задачи получить формулы, определяющие скорость цели по измеряемым текущим значениям углов α, β и расстоянию R до цели.

Ответ: проекции скорости цели на оси трехгранника Дарбу равны:

$$v_\xi = R(\dot{\beta}\sin\alpha\sin\beta - \dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta) - \dot{R}\sin\alpha\cos\beta,$$

$$v_\eta = -R(\dot{\beta}\cos\alpha\sin\beta + \dot{\alpha}\sin\alpha\cos\beta) + \dot{R}\cos\alpha\cos\beta,$$

$$v_\zeta = R\dot{\beta}\cos\beta + \dot{R}\sin\beta.$$

6.11. Визир, установленный в пункте с широтой φ, следит за подвижной целью.

Получить формулы, позволяющие вычислить абсолютную угловую скорость визира по измеряемым углам наведения α и β. (Здесь под абсолютной угловой скоростью подразумевается скорость вращения в инерциальной системе отсчета.)

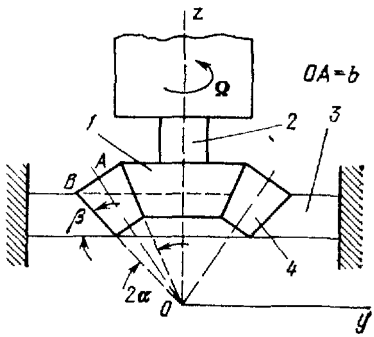
Ответ: $\omega_\xi = \dot\beta\cos\alpha$, $\omega_\eta = \dot\beta\sin\alpha + U\cos\varphi$, $\omega_\zeta = \dot\alpha + U\sin\varphi$, где U — угловая скорость Земли.

6.12. Самолет совершает горизонтальный полет курсом 45° со скоростью $v = 800$ км/ч, качка отсутствует. (При горизонтальном полете курс самолета — это угол между вектором скорости самолета и направлением на Север.)

Вычислить абсолютную угловую скорость ω самолета в момент пересечения им параллели 80° (ω — угловая скорость в инерциальной системе отсчета). Выразить ω в дуговых минутах в минуту времени ($'$/мин).

Ответ: проекции абсолютной угловой скорости на оси трехгранника Дарбу равны $\omega_\xi = -5{,}1'$/мин, $\omega_\eta = -7{,}7'$/мин, $\omega_\zeta = 43{,}5'$/мин.

6.13. Конический роликовый подшипник состоит из внутреннего кольца *1*, насаженного на ось ротора *2*, наружного кольца *3* и нескольких конических роликов *4*.



К задаче 6.13.

При указанных на рисунке размерах определить угловую скорость и угловое ускорение ролика, если он катится без проскальзывания, а угловая скорость ротора постоянна и равна Ω.

Ответ: $\omega = \dfrac{\cos(\beta+2\alpha)}{\sin 2\alpha}\Omega$, $\varepsilon = \dfrac{\cos(\beta+2\alpha)\cos\beta}{2\cos\alpha\cos(\beta+\alpha)}\Omega^2$.

6.14. Вычислить угловое ускорение ролика (см. задачу 6.13) при переменной угловой скорости ротора Ω; ось ротора принять лежащей в плоскости yoz.

Ответ: проекции вектора углового ускорения на оси координат равны $\varepsilon_x = \dfrac{\cos(\beta+2\alpha)\cos\beta}{2\cos\alpha\cos(\beta+\alpha)}\Omega^2$, $\varepsilon_y = \dfrac{\cos(\beta+2\alpha)}{\sin 2\alpha}\cos\beta\dfrac{d\Omega}{dt}$, $\varepsilon_z = -\dfrac{\cos(\beta+2\alpha)}{\sin 2\alpha}\sin\beta\dfrac{d\Omega}{dt}$.

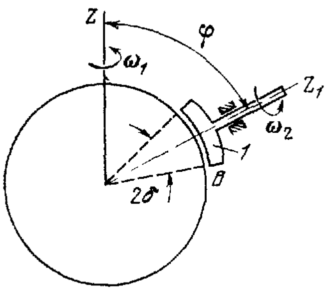
6.15. В условиях задачи 6.13 определить скорость точки A ролика и ускорение точки B касания его с наружным кольцом.

Ответ: $v_{Ax} = \omega b\sin\alpha$, $v_{Ay} = v_{Az} = 0$, $a_{Bx} = 0$, $a_{By} = \varepsilon\dfrac{b}{\cos\alpha}\times\sin\beta$, $a_{Bz} = \varepsilon\dfrac{b}{\cos\alpha}\cos\beta$, ω и ε указаны в ответе к задаче 6.13.

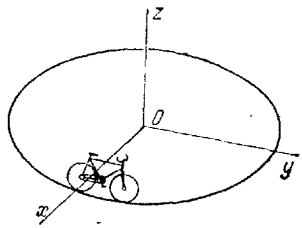
6.16. Для точной доводки поверхности детали, имеющей форму шара, ее обрабатывают (притирают) с помощью инструмента *1*, представляющего собой чашу, внутренняя поверхность которой концентрична обрабатываемой сфере и прилегает к ней. Шар и инструмент вращают — первый вокруг оси Z с угловой скоростью ω_1, второй вокруг оси Z_1 с угловой скоростью ω_2; оси Z и Z_1 пересекаются в центре шара.

Вычислить наибольшую и наименьшую скорости, с которыми точки инструмента движутся относительно поверхности шара, если радиус шара $R = 10$ см, $\varphi = 60°$, $2\delta = 40°$, $\omega_2 = 5{,}25$ рад/с, $\omega_1 = 1{,}04$ рад/с.

Ответ: Наибольшую скорость имеет точка B, наиболее удаленная от мгновенной оси относительного вращения; эта ось наклонна к оси Z под углом $51°03'$. Скорость скольжения (относительная скорость) точки B направлена перпендикулярно плоскости осей Z и Z_1 от читателя и равна 28,5 см/с. Наименьшую скорость скольжения, равную нулю, имеет точка инструмента, лежащая на мгновенной оси относительного вращения.



К задаче 6.16.



К задаче 6.17.

6.17. Велосипедист движется по круговой дорожке трека с постоянной скоростью v.

Каковы при этом угловая скорость и угловое ускорение колеса велосипеда? Радиус трека R, радиус колеса r; принять, что во время движения плоскость колеса остается вертикальной и оно катится без проскальзывания.

Ответ: $\omega = v\dfrac{\sqrt{R^2 + r^2}}{Rr}$, $\varepsilon = \dfrac{v^2}{Rr}$.

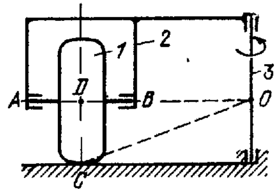
6.18. Определить в предыдущей задаче угловое ускорение колеса во время разгона велосипедиста, когда скорость его изменяется по закону $v = at$ ($a = \mathrm{const}$).

Ответ: проекции углового ускорения на оси x, y, z равны: $\varepsilon_x = a/r$, $\varepsilon_y = v^2/(Rr)$, $\varepsilon_z = -a/r$ (ось z вертикальна и проходит через центр траектории, ось x проходит через центр колеса).

6.19. Колесо *1* насажено на горизонтальную ось AB, укрепленную в вилке *2*, вращающейся вокруг вертикальной оси *3*. При этом колесо катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания, касаясь ее одной точкой C.

Показать, что в каждый момент времени на колесе имеются точки, скорости которых противоположны скорости центра колеса; указать расположение этих точек.

Ответ: эти точки расположены ниже линии OC.

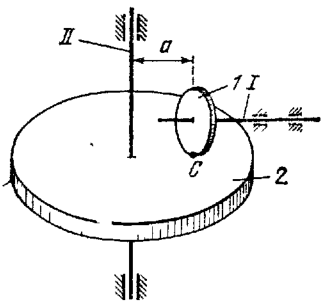


К задаче 6.19.

6.20. В условиях предыдущей задачи определить модуль и направление ускорения центра колеса и точки касания его с плоскостью, если $OD = 4$ м, радиус колеса 1 м, угловая скорость вилки 2 постоянна и равна 0,3 рад/с.

Ответ: ускорение центра колеса равно 0,36 м/с^2 и направлено к точке O; ускорение точки касания C равно 1,48 м/с^2 и направлено перпендикулярно линии OC вверх.

6.21. Передача вращения от вала I к валу II с переменным передаточным числом осуществляется с помощью фрикционной пары дисков 1 и 2, насаженных на эти валы.



К задаче 6.21.

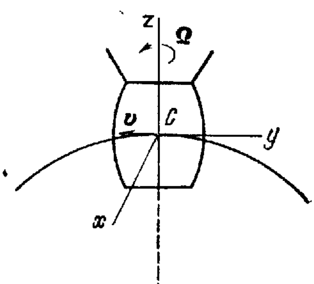
Приняв, что диски касаются в одной точке, проскальзывание отсутствует, угловая скорость ведущего диска равна $\omega = \text{const}$, его радиус равен r, определить угловую скорость и угловое ускорение ведущего диска относительно системы отсчета, связанной с ведомым диском.

Ответ: $\omega_{\text{отн}} = \omega\sqrt{r^2 + a^2}/a$, $\varepsilon_{\text{отн}} = \omega^2 r/a$.

6.22. В условиях предыдущей задачи указать те точки ведущего диска, скорость которых относительно ведомого диска равна нулю, если $a = 9$ см, $r = 3\sqrt{3}$ см.

Ответ: такими точками являются те, которые расположены на мгновенной оси относительного вращения; эта ось проходит через точку касания дисков C и наклонена к валу I под углом 30°.

6.23. Центр масс C космической станции движется по круговой орбите вокруг Земли с первой космической скоростью $v = \sqrt{gR}$, где R — радиус Земли. Ось симметрии станции остается всё время направленной к центру Земли. Одновременно с этим станция вращается вокруг оси симметрии, делая два оборота в минуту.



К задаче 6.23.

Вычислить угловую скорость и угловое ускорение станции в проекциях на оси орбитальной системы координат. (Орбитальная система координат — сопровождающий станцию ортогональный трехгранник, ось z которого направлена к центру Земли, а ось y — по касательной к траектории.)

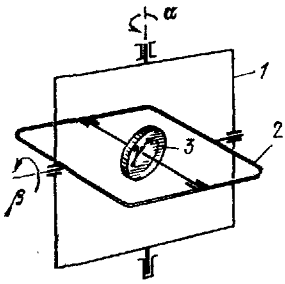
Ответ: $\omega_x = 1{,}24 \cdot 10^{-3}$ рад/с, $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0{,}21$ рад/с, $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$, $\varepsilon_y = 0{,}26 \cdot 10^{-3}$ рад/с^2.

6.24. Вычислить абсолютные ускорения точек A и B станции, описанной в предыдущей задаче, если координаты этих точек в орбитальной системе равны: $x_A = 100$ м, $y_A = 0$, $z_A = 20$ м; $x_B = 0$, $y_B = 100$ м, $z_B = 20$ м.

Ответ: для точки $A: a_x = -4{,}4$ м/с^2, $a_y = 0$, $a_z \approx -g$; для точки $B: a_x = 0$, $a_y = -4{,}4$ м/с^2, $a_z \approx -g$.

6.25. Получить формулы, определяющие ускорение любой точки станции, совершающей описанное в задаче 6.23 движение, обозначив угловую скорость вращения станции вокруг оси z через Ω.

Ответ: $a_x = -\Omega^2 x$, $a_y = -(\nu^2 + \Omega^2) y$, $a_z = 2\Omega\nu x - \nu^2 z - g$, где x, y, z — координаты точки в орбитальной системе, $\nu = \sqrt{g/R}$.



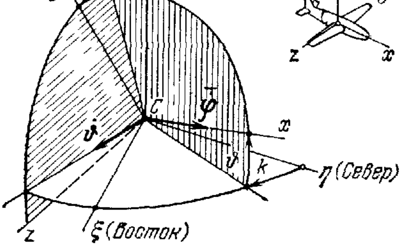
К задаче 6.26.

6.26. На рисунке изображен гироскоп в кардановом подвесе. Положение ротора относительно основания прибора может быть определено с помощью трех следующих углов: α — угол поворота наружной рамки 1 относительно основания, β — угол поворота внутренней рамки 2 относительно наружной, γ — угол поворота ротора 3 относительно внутренней рамки.

Получить выражение абсолютной угловой скорости ротора через эти углы, полагая основание неподвижным.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 + \dot\gamma^2 + 2\dot\alpha\dot\gamma \sin\beta}$ (если β отсчитывать от положения, при котором ось ротора перпендикулярна оси наружной рамки).

§ 2. Пространственная ориентация



К задаче 6.27.

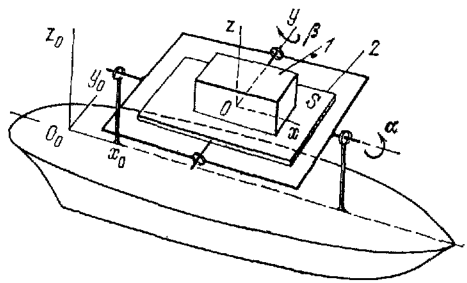
6.27. Для задания пространственной ориентации самолета с ним обычно связывают прямоугольную систему координат $Cxyz$, начало которой — точка C — совпадает с центром масс самолета, ось x — с продольной осью самолета, а ось y располагается в плоскости его симметрии. Ориентацию этих осей, а следовательно, и самолета, с которым они связаны, относительно трехгранника Дарбу (см. задачу 6.9) задают тремя следующими углами: k — курс самолета, ϑ — угол тангажа, φ — угол крена (*направление отсчета этих углов показано на рисунке*).

Выразить через эти углы направляющие косинусы самолетных осей относительно осей трехгранника Дарбу.

Ответ:

	x	y	z
ξ	$\sin k \cos\vartheta$	$\cos k \sin\varphi - \sin k \sin\vartheta \cos\varphi$	$\cos k \cos\varphi + \sin k \sin\varphi \sin\vartheta$
η	$\cos k \cos\vartheta$	$-\sin k \sin\varphi - \sin\vartheta \cos k \cos\varphi$	$\sin\vartheta \sin\varphi \cos k - \sin k \cos\varphi$
ζ	$\sin\vartheta$	$\cos\vartheta \cos\varphi$	$-\sin\varphi \cos\vartheta$

6.28. Гирогоризонт представляет собой специальное гироскопическое устройство *1* (на рисунке оно условно изображено в виде параллелепипеда), установленное на внутренней рамке *2* карданова подвеса и действующее таким образом, что плоскость S этой рамки сохраняет горизонтальное положение при любых качаниях корабля; наружная ось подвеса параллельна продольной оси корабля. При этом угол α поворота наружной рамки относительно корабля и угол β поворота внутренней рамки относительно наружной служат мерой бортовой и килевой качки корабля. С внутренней рамкой (площадкой S) связали трехгранник $Oxyz$ (ось y совпадает с осью внутренней рамки, ось z перпендикулярна площадке S), а с кораблем — трехгранник $O_0x_0y_0z_0$ (ось x_0 параллельна продольной оси корабля, ось z_0 перпендикулярна палубе).



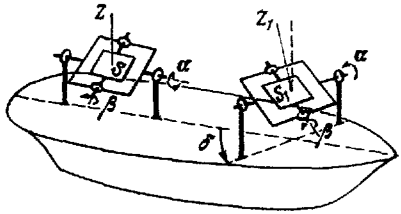
К задаче 6.28.

Найти выражения направляющих косинусов осей x_0, y_0, z_0 относительно осей x, y, z через углы качки корабля.

Ответ:

	x	y	z
x_0	$\cos\beta$	0	$\sin\beta$
y_0	$\sin\alpha \sin\beta$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha \cos\beta$
z_0	$-\sin\beta \cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha \cos\beta$

6.29. Пользуясь одним гирогоризонтом (см. предыдущую задачу), создают искусственные горизонтальные площадки в различных точках корабля. Чтобы получить подобную площадку, достаточно подвесить ее в такой же карданов подвес, как у гирогоризонта, и, получая от него информацию, поворачивать площадку S_1 относительно корабля на те же углы α и β, на которые повернута площадка S гирогоризонта. Допустим, что вследствие неточности начальной выставки наружная ось подвеса площадки S_1 отклонена от одноименной оси гирогоризонта на малый угол δ, оставаясь параллельной палубе.



К задаче 6 29

Какова в этом случае ошибка стабилизации (т. е. отклонение от горизонта) площадки S_1?

Указание Составив таблицы направляющих косинусов осей z и z_1 (нормалей площадок S и S_1) относительно осей корабля, сравните их между собой.

Ответ: в таблице приведены направляющие косинусы осей z и z_1 относительно осей корабля. В третьей строке указаны разности соответствующих косинусов, вычисленные с точностью до малых второго порядка относительно угла δ.

	x_0	y_0	z_0
z	$\sin\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$
z_1	$\cos\delta\sin\beta+\sin\delta\sin\alpha\cos\beta$	$\sin\delta\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\cos\delta$	$\cos\alpha\cos\beta$
	$\frac{\delta^2}{2}\sin\beta-\delta\sin\alpha\cos\beta$	$-\frac{\delta^2}{2}\sin\alpha\cos\beta-\delta\sin\beta$	0

Глава 7

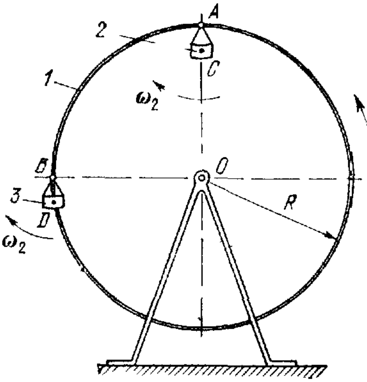
СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 1. Движение точки при заданных переносном и относительном ее движениях

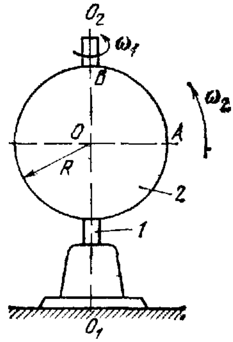
7.1. Колесо обозрения *1* радиуса $R=12$ м вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1=0{,}2$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Кабины *2* и *3* шарнирно прикреплены к ободу и поворачиваются по отношению к колесу с постоянными угловыми скоростями $\omega_2=$ $=0{,}2$ рад/с.

Определить абсолютные скорости и ускорения точек C и D, находящихся на вертикалях, проходящих соответственно через точки A и B, если $AC = BD = 2$ м.

Ответ: $v_C = v_D = 2{,}4$ м/с, $a_C = a_D = 0{,}48$ м/с².



К задаче 7.1.



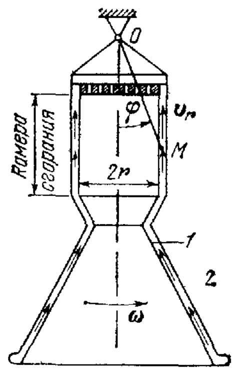
К задаче 7.2.

7.2. Вал 1 вращается вокруг вертикальной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с. К валу в точке O прикреплена горизонтально расположенная ось, вокруг которой равномерно вращается диск 2 радиуса $R = 15$ см.

Определить абсолютные скорости и ускорения точек A и B диска, если $\omega_1 = \omega_2$.

Ответ: $v_A = 42{,}43$ см/с, $a_A = 120$ см/с², $v_B = 30$ см/с, $a_B = 134{,}2$ см/с².

7.3. Для охлаждения жидкостного ракетного двигателя один из компонентов жидкого топлива прокачивается через полость, заключенную между внутренней 1 и наружной 2 стенками двигателя.



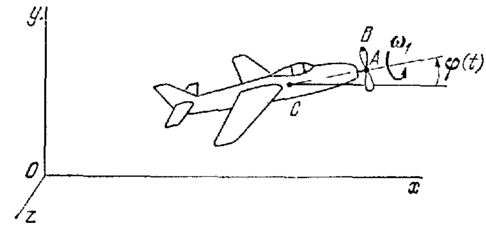
К задаче 7.3.

Полагая, что поток жидкости, охлаждающей камеру сгорания двигателя, одномерный и его скорость v_r относительно стенок камеры постоянна по модулю, определить абсолютное ускорение частицы M жидкости как функцию угла φ. Двигатель вращается вокруг оси, проходящей через точку O, перпендикулярно плоскости рисунка с постоянной угловой скоростью ω. Радиус цилиндрической обечайки камеры сгорания r, величиной зазора между внутренней и наружной стенками двигателя по сравнению с r пренебречь.

Ответ: $a_M = \omega\sqrt{(\omega r + 2v_r)^2 + \omega^2 r^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}$.

7.4. Движение корпуса самолета в вертикальной плоскости Oxy, проходящей через точку C (центр масс самолета), описывается уравнениями: $x_C = 50t$ м, $y_C = 10t^2$ м, $\varphi = \frac{\pi}{6}t$ рад (φ — угол поворота корпуса самолета в плоскости Oxy вокруг точки C). Винт самолета вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 120\pi$ рад/с.

Для момента времени $t = 1$ с определить скорость и ускорение точки B винта по отношению к корпусу самолета, переносную скорость и переносное ускорение этой точки, а также ускорение Кориолиса $a_к$. Считать, что при $t = 1$ с точка B находится в плоскости Oxy, $AB = 0{,}4$ м, $AC = 2$ м.

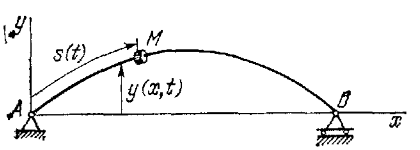


К задаче 7.4.

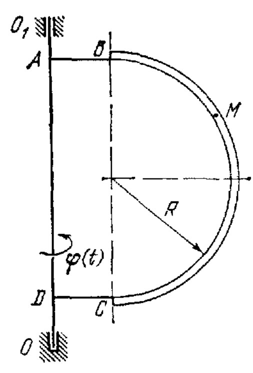
Ответ: $v_B^r = 150{,}8$ м/с, $a_B^r = 56\,850$ м/с^2, $v_B^e = 94{,}26$ м/с, $a_B^e = 79{,}63$ м/с^2, $a_к = 0$.

7.5. По однородному шарнирно опертому стержню AB длины $l = 100$ см, изгибные колебания которого описываются уравнением $y(x, t) = A_0 \cos \omega_1 t \sin \frac{\pi x}{l}$ см, скользит кольцо M по закону $\breve{AM} = s(t) = v_0 t$ см.

Определить скорость и ускорение кольца относительно стержня, скорость и ускорение кольца в переносном движении и ускорение Кориолиса в тот момент времени, когда $\breve{AM} = l/5$, если $A_0 = 4$ см, $\omega_1 = \pi/6$ рад/с, $v_0 = 10$ см/с. Векторы скоростей и ускорений показать на рисунке.



К задаче 7.5.



К задаче 7.6.

Ответ: $a_M^r = 0{,}08$ см/с^2, $v_M^r = 10$ см/с, $a_M^e = 0{,}32$ см/с^2, $v_M^e = 1{,}07$ см/с, $a_к = 0{,}92$ см/с^2.

7.6. По трубке BC, изогнутой по дуге окружности радиуса $R = 6$ см и вращающейся вокруг неподвижной оси OO_1 по закону $\varphi(t) = t(5-t)$ рад, движется точка M. Уравнение движения точки M относительно трубки $BM = \pi t^2$ см.

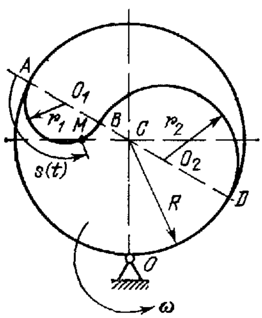
Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 2$ с, если $AB = CD = 4$ см.

Ответ: $v_M = 15{,}57$ см/с, $a_M = 47{,}46$ см/с^2.

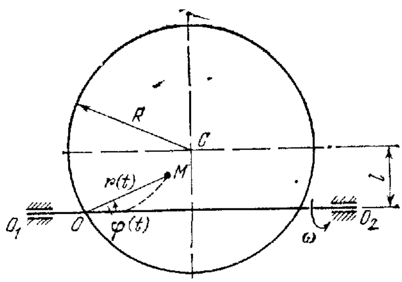
7.7. По поверхности диска радиуса $R = 6$ см, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, движется точка M. Траектория точки M на поверхности диска образована двумя полуокружностями радиусов $r_1 = 2$ см и $r_2 = 4$ см с центрами в точках O_1 и O_2. Дуговая координата точки M при движении ее относительно диска изменяется во времени по закону $\overset{\smile}{AM} = s(t) = 2\pi t^2$ см.

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 1$ с, если $\angle OCD = 60°$.

Ответ: $v_M = 9{,}17$ см/с, $a_M = 21{,}44$ см/с^2.



К задаче 7.7.



К задаче 7.8.

7.8. Диск радиуса $R = 8{,}16$ см вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с вокруг оси O_1O_2. По поверхности диска движется точка M. Уравнения ее движения относительно диска имеют вид: $OM = r(t) = 3e^t$ см, $\varphi(t) = \frac{\pi}{6} t$ рад.

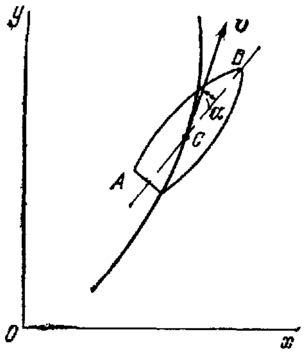
Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 1$ с, если $l = 4{,}08$ см. Считать $e = 2{,}72$.

Ответ: $v_M = 12{,}3$ см/с, $a_M = 31{,}69$ см/с^2.

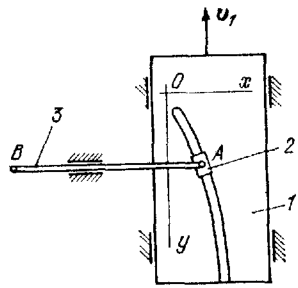
7.9. Катер пересекает реку так, что его центр масс — точка C — движется по кривой $y = kx^{3/2} - b$ (ось x направлена вдоль берега) с постоянной скоростью $v = 9$ км/ч, вектор которой образует постоянный угол $\alpha = 30°$ с продольной осью катера. Пассажир движется вдоль катера по прямой AB от точки A к B с постоянной относительно катера скоростью $u = 0{,}5$ м/с.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение пассажира в тот момент, когда он находится в точке C катера, а точка C удалена от берега на расстояние $y = 400$ м. Коэффициенты k и b равны: $k = 0{,}5$ м$^{-0,5}$; $b = 100$ м.

Ответ: $v = 2{,}94$ м/с; $a = 0{,}74 \cdot 10^{-3}$ м/с^2.



К задаче 7.9.



К задаче 7.10.

7.10. В механизме копировального станка копир *1*, скользя в неподвижных направляющих со скоростью $v_1 = 2t$ см/с, приводит в движение ползун *2* и шарнирно соединенный с ним горизонтальный шток *3*.

Определить скорость и ускорение точки B штока *3* в момент времени $t = 1$ с, если ползун A в системе координат Oxy, связанной с копиром, описывает траекторию $y_A = (x_A - 2)^2$ см и в указанный момент времени его координата $x_A = 3$ см.

Ответ: $v_B = 1$ см/с, $a_B = 0$.

7.11. Полагая в задаче 7.10, что движение ползуна *2* в декартовой системе координат Oxy, связанной с копиром *1*, описывается уравнениями $x_A(t) = 2 + t$ см, $y_A(t) = t^2$ см, определить скорость и ускорение точки B штока *3* в момент времени $t = 1$ с.

Ответ: $v_B = 1$ см/с, $a_B = 0$.

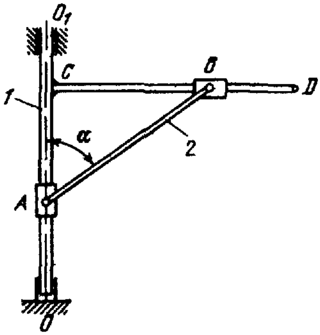
7.12. Вал *1* с жестко прикрепленным к нему стержнем CD вращается вокруг оси OO_1 с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с. По валу OO_1 и стержню CD движутся муфты A и B, шарнирно соединенные со стержнем *2* длины 1 м. Муфта A движется по валу OO_1 вверх с постоянной скоростью $v_A = 0{,}2$ м/с.

Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня *2* в относительном (по отношению к валу OO_1) движении, абсолютные скорость и ускорение муфты B, если $\alpha = 60°$.

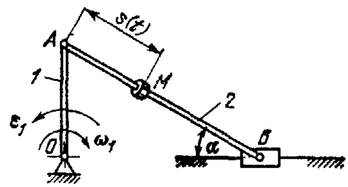
Ответ: $\omega_2 = 0{,}23$ рад/с, $\varepsilon_2 = 0{,}03$ рад/с^2, $v_B = 1{,}74$ м/с, $a_B = 3{,}56$ м/с^2.

7.13. По шатуну *2* кривошипно-ползунного механизма скользит кольцо M по закону $AM = s(t) = 10t^2$ см.

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение кольца в момент времени $t = 2$ с, если $\omega_1 = 1$ рад/с, $\varepsilon_1 = 3$ рад/с^2, $\alpha = 30°$, $\angle AOB = 90°$, $OA = 40$ см.



К задаче 7.12.



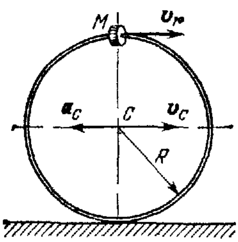
К задаче 7.13.

Ответ: $v_M = 77{,}27$ см/с, $a_M = 95{,}94$ см/с^2.

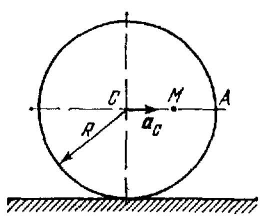
7.14. Кольцо M скользит с постоянной по величине относительной скоростью $v_r = 2$ м/с по обручу радиуса $R = 0{,}5$ м, который катится без скольжения по прямолинейному желобу.

Для показанного на рисунке положения системы определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение кольца, полагая $v_C = 4$ м/с и $a_C = 1$ м/с^2, где C — центр обруча.

Ответ: $v_M = 10$ м/с, $a_M = 72{,}03$ м/с^2.



К задаче 7.14.



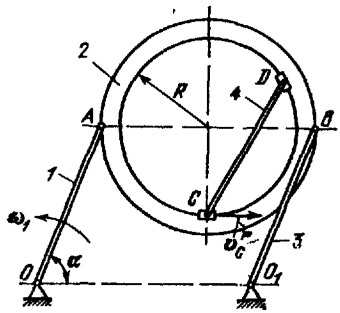
К задаче 7.15.

7.15. По рельсу катится без скольжения колесо радиуса $R = 2$ м, причем центр колеса имеет постоянное ускорение $a_C = 0{,}5$ м/с^2. Одновременно вдоль радиуса CA колеса от его центра к ободу движется точка M по закону $CM = s(t) = 0{,}25t^2$ м.

Определить абсолютное ускорение точки M в тот момент времени, когда $CM = R/2$, а радиус CA горизонтален (как это показано на рисунке). В начальный момент времени ($t = 0$) колесо находилось в покое.

Ответ: $a_M = 1{,}46$ м/с^2.

7.16. Кольцо *2*, внутренний радиус которого $R = 5$ см, в точках A и B шарнирно прикреплено к равным по длине кривошипам *1* и *3*. Кривошипы вращаются вокруг параллельных осей, проходящих через точки O и O_1 перпендикулярно плоскости рисунка. По внутренней образующей кольца скользят ползуны C и D, соединенные линейкой CD длины $5\sqrt{3}$ см. Скорость ползуна C по отношению к кольцу постоянна по величине и равна 10 см/с.



К задаче 7.16.

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение ползуна D для положения механизма, показанного на рисунке, если $\alpha = 60°$, $OO_1 = AB$, $\omega_1 = 2$ рад/с $=$ const, $OA = 10$ см.

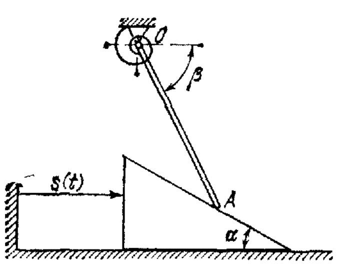
Ответ: $v_D = 29{,}09$ см/с, $a_D = 58{,}19$ см/с^2.

§ 2. Движение точки при известной траектории ее абсолютного движения

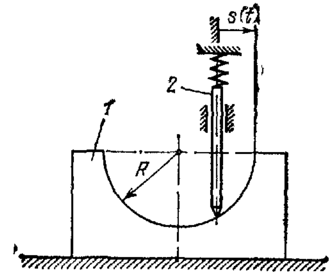
7.17. Призма движется поступательно и прямолинейно по горизонтальной плоскости по закону $s(t) = 2t(5 - t)$ см. К наклонной грани призмы прижимается концом A с помощью спиральной пружины рычаг длиной 20 см, который вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка.

Определить угловую скорость и угловое ускорение рычага в момент времени $t = 1$ с, если в этот момент времени $\beta = 60°$, а угол α равен 30°.

Ответ: $\omega = 0{,}17$ рад/с, $\varepsilon = 0{,}13$ рад/с^2.



К задаче 7.17.



К задаче 7.18.

7.18. Призма *1*, двигаясь поступательно и прямолинейно по горизонтальной плоскости, приводит в движение шток *2*, который помещен в вертикальные направляющие и с помощью пружины прижимается нижним концом к поверхности цилиндрической выемки призмы радиуса $R = 12$ см. Уравнение движения призмы $s(t) = 12\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}t\right)$ см.

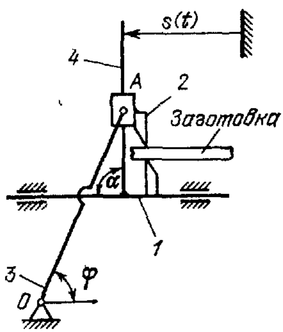
Определить абсолютные скорость и ускорение штока, а также его скорость и ускорение относительно призмы в момент времени $t = 2$ с.

Ответ: $v=\pi$ см/с, $a=0{,}29\pi^2$ см/с^2, $v_r=2\pi$ см/с, $a_r=0{,}33\pi^2$ см/с^2.

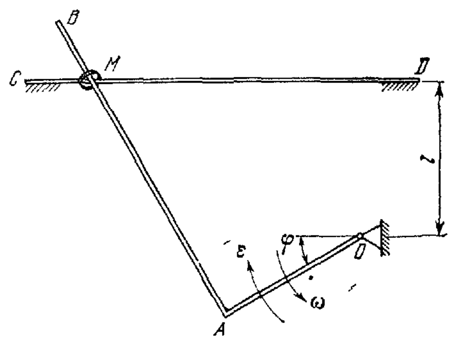
7.19. В механизме для резания листового металла («летучие ножницы») стол *1* движется в неподвижных направляющих по закону $s(t) = 20\sin\frac{\pi}{3}t$ см. Ползун *A* с ножом *2*, шарнирно прикрепленный к кривошипу *3* длины 60 см, скользит по направляющей *4*, которая жестко связана со столом *1* ($\alpha = 90°$).

Определить скорость и ускорение ножа *2* относительно стола, угловую скорость и угловое ускорение кривошипа *3* при $t = 1$ с, если в этот момент времени $\varphi = 60°$.

Ответ: $v_2^r = 6{,}05$ см/с, $a_2^r = 13{,}78$ см/с^2, $\omega_3 = 0{,}2$ рад/с, $\varepsilon_3 = 0{,}39$ рад/см^2.



К задаче 7.19.



К задаче 7 20.

7.20. Стержень *OAB*, изогнутый в точке *A* под прямым углом, вращаясь вокруг оси, проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение кольцо *M*, надетое на этот стержень и на неподвижный стержень *CD*.

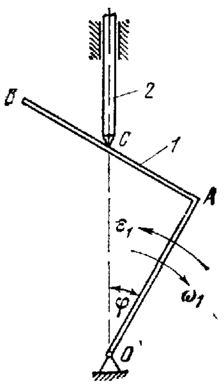
Определить абсолютные скорость и ускорение кольца *M*, а также скорость и ускорение кольца *M* относительно стержня *OAB*, если $\omega = 2$ рад/с, $\varepsilon = 1$ рад/с^2, $OA = l = 40$ см, $\varphi = 30°$.

Ответ: $v_M^r = 160$ см/с, $a_M^r = 474{,}3$ см/с^2, $v_M = 160$ см/с, $a_M = 474{,}3$ см/с^2.

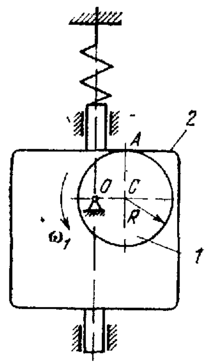
7.21. В «секансном» механизме кривошип *1* (изогнутый под прямым углом стержень *OAB*) вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости рисунка и приводит в движение толкатель *2*, который скользит в направляющих.

Определить скорость и ускорение толкателя *2*, а также скорость и ускорение точки *C* толкателя относительно кривошипа в тот момент времени, когда $\varphi = 30°$, $\omega_1 = 1{,}5$ рад/с, $\varepsilon_1 = 2$ рад/с², $OA = 10\sqrt{3}$ см.

Ответ: $v_2 = 17{,}32$ см/с, $a_2 = 51{,}9$ см/с², $v_C^r = 34{,}64$ см/с, $a_C^r = 13{,}81$ см/с².



К задаче 7.21.



К задаче 7.22.

7.22. В механизме пресса кулачок *1*, представляющий собой диск радиуса $R = 4$ см, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 0{,}2$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости рисунка, и приводит в движение ползун *2*, который скользит в направляющих.

Для показанного на рисунке положения механизма определить скорость и ускорение ползуна, если $OC = 3$ см и отрезок OC горизонтален.

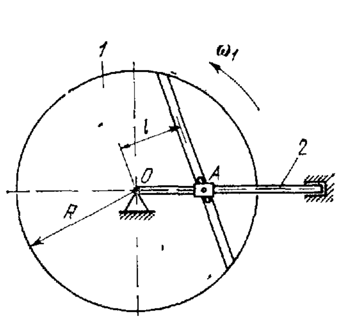
Ответ: $v_2 = 0{,}6$ см/с, $a_2 = 0$.

7.23. Диск *1* радиуса $R = 40$ см, вращаясь с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение два шарнирно соединенных между собой ползуна. Один из ползунов скользит вдоль паза, расположенного на диске на расстоянии $l = R/2$ от оси диска, а второй — вдоль неподвижного стержня *2*.

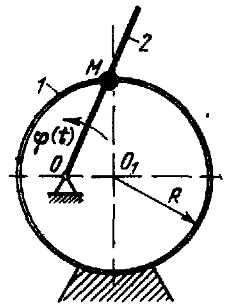
Определить скорости и ускорения точки *A*, расположенной на оси шарнира ползунов, относительно диска *1* и относительно стержня *2* в тот момент времени, когда точка *A* достигнет конца паза.

Ответ: $v_A^r = 160$ см/с, $a_A^r = 1109$ см/с², $v_A = 138{,}6$ см/с, $a_A = 1120$ см/с²

7.24. На неподвижный проволочный обруч *1* радиуса $R = 4$ см надето кольцо M, через которое проходит стержень *2*. Стержень *2* вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка по закону $\varphi(t) = 7t - 5t^2 + t^3$ рад, $OO_1 = 3$ см.



К задаче 7.23.



К задаче 7.24.

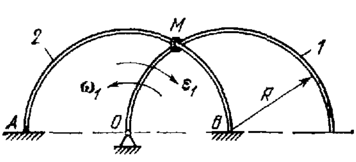
Для момента времени $t = 2$ с и положения механизма, показанного на рисунке, определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение кольца M.

Ответ: $v = 6{,}25$ см/с, $a = 14{,}3$ см/с^2.

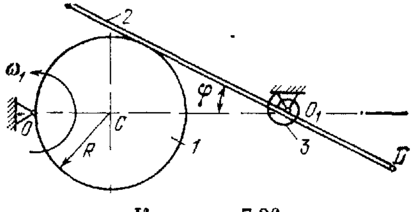
7.25. Стержень *1*, изогнутый по дуге окружности радиуса $R = 20$ см, вращаясь вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение кольцо M. Кольцо M одновременно надето на этот стержень и на неподвижный стержень *2*, изогнутый по дуге окружности того же радиуса, что и стержень *1*. Точка O совпадает с центром кривизны стержня *2*.

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение кольца M, а также его скорость и ускорение по отношению к стержню *1* в тот момент времени, когда центр кривизны стержня *1* совпадает с точкой B и $\omega_1 = 0{,}5$ рад/с, $\varepsilon_1 = 0{,}2$ рад/с^2.

Ответ: $v_M = 10$ см/с, $a_M = 6{,}4$ см/с^2, $v_M^r = 0$, $a_M^r = 0$.



К задаче 7.25.



К задаче 7.26.

7.26. Диск *1* радиуса $R = 4\sqrt{3}$ см, вращаясь вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 1{,}5$ рад/с, приводит в движение стержень *2*, который прижимается к диску спиральной пружиной *3*. Стержень вращается вокруг оси, проходящей через точку O_1 параллельно оси вращения диска.

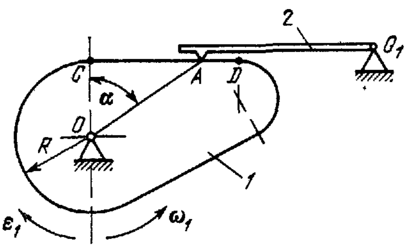
Определить скорость и ускорение точки D для положения механизма, показанного на рисунке, если $\varphi = 30°$, $O_1D = 4$ см.

Ответ: $v_D = 3$ см/с, $a_D = 4{,}48$ см/с^2.

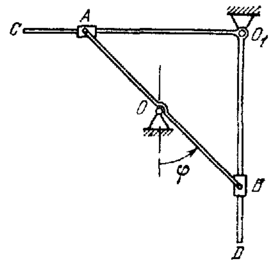
7.27. Кулачок *1*, вращаясь вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение толкатель *2*, который соприкасается с кулачком в точке A.

Для показанного на рисунке положения механизма, при котором толкатель *2* и сторона CD кулачка горизонтальны, определить угловую скорость и угловое ускорение толкателя, а также ускорение точки A относительно кулачка, если $\omega_1 = 1$ рад/с, $\varepsilon_1 = 3$ рад/с^2, $R = 2$ см, $O_1A = 4\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$.

Ответ: $\omega_2 = 0{,}5$ рад/с, $\varepsilon_2 = 1{,}21$ рад/с^2, $a_A^r = 0{,}8$ см/с^2.



К задаче 7.27.



К задаче 7.28.

7.28. В обращенном эллиптическом циркуле кривошип AB длины 60 см ($OA = OB$) вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Ползуны A и B, шарнирно соединенные с кривошипом, приводят во вращение вокруг оси, параллельной оси вращения кривошипа и проходящей через точку O_1, стержень CO_1D, изогнутый под прямым углом.

Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня CO_1D в момент времени $t = 1$ с, если угол поворота кривошипа AB $\varphi = \frac{\pi}{4} t^2$ рад.

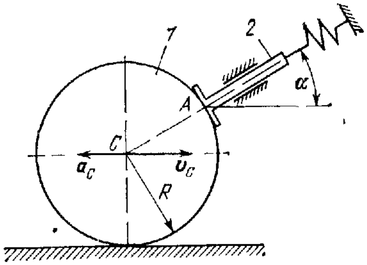
Ответ: $\omega = \pi/4$ рад/с, $\varepsilon = \pi/4$ рад/с^2.

7.29. Толкатель *2* скользит во втулке, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту под действием диска *1* радиуса $R = 4$ см, который катится без скольжения по горизонтальной плоскости.

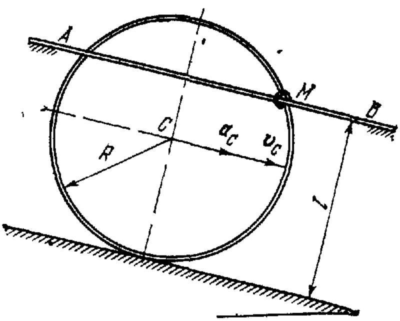
Для показанного на рисунке положения механизма (точки A и C находятся на оси толкателя) определить скорость и ускорение толкателя, если $v_C = 12$ см/с, $a_C = 4$ см/с^2.

Ответ: $v_2 = 10{,}39$ см/с, $a_2 = 12{,}46$ см/с^2.

7.30. Обруч радиуса $R = 0{,}5$ м, скатываясь без скольжения по наклонной плоскости, приводит в движение кольцо M, надетое на обруч и неподвижный стержень AB. Стержень AB параллелен линии наибольшего ската наклонной плоскости.



К задаче 7.29.



К задаче 7.30.

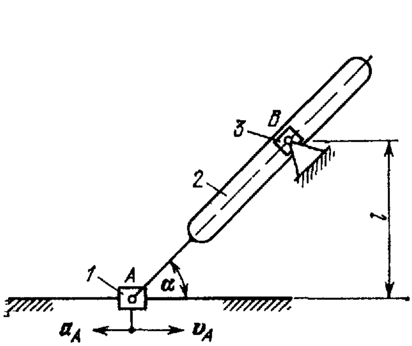
Определить абсолютные скорость и ускорение кольца для положения механизма, показанного на рисунке, если $v_C = 2$ м/с, $a_C = 2$ м/с^2, $l = 0{,}75$ м.

Ответ: $v_M = 2$ м/с, $a_M = 2$ м/с^2.

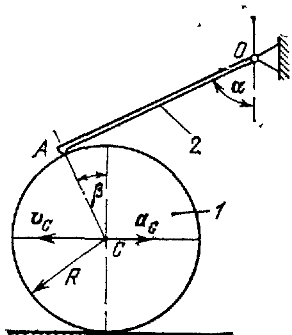
7.31. В кулисно-ползунном механизме ползун *1*, скользя вдоль направляющей, приводит в движение кулису *2*, камень *3* которой вращается вокруг оси, проходящей через точку B перпендикулярно плоскости рисунка.

Для показанного на рисунке положения механизма определить угловую скорость и угловое ускорение кулисы *2*, скорость и ускорение точки B относительно кулисы *2*, если $\alpha = 45°$, $l = 6$ см, $v_A = 6$ см/с, $a_A = 4$ см/с^2.

Ответ: $\omega_2 = 0{,}5$ рад/с, $\varepsilon_2 = 1/6$ рад/с^2, $v_B^r = 4{,}24$ см/с, $a_B^r = 4{,}95$ см/с^2.



К задаче 7.31.



К задаче 7.32.

7.32. Диск *1* радиуса $R = 0{,}2$ м катится без скольжения по плоскости и приводит во вращение вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, стержень *2* длины 0,4 м, который соприкасается с диском в точке A.

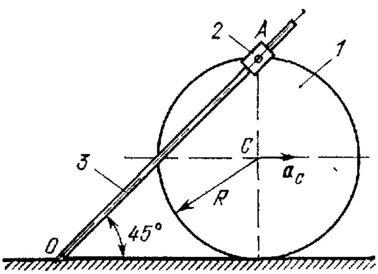
Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня *2*, если $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $v_C = 0{,}8$ м/с, $a_C = 0{,}2$ м/с^2.

Ответ: $\omega_2 = 1$ рад/с, $\varepsilon_2 = 6{,}15$ рад/с^2.

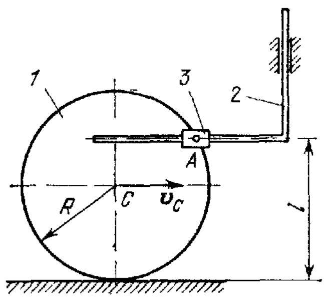
7.33. По рельсу катится без скольжения колесо *1* радиуса $R = 1$ м. Ускорение центра колеса $a_C = 0{,}5$ м/с^2 = const. К ободу колеса в точке A шарнирно прикреплен ползун *2*, который скользит по стержню *3*, вращающемуся вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка.

Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня *3* для показанного на рисунке положения механизма, которое соответствует моменту времени $t = 2$ с после начала движения. В начальный момент времени ($t = 0$) колесо находилось в покое.

Ответ: $\omega_3 = 0{,}5$ рад/с, $\varepsilon_3 = 0$.



К задаче 7.33.



К задаче 7.34.

7.34. Диск *1* радиуса $R = 0{,}4$ м катится без скольжения по плоскости и при помощи ползуна *3*, шарнирно прикрепленного к ободу диска в точке A, приводит в движение изогнутый под прямым углом стержень *2*. Стержень *2* скользит в направляющих. Скорость центра диска постоянна и равна $v_C = 0{,}8$ м/с.

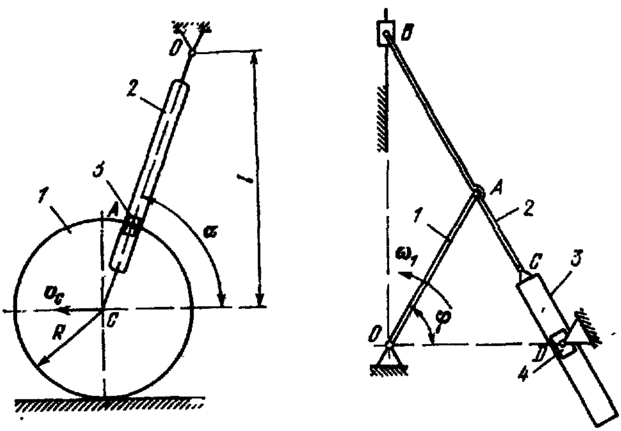
Определить скорость и ускорение стержня *2*, а также ускорение точки A относительно стержня *2* в показанном на рисунке положении механизма, если $l = 0{,}6$ м.

Ответ: $v_2 = 0{,}69$ м/с, $a_2 = 0{,}8$ м/с^2, $a_A^r = 1{,}38$ м/с^2.

7.35. В механизме с качающейся кулисой диск *1* радиуса $R = 0{,}1$ м катится без скольжения по направляющей и при помощи ползуна *3*, шарнирно прикрепленного к ободу диска в точке A, приводит в движение кулису *2*. Скорость центра диска постоянна, $v_C = 0{,}2$ м/с. Кулиса вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка.

Определить угловую скорость и угловое ускорение кулисы, а также ускорение точки A относительно кулисы, если $\alpha = 60°$, точки O, A и C находятся на одной прямой, а $l = 0{,}2\sqrt{3}$ м.

Ответ: $\omega_2 = 1{,}24$ рад/с, $\varepsilon_2 = 0{,}83$ рад/с^2, $a_A^r = 0{,}86$ м/с^2.



К задаче 7.35. К задаче 7.36.

7.36. В механизме с качающейся кулисой кривошип *1* длины 12 см вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с. К шатуну *2* в точке C шарнирно прикреплена кулиса *3*, камень *4* которой вращается вокруг оси, проходящей через точку D параллельно оси вращения кривошипа OA.

Определить угловые скорости шатуна *2* и кулисы *3*, скорость точки D по отношению к кулисе *3* для показанного на рисунке положения механизма, если $\varphi = 60°$, точки A, C и D находятся на одной прямой, $OA = AB = OD = 12$ см, $AC = 6$ см.

Ответ: $\omega_2 = 2$ рад/с, $\omega_3 = 4$ рад/с, $v_D^r = 20{,}78$ см/с.

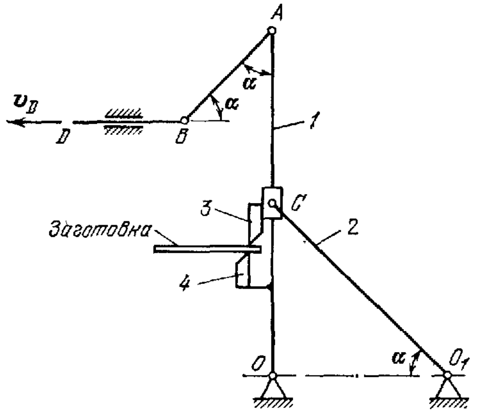
7.37. Используя условия задачи 7.36, определить угловые ускорения шатуна *2* и кулисы *3*, а также ускорение точки D по отношению к кулисе, если при $\varphi = 60°$ кулиса *3* вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_3 = 4$ рад/с, скорость точки D по отношению к кулисе $v_D^r = 20{,}78$ см/с и вектор этой скорости направлен от точки D вниз по кулисе.

Ответ: $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 20{,}79$ рад/с^2, $a_D^r = 96$ см/с^2.

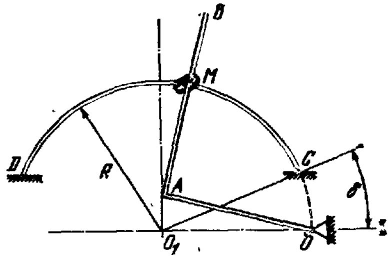
7.38. Механизм для резания листового металла («летучие ножницы») приводится в движение штоком BD, скользящим в направляющих. При этом кривошипы *1* и *2* вращаются вокруг осей, проходящих перпендикулярно плоскости рисунка через точки O и O_1 соответственно.

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение ножа *3*, а также скорость и ускорение ножа *3* относительно ножа *4* в момент соприкосновения ножей с металлом. Считать, что в этот момент времени $\alpha = 45°$, $\angle O_1OC = 90°$, $v_D = 2$ м/с, $a_D = 0$, $OO_1 = 0{,}5$ м, $OA = 1$ м.

Ответ: $v_3 = 1{,}41$ м/с, $a_3 = 6{,}32$ м/с^2, $v_3^r = 1$ м/с, $a_3^r = 4$ м/с^2.



К задаче 7.38.



К задаче 7.39.

7.39. Стержень OAB, изогнутый в точке A под прямым углом, вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка и приводит в движение кольцо M, надетое на неподвижный стержень CD, представляющий собой дугу окружности радиуса R. Стержни расположены в одной плоскости.

Определить абсолютные скорость и ускорение кольца M, а также его скорость и ускорение относительно стержня OAB в момент времени, когда точка A совпадает с точкой O_1, полагая, что в этот момент времени стержень OAB вращается против часовой стрелки замедленно и $\omega_1 = 2$ рад/с, $\varepsilon_1 = 2$ рад/с^2, $OA = R = 40\sqrt{2}$ см.

Ответ: $v_M = 113{,}1$ см/с, $a_M = 253$ см/с^2, $v_M^r = 113{,}1$ см/с, $a_M^r = 113{,}1$ см/с^2.

7.40. В системе, описанной в задаче 7.39, кольцо M движется по неподвижному стержню CD по закону $CM(t) = \frac{\pi R}{3} \sin \frac{\pi}{2} t$ см и приводит во вращение стержень OAB.

Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня OAB в момент времени $t = 1$ с, если $OA = R$, $\delta = 30°$.

Ответ: $\omega = 0$, $\varepsilon = \frac{\pi^3}{12} \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

7.41. Для системы, описанной в задаче 7.39, определить абсолютные скорость и ускорение кольца M, угловую скорость и угловое ускорение стержня OAB в момент времени $t=1$ с, если $AM(t)=10\left(1-\cos\frac{\pi}{2}t\right)$ см и $OA=R=10$ см.

Ответ: $v_M=5\pi$ см/с, $a_M=3{,}54\ \pi^2$ см/с^2, $\omega=0{,}5\pi$ рад/с; $\varepsilon=0$.

7.42. Движение точек A и B на плоскости описывается в декартовой системе координат Oxy уравнениями

$$x_A(t)=e^{1-t}\text{ см},\quad y_A(t)=2e^{1-t}\text{ см};$$
$$x_B(t)=t+5\text{ см},\ y_B(t)=t^3+1\text{ см}.$$

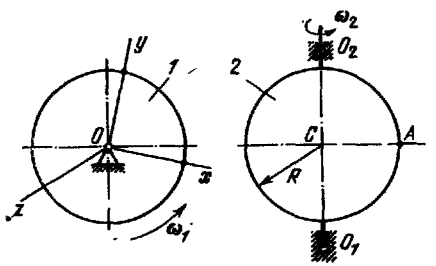
Определить скорость и ускорение точки A по отношению к точке B в момент времени $t=1$ с.

Ответ: $v_A^r=5{,}38$ см/с, $a_A^r=4{,}12$ см/с^2.

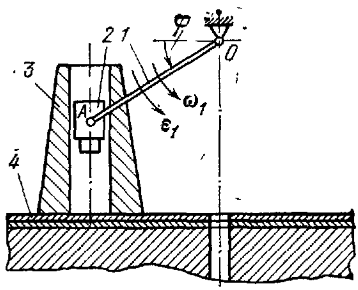
7.43. Диск *1* вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1=1$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, а диск *2* радиуса $R=5$ см — вокруг оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью $\omega_2=2$ рад/с. Расстояние между осями вращения дисков $OC=25$ см.

Для положения системы, при котором плоскости дисков совпадают, определить скорость и ускорение точки A диска *2* по отношению к системе координат $Oxyz$, связанной с диском *1*. Точка A находится на прямой OC (C — центр диска *2*).

Ответ: $v_A^r=31{,}62$ см/с, $a_A^r=50$ см/с^2.



К задаче 7.43.



К задаче 7.44.

7.44. В кривошипно-кулисном механизме штампа кривошип *1*, вращаясь вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение ползун *2* с пуансоном. Ползун *2* движется внутри прямолинейной кулисы *3*, перемещая ее по направляющей *4*.

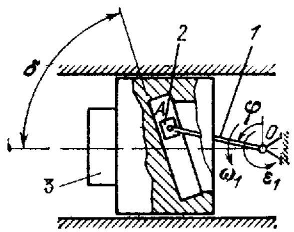
Определить скорость и ускорение кулисы относительно направляющей, а также скорость и ускорение ползуна относительно кулисы в момент времени, когда $\varphi=45°$, $\omega_1=2$ рад/с, $\varepsilon_1=4$ рад/с^2, $OA=25$ см.

Ответ: $v_3=35{,}36$ см/с, $a_3=141{,}4$ см/с^2, $v_2^r=35{,}36$ см/с, $a_2^r=0$.

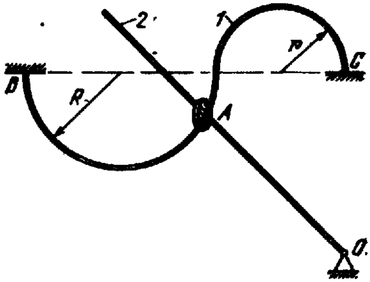
7.45. В кривошипно-кулисном механизме высадочного пресса кривошип *1*, вращаясь вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение камень *2*, который скользит по наклонному пазу пуансона *3*. Пуансон движется в неподвижных направляющих.

Определить скорость и ускорение пуансона относительно направляющих, если $\omega_1 = 2$ рад/с, $\varepsilon_1 = 1$ рад/с², $\varphi = 60°$, $OA = 20$ см, $\delta = 60°$.

Ответ: $v_3 = 40$ см/с, $a_3 = 26{,}19$ см/с².



К задаче 7.45.



К задаче 7.46.

7.46. Кольцо A скользит по неподвижному стержню *1*, изогнутому по дугам двух полуокружностей, и приводит во вращение вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, стержень *2*. Движение кольца A по стержню *1* описывается уравнением $\overset{\frown}{BA} = s(t) = 30\pi t^2$ см.

Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня *2*, а также ускорение кольца A относительно стержня *2* в момент времени $t = 1$ с, если $R = 30$ см, $r = 20$ см, $OC = 40\sqrt{3}$ см.

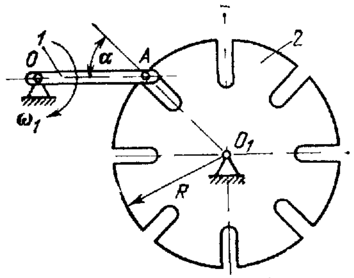
Ответ: $\omega_2 = 1{,}18$ рад/с, $\varepsilon_2 = 3{,}63$ рад/с², $a_A^r = 274{,}3$ см/с².

7.47. В мальтийском механизме кривошип *1* вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \sqrt{2}$ рад/с. Палец A, неподвижно прикрепленный к кривошипу, скользит вдоль паза диска *2* радиуса R и приводит его во вращение вокруг оси, проходящей через точку O_1 параллельно оси вращения кривошипа.

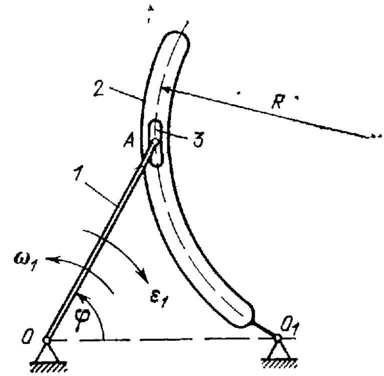
Для показанного на рисунке положения механизма определить угловую скорость и угловое ускорение диска *2*, а также ускорение пальца относительно диска, если $OA = R = 20$ см, $\alpha = 45°$.

Ответ: $\omega_2 = 1$ рад/с, $\varepsilon_2 = 3{,}4$ рад/с², $a_A^r = 48{,}2$ см/с².

7.48. Кривошип *1* длины 20 см вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, и при помощи ползуна *3*, шарнирно прикрепленного к кривошипу в точке A, приводит в движение криволинейную кулису *2*. Кулиса, изогнутая по дуге окружности радиуса $R = 20$ см, вращается вокруг оси, проходящей через точку O_1 параллельно оси вращения кривошипа.



К задаче 7.47.

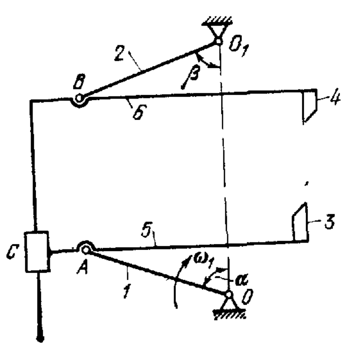


К задаче 7.48.

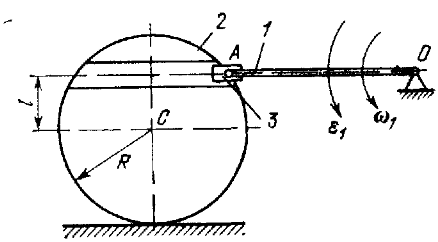
Определить угловую скорость и угловое ускорение кулисы, а также скорость и ускорение точки A относительно кулисы, если $\varphi = 60°$, $\omega_1 = 0{,}1$ рад/с, $\varepsilon_1 = 0{,}2$ рад/с^2, $OO_1 = OA$.

Ответ: $\omega_2 = 0{,}1$ рад/с, $\varepsilon_2 = 0{,}2$ рад/с^2, $v_A^r = 2$ см/с, $a_A^r \approx (a_A^r)_\tau = 4$ см/с^2.

7.49. В механизме ножниц кривошипы *1* и *2* одинаковой длины $l = 40$ см вращаются вокруг осей, проходящих через точки O и O_1 перпендикулярно плоскости рисунка. Они приводят в поступательное движение рычаги *5* и *6*, к которым прикреплены ножи *3* и *4*.



К задаче 7.49.



К задаче 7.50.

Определить скорость и ускорение ножа *4* относительно ножа *3* (скорость и ускорение резания) при $\alpha = \beta = 60°$, если $\omega_1 = 1$ рад/с $=$ const.

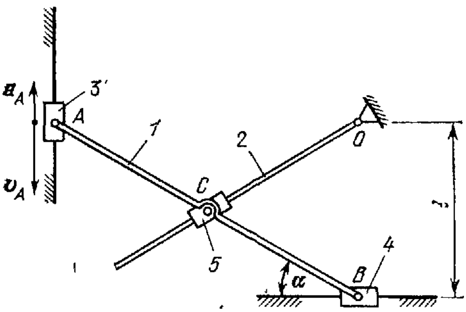
Ответ: $v_4^r = 69{,}29$ см/с, $a_4^r = 40$ см/с^2.

7.50. Кривошип *1* длины 30 см вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, и при помощи ползуна *3*, который шарнирно прикреплен к кривошипу *1* в точке A, приводит в движение диск *2* радиуса $R = 20$ см. Ползун скользит вдоль паза в диске на расстоянии $l = 10$ см от центра диска. Диск *2* катится без скольжения по плоскости.

Определить угловую скорость, угловое ускорение диска *2* и ускорение ползуна относительно диска в показанном на рисунке положении механизма, если $\omega_1 = 0{,}2$ рад/с, $\varepsilon_1 = 0{,}1$ рад/с^2.

Ответ: $\omega_2 = 0{,}35$ рад/с, $\varepsilon_2 = 0{,}52$ рад/с^2, $a_A^r = 12{,}3$ см/с^2.

7.51. Ползун *3*, прикрепленный в точке A к линейке *1* длины 0,4 м с помощью шарнира, скользит вдоль направляющей. В точке C к линейке прикреплена шарнирно муфта *5*, через которую проходит стержень *2*, вращающийся вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка.



К задаче 7.51.

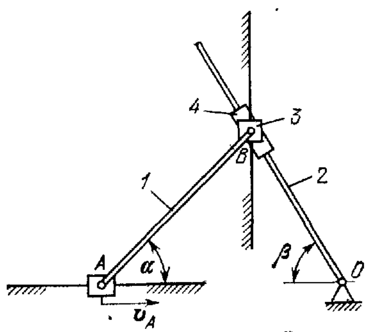
Для положения механизма, показанного на рисунке, определить угловую скорость и угловое ускорение стержня *2*, скорость и ускорение точки C по отношению к стержню *2*, если $\alpha = 30°$, $AC = BC$, точка B находится на одной вертикали с точкой O, $l = 0{,}2$ м, $v_A = 0{,}6$ м/с, $a_A = 0{,}2$ м/с^2.

Ответ: $\omega_2 = 1{,}73$ рад/с, $\varepsilon_2 = 2{,}31$ рад/с^2, $a_C^r = 1{,}2$ м/с^2, $v_C^r = 0$.

7.52. Для положения механизма, показанного на рисунке к задаче 7.51, определить скорость и ускорение точки C стержня *2* по отношению к стержню *1*, если $\alpha = 30°$, точки O и B находятся на одной вертикали, $l = 0{,}2$ м и стержень *2* вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью $\omega_2 = 2$ рад/с против часовой стрелки.

Ответ: $v_C^r = 0$, $a_C^r = 1{,}6$ м/с^2.

7.53. Ползун A, прикрепленный шарнирно к концу линейки AB длины $20\sqrt{2}$ см, движется вдоль горизонтальной направляющей с постоянной скоростью $v_A = 60$ см/с. В точке B к линейке шарнирно прикреплены ползун *3*, движущийся вдоль вертикальной направляющей, и муфта *4*, которая скользит по стержню *2*. Стержень *2* вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка.



К задаче 7.53.

Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня 2, а также скорость и ускорение точки B по отношению к стержню 2 для положения механизма, показанного на рисунке, если $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.

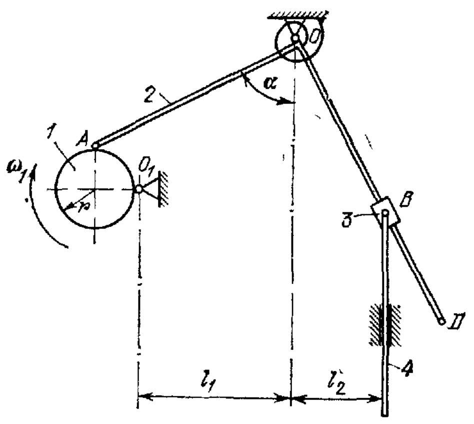
Ответ: $\omega_2 = 1{,}3$ рад/с, $\varepsilon_2 = 13{,}6$ рад/с^2, $v_B^r = 51{,}96$ см/с, $a_B^r = 272{,}8$ см/с^2.

§ 3. Смешанные задачи

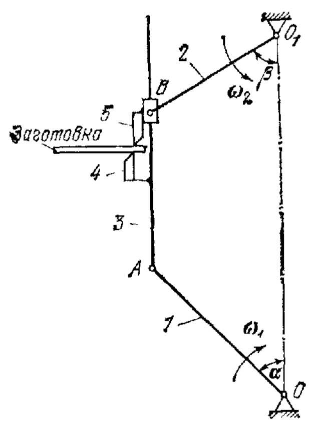
7.54. Кулачок 1 радиуса $r = 2$ см, вращаясь с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение изогнутый под прямым углом рычаг AOD. Рычаг AOD вращается вокруг оси, проходящей через точку O параллельно оси вращения кулачка, и с помощью муфты 3, соединенной шарнирно со стержнем 4 в точке B, приводит в поступательное движение стержень 4.

Определить угловую скорость и угловое ускорение рычага 2, ускорение точки A относительно кулачка 1, а также абсолютную скорость и абсолютное ускорение стержня 4, если $\alpha = 60°$, $l_1 = 4$ см, $l_2 = 3$ см.

Ответ: $\omega_2 = 0{,}67$ рад/с, $\varepsilon_2 = 0{,}7$ рад/с^2, $a_A^r = 20{,}12$ см/с^2, $v_4 = 8$ см/с; $a_4 = 10{,}08$ см/с^2.



К задаче 7.54.



К задаче 7.55.

7.55. Режущий механизм ножниц приводится в движение кривошипами 1 и 2, которые вращаются вокруг осей, проходящих перпендикулярно плоскости рисунка через точки O и O_1 соответственно.

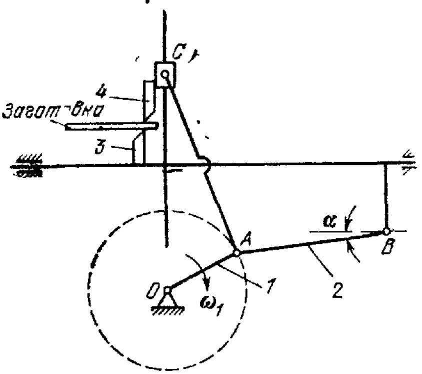
Определить скорость и ускорение ножа *5* относительно ножа *4* в момент соприкосновения ножей с заготовкой, считая, что в этот момент времени $\omega_1 = 1$ рад/с, $\varepsilon_1 = 0$, $\omega_2 = 2$ рад/с, $\varepsilon_2 = 0$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $AB = 50$ см и стержень *3* вертикален, $OA = 60$ см.

Ответ: $v_5^r = 127{,}3$ см/с, $a_5^r = 141{,}3$ см/с^2.

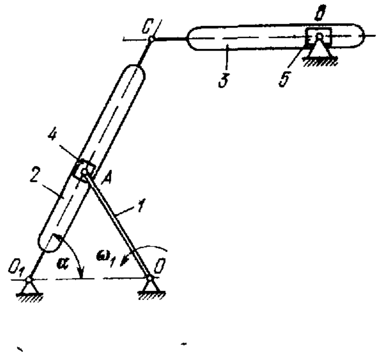
7.56. В механизме для разрезания листового металла («летучие ножницы») кривошип *1* вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_1 = 1$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка.

Определить абсолютные скорости ножей *3* и *4*, а также скорость ножа *4* относительно ножа *3* в момент их соприкосновения с металлом, если в этот момент времени $\angle OAB = 150°$, $\angle OAC = 90°$, угол между стержнем *2* и горизонталью $\alpha = 30°$, а точки O и C находятся на одной вертикали. Длина кривошипа *1* равна 20 см, $AB = 40$ см, $AC = 50$ см.

Ответ: $v_3 = 11{,}56$ см/с, $v_4 = 23{,}08$ см/с, $v_4^r = 20$ см/с.



К задаче 7.56.



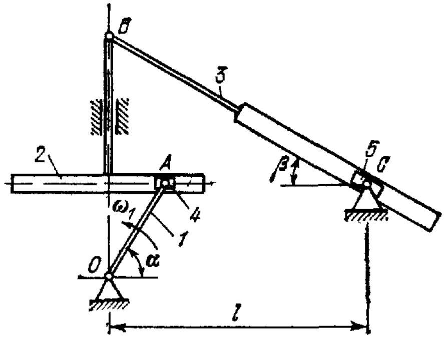
К задаче 7.57.

7.57. В кривошипном механизме с двумя кулисами кривошип *1* длины 20 см вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка и при помощи камня *4* приводит во вращение вокруг оси, которая проходит через точку O_1, кулису *2*. С кулисой *2* в точке C шарнирно соединена кулиса *3*, камень *5* которой вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку B. Оси вращения кулисы *2* и камня *5* параллельны оси вращения кривошипа OA.

Определить угловые скорости и угловые ускорения обеих кулис, а также ускорение точки B по отношению к кулисе *3*, если $\alpha = 60°$, $BC = 75$ см, $OO_1 = OA$, $O_1C = 60$ см, $\omega_1 = 0{,}5$ рад/с $=$ const.

Ответ: $\omega_2 = 0{,}25$ рад/с, $\varepsilon_2 = 0$, $\omega_3 = 0{,}1$ рад/с, $\varepsilon_3 = 0{,}078$ рад/с^2, $a_B^r = 2{,}63$ см/с^2.

7.58. В двойном кулисном механизме кривошип OA длины 10 см вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 1$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, и при помощи камня 4 приводит в движение кулису 2. Кулиса 2 в точке B шарнирно соединена с кулисой 3, камень 5 которой вращается вокруг оси, проходящей через точку C параллельно оси вращения кривошипа 1.

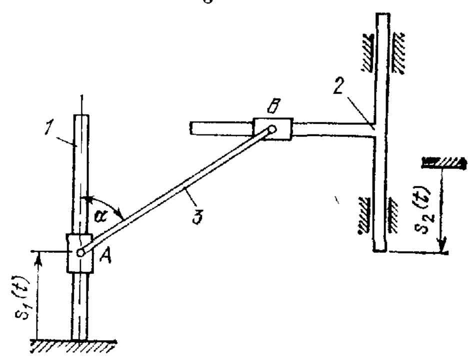


К задаче 7.58.

Определить угловую скорость и угловое ускорение кулисы 3, а также скорость и ускорение точки C по отношению к этой кулисе для положения механизма, показанного на рисунке, если $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $l = 50$ см.

Ответ: $\omega_3 = 0{,}075$ рад/с, $\varepsilon_3 = 0{,}14$ рад/с^2, $v_C^r = 2{,}5$ см/с, $a_C^r = 4$ см/с^2.

7.59. По неподвижной вертикальной стойке 1 скользит ползун A по закону $s_1(t) = 20t^2$ см. К ползуну A шарнирно прикреплен стержень AB длины 32 см. Другой конец стержня шарнирно связан с ползуном B, который скользит по горизонтальной полке уголка 2. Уголок движется в вертикальных направляющих по закону $s_2(t) = 10 \sin \frac{\pi}{3} t$ см.



К задаче 7.59.

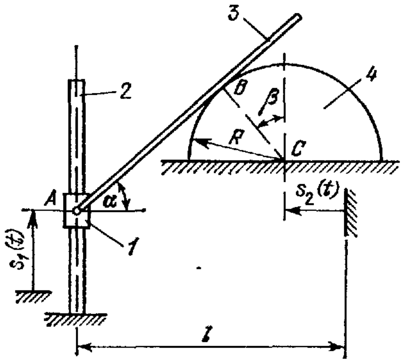
Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня 3, а также ускорение ползуна B относительно уголка 2 при $t = 1$ с, если в этот момент времени $\alpha = 45°$.

Ответ: $\omega_3 = 2$ рад/с, $\varepsilon_3 = 2{,}65$ рад/с^2, $a_B^r = 150{,}5$ см/с^2.

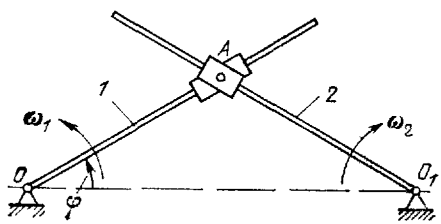
7.60. По неподвижной вертикальной стойке *2* скользит втулка *1* по закону $s_1(t) = t^3$ см. К втулке в точке A шарнирно прикреплен стержень *3*, который соприкасается в точке B с ползуном *4*, представляющим собой полуцилиндр радиуса $R = 4\sqrt{2}$ см. Ползун скользит по горизонтальной плоскости по закону $s_2(t) = 2\sin\frac{\pi}{2}t$ см.

Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня *3* в момент времени $t = 1$ с, если $\alpha = \beta = 45°$, а $l = 16$ см.

Ответ: $\omega_3 = 0{,}15$ рад/с, $\varepsilon_3 = 0{,}59$ рад/с^2.



К задаче 7.60.



К задаче 7.61.

7.61. В механизме, схема которого показана на рисунке, кривошипы *1* и *2*, вращаясь с постоянными угловыми скоростями $\omega_1 = 0{,}2$ рад/с, и $\omega_2 = 0{,}15$ рад/с вокруг параллельных осей, проходящих через точки O и O_1 перпендикулярно плоскости рисунка, приводят в движение шарнирно соединенные между собой в точке A ползуны. Один из ползунов скользит по кривошипу *1*, а другой — по кривошипу *2*.

Определить скорость и ускорение точки A для положения механизма, показанного на рисунке, если $OA = O_1A = 20$ см и $\varphi = 30°$.

Ответ: $v_A = 4{,}16$ см/с, $a_A = 0{,}86$ см/с^2.

7.62. В механизме, изображенном на рисунке к задаче 7.61, кривошип *1* вращается по закону $\varphi(t) = \frac{\pi}{6}t^2$ рад, а ползун скользит по этому кривошипу так, что $OA = s(t) = 2(6 + \cos \pi t)$ см.

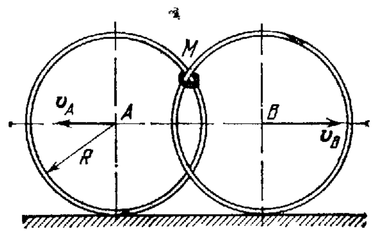
Определить угловую скорость и угловое ускорение кривошипа *2* в момент времени $t = 1$ с, если в этот момент времени $\angle OAO_1 = 90°$.

Ответ: $\omega_2 = 0$, $\varepsilon_2 = 1{,}52$ рад/с^2.

7.63. Два обруча одинакового радиуса $R = 10$ см катятся без скольжения по направляющей в противоположные стороны. Скорости центров обручей постоянны, $v_A = 5$ см/с, $v_B = 20$ см/с.

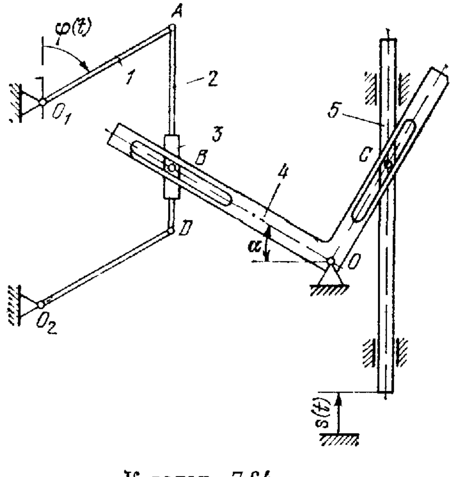
Определить скорости и ускорения кольца M, надетого на оба обруча, по отношению к каждому из обручей, а также абсолютную скорость и абсолютное ускорение этого кольца для положения системы, при котором $\angle MAB = 30°$.

Ответ: $v_{r_1} = 30$ см/с, $v_{r_2} = 45$ см/с, $a_{r_1} = 140,8$ см/с^2, $a_{r_2} = 229,6$ см/с^2, $v_M = 22,91$ см/с, $a_M = 124,8$ см/с^2.



К задаче 7.63.

7.64. В комплексном механизме кривошип 1 длины 30 см вращается вокруг оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости рисунка по закону $\varphi(t) = \frac{\pi}{3} t$ рад. По спарнику 2 ($O_1A = O_2D$) скользит муфта 3, палец B которой входит в паз



К задаче 7.64.

качающейся кулисы 4, изогнутой под прямым углом. В другой паз кулисы 4 входит палец C ползуна 5, скользящего в направляющих по закону $s(t) = 20t^2$ см.

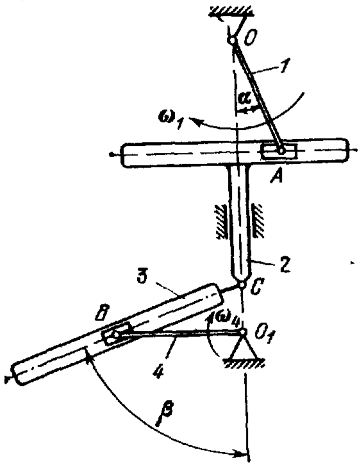
Определить угловую скорость кулисы, скорость пальца B по отношению к кулисе (v_{r_4}) и скорость пальца B относительно спарника (v_{r_2}) при $t = 1$ с, если в этот момент времени $\alpha = 30°$, $OB = 80$ см, $OC = 50$ см.

Ответ: $\omega_4 = 0,4$ рад/с, $v_{r_2} = 18,81$ см/с, $v_{r_4} = 36,6$ см/с.

7.65. Используя условия задачи 7.64, определить в момент времени $t = 1$ с угловое ускорение кулисы 4, ускорения пальца B относительно кулисы $4(a_{r_4})$ и относительно спарника $2(a_{r_2})$.

Полагать, что в этот момент времени кулиса поворачивается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_4 = 0{,}4$ рад/с, палец C относительно кулисы движется от точки O со скоростью, равной по величине 34,65 см/с, а палец B относительно кулисы движется к точке O со скоростью $v_{r4} = 36{,}6$ см/с.

Ответ: $\varepsilon_4 = 0{,}15$ рад/с², $a_{r_2} = 80{,}92$ см/с², $a_{r_4} = 69{,}71$ см/с².



К задаче 7.66.

7.66. В двойном кривошипно-кулисном механизме кривошипы *1* и *4* вращаются вокруг осей, проходящих соответственно через точки O и O_1 перпендикулярно плоскости рисунка, с постоянными по величине угловыми скоростями $\omega_1 = \omega_4 = 0{,}2$ рад/с.

Определить угловую скорость и угловое ускорение кулисы *3*, а также скорость и ускорение ползуна B относительно кулисы *3*, если $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, кривошип *4* горизонтален, $OA = 10$ см, $O_1B = 20$ см.

Ответ: $\omega_3 = 0{,}19$ рад/с, $\varepsilon_3 = 0{,}0103$ рад/с², $v_B^r = 2{,}5$ см/с, $a_B^r = 0{,}29$ см/с².

Раздел третий

ДИНАМИКА

Глава 8

ДИНАМИКА ТОЧКИ

§ 1. Движение точки в инерциальной системе отсчета

8.1. Материальная точка массы m начинает двигаться из состояния покоя под действием силы $\mathbf{F}(t)$ постоянного направления. Величина этой силы $F(t) = a - bt$, где $a = \text{const} > 0$ и $b = \text{const} > 0$.

Определить время и пройденное точкой расстояние до смены направления движения.

Ответ: $t_1 = \frac{2a}{b}$, $s(t_1) = \frac{2a}{3m}\left(\frac{a}{b}\right)^2$.

8.2. Материальная точка массы m начинает двигаться из состояния покоя под действием силы, изменяющейся во времени по закону

$$F(t) = \begin{cases} a - bt & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant a/b \\ 0 \quad \text{при} & \qquad t > a/b, \end{cases}$$

где $a = \text{const} > 0$ и $b = \text{const} > 0$.

Полагая, что сила $\mathbf{F}(t)$ не меняет своего направления, найти уравнения движения точки.

Ответ: $x = \frac{(3a - bt)\,t^2}{6m}$ при $t \leqslant \frac{a}{b}$, $x = \frac{a^2}{2mb}\left(t - \frac{a}{3b}\right)$ при $t > \frac{a}{b}$.

8.3. Деталь (материальная точка) массы m лежит на горизонтальной плите. Коэффициент трения скольжения для пары деталь — плита равен f. В некоторый момент времени ($t = 0$) неподвижную деталь начинают обдувать однородным потоком воздуха, вектор скорости которого направлен под постоянным углом α к горизонту, а модуль этого вектора изменяется во времени по закону $v_п = 2{,}5\sqrt{2} \cdot t$ м/с. Воздушный поток воздействует на деталь с силой $\mathbf{R} = \mu \mathbf{v}_r$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}_r$ — скорость потока относительно детали.

Определить время начала движения детали и зависимость скорости детали от времени, если $m = 0{,}1$ кг, $f = 0{,}2$, $\alpha = 45^\circ$, $\mu = 0{,}1$ Н · с/м, $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $t_1 = 1$ с, $v(t) = 2[t + e^{(1-t)} - 2]$ м/с.

8.4. Тело массы m падает без начальной скорости на Землю, преодолевая сопротивление воздуха. Сила сопротивления пропорциональна скорости тела. Коэффициент пропорциональности равен μ ($\mu = \text{const} > 0$).

Полагая поле сил тяжести однородным, определить предельную (максимальную) скорость падения тела.

Ответ: $v_{\text{пр}} = mg/\mu$.

8.5. Лодка массы m, получив начальную скорость $\mathbf{v}_0$, движется поступательно и прямолинейно, преодолевая сопротивление воды. Сила сопротивления $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость лодки, $\mu = \text{const} > 0$.

Полагая $m = 48$ кг и $v_0 = 10$ м/с, определить:

1) коэффициент μ силы сопротивления, если после прохождения расстояния в 50 м скорость лодки равна 5 м/с, а также найти время, за которое лодка пройдет это расстояние;

2) наибольшее расстояние, которое пройдет лодка и время прохождения этого расстояния.

Ответ: 1) $\mu = 4{,}8$ Н · с/м, $t = 10\ln 2$ с; 2) $s_{\max} = 100$ м, $t = \infty$.

8.6. Тело массы m, прикрепленное к концу недеформированной пружины, покоится на гладкой горизонтальной плоскости. Ось пружины горизонтальна. В некоторый момент времени ($t = 0$) тело приводится в прямолинейное поступательное движение с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$, направленной по оси пружины. Зависимость силы упругости пружины от ее деформации λ имеет вид $F = c\lambda^3$, где $c = \text{const} > 0$.

Определить, при какой деформации пружины скорость тела уменьшится в n раз по сравнению с его начальной скоростью.

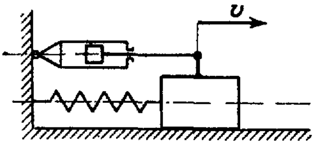
Ответ: $\lambda = \sqrt[4]{\dfrac{2mv_0^2(n^2-1)}{cn^2}}$.

8.7. Тело массы m, прикрепленное к концу недеформированной пружины, приводится в прямолинейное поступательное движение по гладкой горизонтальной плоскости с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$, направленной по оси пружины. Величина силы упругости пропорциональна деформации пружины λ, т. е. $F = c\lambda$, где $c = \text{const} > 0$. Кроме пружины, к телу прикреплен шток с поршнем, помещенным в цилиндр, заполненный жидкостью. При движении поршня возникает сила сопротивления, величина которой $R = \mu v^2$, где v — скорость поршня, $\mu = \text{const} > 0$.

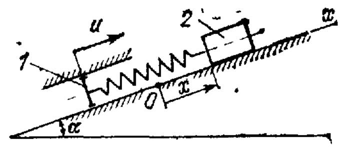
Найти значение начальной скорости тела, при котором оно остановится, пройдя путь, равный l.

Ответ: $v_0 = \sqrt{\dfrac{cm}{2\mu^2}\left[1 + \left(\dfrac{2\mu l}{m} - 1\right)e^{\frac{2\mu l}{m}}\right]}$.

8.8. Ползун *1* и тело *2* массы m, присоединенное к нему при помощи пружины, коэффициент жесткости которой равен c, находятся в покое на гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. В некоторый момент времени ($t=0$) ползун начинает двигаться вверх с постоянной скоростью $\mathbf{u}$, сжимая пружину и приводя в движение тело. При движении тело преодолевает силу сопротивления среды $\mathbf{R}=-\mu\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость тела, $\mu=\mathrm{const}>0$.



К задаче 8.7.



К задаче 8.8.

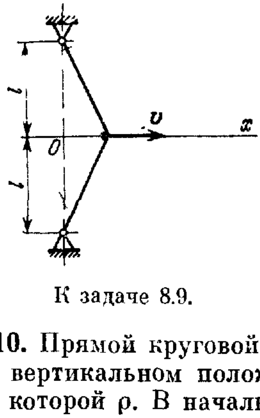
Считая, что начало отсчета координаты x совпадает с положением покоящегося тела, получить уравнение его движения по наклонной плоскости. При решении задачи обозначить $c/m=k^2$ и принять $\mu/m=2k$.

Ответ: $x(t)=ut-\frac{2u}{k}+\frac{2u}{k}(1+kt)e^{-kt}$.

8.9. Материальная точка массы m, двигавшаяся прямолинейно по гладкой горизонтальной плоскости (совпадающей с плоскостью рисунка) с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$, в некоторый момент времени ($t=0$) касается упругой нити в ее середине и при дальнейшем движении растягивает эту нить. В момент касания скорость $\mathbf{v}_0$ точки перпендикулярна нити. Предварительное натяжение нити пренебрежимо мало и при ее растяжении возникает сила упругости $T=c\lambda$, где λ — деформация нити, $c=\mathrm{const}>0$.

Найти максимальную величину силы натяжения нити.

Ответ: $T_{\max}=\frac{v_0}{2}\sqrt{2cm}$.



К задаче 8.9.

К задаче 8.10.

8.10. Прямой круговой цилиндр массы m погружается, оставаясь в вертикальном положении, в неподвижную жидкость, плотность которой ρ. В начальный момент времени цилиндр находился в покое и его нижнее основание касалось поверхности жидкости. Высота цилиндра h, площадь поперечного сечения S.

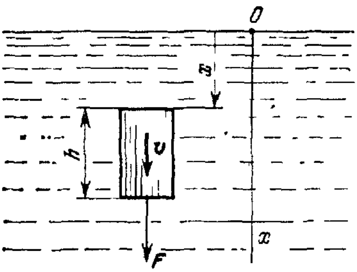
Пренебрегая силами сопротивления и полагая $m = \rho S h$, найти скорость цилиндра в тот момент, когда его верхнее основание совпадет с поверхностью жидкости.

Ответ: $v = \sqrt{gh}$.

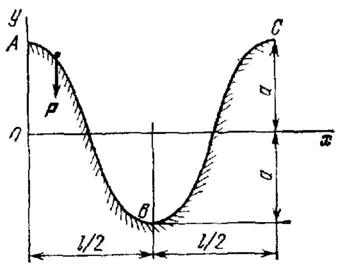
8.11. Прямой круговой цилиндр массы m движется поступательно, вертикально вниз в жидкости. В начальный момент времени $(t = 0)$ его верхнее основание находилось на поверхности жидкости и цилиндр имел скорость $\mathbf{v}_0$. На цилиндр действует направленная по его оси вниз сила $\mathbf{F}$, величина которой $F = bt$ $(b = \text{const} > 0)$ и сила сопротивления жидкости $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — скорость цилиндра.

Считая, что величина выталкивающей силы, приложенной к погруженному цилиндру, равна силе тяжести, найти зависимость скорости цилиндра от времени.

Ответ: $v(t) = \left(v_0 + \dfrac{mb}{\mu^2}\right)e^{-\frac{\mu}{m}t} + \dfrac{b}{\mu}\left(t - \dfrac{m}{\mu}\right)$.



К задаче 8.11.



К задаче 8.12.

8.12. Материальная точка массы m начинает двигаться без начальной скорости из точки A по гладкой направляющей, уравнение которой $y = a\cos\dfrac{2\pi x}{l}$.

Определить силу давления точки на направляющую в тот момент, когда она проходит через точку B.

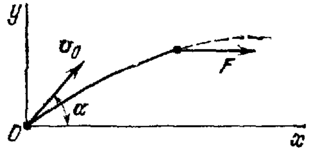
Ответ: $N = mg\left(1 + 16\pi^2\dfrac{a^2}{l^2}\right)$.

8.13. Материальная точка массы m движется по гладкой горизонтальной плоскости Oxy под действием силы $\mathbf{F}(t)$, направленной параллельно оси x. Модуль силы изменяется по закону $F = bt^2$, где $b = \text{const} > 0$. Начальная скорость $\mathbf{v}_0$ направлена под углом $\alpha < \pi/2$ к линии действия силы $\mathbf{F}(t)$.

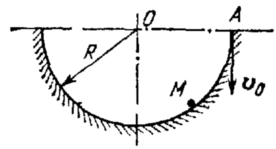
Получить уравнение траектории точки.

Ответ: $x = \dfrac{b}{12m}\left(\dfrac{y}{v_0 \sin\alpha}\right)^4 + y\operatorname{ctg}\alpha$.

8.14. Материальная точка M массы m движется в вертикальной плоскости по кольцу радиуса R. В начальный момент времени материальная точка находилась в точке A на горизонтальном диаметре кольца и ей была сообщена скорость $\mathbf{v}_0$. Коэффициент трения скольжения между точкой и кольцом равен f.



К задаче 8.13.



К задаче 8.14.

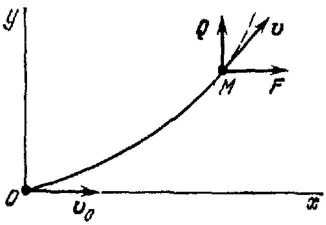
Найти наименьшее значение начальной скорости, при котором точка M достигнет противоположного конца горизонтального диаметра кольца.

Ответ: $v_0 = \sqrt{\dfrac{6gRf}{(1+4f^2)}\left(1+e^{2\pi f}\right)}$.

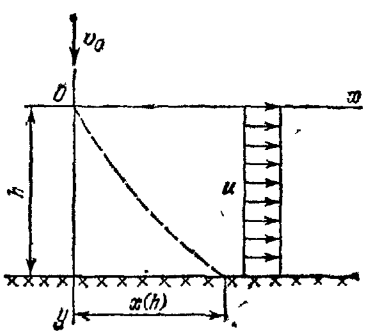
8.15. Материальная точка M массы m движется в вертикальной плоскости под действием постоянной горизонтальной силы тяги $\mathbf{F}$, силы сопротивления $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$ ($\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — скорость точки) и вертикальной подъемной силы $\mathbf{Q}$, величина которой $Q = kv_x$, где $k = \text{const} > 0$.

Получить уравнение движения точки в направлении оси y, если в начальный момент времени ($t = 0$) ее положение совпадало с началом системы координат, а ее начальная скорость горизонтальна и равна $\mathbf{v}_0$.

Ответ: $y = \tau\left(a_1 + a_2 e^{-t/\tau}\right)t - \tau^2(a_1 + a_2)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, где $\tau = \dfrac{m}{\mu}$, $a_1 = \dfrac{kF}{\mu m} - g$, $a_2 = \dfrac{k\,(F - \mu v_0)}{\mu m}$.



К задаче 8.15.



К задаче 8.16.

8.16. Тело массы m, падавшее на Землю в спокойном воздухе вертикально, с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0 = mg/\mu$ ($\mu = \text{const} >$

>0), на высоте h над поверхностью Земли попадает в воздушный поток, который движется горизонтально с постоянной скоростью $\mathbf{u}$. Сила сопротивления, действующая на тело в воздушном потоке, $\mathbf{R}=-\mu\mathbf{v}_r$, где $\mathbf{v}_r$ — скорость тела относительно потока воздуха.

Определить величину горизонтального отклонения тела от первоначального направления его движения в момент падения на Землю.

Ответ: $x(h)=u\tau\left[\frac{h}{g\tau^2}-\left(1-e^{-\frac{h}{g\tau^2}}\right)\right]$, где $\tau=m/\mu$.

8.17. Материальная точка массы m, прикрепленная к нерастяжимой нити, движется по гладкой горизонтальной плоскости, преодолевая сопротивление вязкой среды Сила сопротивления $\mathbf{R}=-\mu\mathbf{v}$, где $\mu=\mathrm{const}>0$, $\mathbf{v}$ — скорость точки. Нить наматывается на тонкий вертикальный стержень с постоянной скоростью, равной u. Начальная скорость $\mathbf{v}_0$ точки перпендикулярна нити, а начальная длина нити равна l.

Найти зависимости скорости точки и натяжения нити от времени. При решении задачи рекомендуется использовать полярные координаты.

Ответ: $v_r=-u$, $v_p=\frac{v_0le^{-\frac{\mu}{m}t}}{(l-ut)}$, $N=\mu u+\frac{mv_0^2l^2e^{-\frac{2\mu}{m}t}}{(l-ut)^3}$.

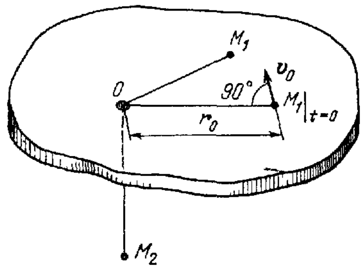
8.18. Используя условия задачи 8.17, найти уравнения движения точки в полярных координатах и предельное (при $t\to\infty$) значение силы натяжения нити, если скорость наматываемой на стержень нити не постоянна, а изменяется во времени по закону $u=ale^{-at}$, где $a=\mathrm{const}>0$, l — начальная длина нити.

Ответ: $r=le^{-at}$, $\varphi=\frac{v_0}{l\left(\frac{\mu}{m}-2a\right)}\left[1-e^{-t\left(\frac{\mu}{m}-2a\right)}\right]$.

$$N|_{t=\infty}=\begin{cases}0 & \text{при } \frac{2\mu}{m}>3a,\\ \frac{mv_0^2}{l} & \text{при } \frac{2\mu}{m}=3a,\\ \infty & \text{при } \frac{2\mu}{m}<3a.\end{cases}$$

8.19. Две материальные точки M_1 и M_2, массы которых равны m_1 и m_2 соответственно, связаны нерастяжимой нитью, проходящей через отверстие в гладкой горизонтальной плоскости. В начальный момент времени точка M_1 находилась на плоскости на расстоянии r_0 от отверстия и ей была сообщена скорость $\mathbf{v}_0$ (вектор скорости расположен в горизонтальной плоскости и перпендикулярен нити). Точка M_2, подвешенная на нити, покоилась.

Составить дифференциальное уравнение движения точки M_1 для координаты $r(t) = OM_1$. Кроме того, определить величину



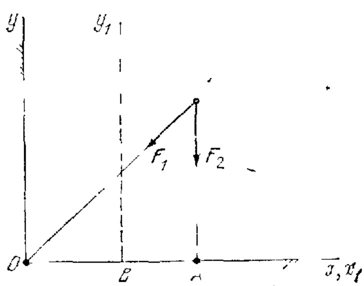
К задаче 8.19.

начальной скорости $\mathbf{v}_0$ точки M_1, при которой точка M_2 не будет двигаться в вертикальном направлении.

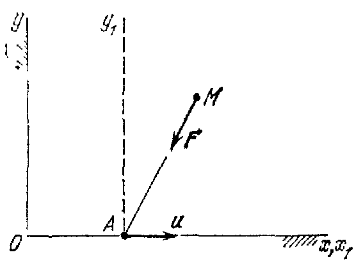
Ответ: $(m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1 \dfrac{r_0^2 v_0^2}{r^3} + m_2 g = 0$, $v_0 = \sqrt{\dfrac{m_2 g r_0}{m_1}}$.

§ 2. Относительное движение точки

8.20. Материальная точка M массы m движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием сил притяжения, направленных к центрам O и A: $\mathbf{F}_1 = -c_1 \cdot \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{F}_2 = -c_1 \cdot \overrightarrow{AM}$, где $c_1 = \text{const} > 0$ и $c_2 = \text{const} > 0$. Центр O неподвижен, а центр A движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\mathbf{u}$ по оси Ox. В начальный момент времени ($t = 0$) точка M находилась в покое и ее координатами были $x_0 = 0$, $y_0 = d$, а подвижный центр A совпадал с неподвижным центром O.



К задаче 8.20.



К задаче 8.21.

Найти уравнения движения точки M в неподвижной системе координат, а также ее траекторию в подвижной системе координат Bx_1y_1, движущейся поступательно и прямолинейно в направлении оси Ox со скоростью $u_1 = c_2 u/(c_1 + c_2)$. В начальный момент времени точка B совпадала с центром O. При решении задачи обозначить $(c_1 + c_2)/m = k^2$.

Ответ: $x = \frac{u_1}{k}(kt - \sin kt)$, $y = d \cos kt$; $\left(\frac{kx_1}{u_1}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{d}\right)^2 = 1$.

8.21. Материальная точка M массы m, находящаяся на гладкой горизонтальной плоскости, притягивается к подвижному центру A силой $\mathbf{F} = -c \cdot \overrightarrow{AM}$, где $c = \text{const} > 0$. Центр A движется в той же плоскости равномерно со скоростью u по оси Ox. При движении точка преодолевает сопротивление среды, причем сила сопротивления $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — скорость точки. В начальный момент времени точка находилась в покое и ее координатами были $x_0 = 0$, $y_0 = d$, а центр A совпадал с началом неподвижной системы координат Oxy.

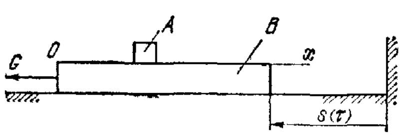
Найти уравнения движения точки M в системе координат Ax_1y_1, движущейся поступательно, если $\mu = 2\sqrt{cm}$. При решении задачи обозначить $2m/\mu = \tau$.

Ответ: $x_1 = -2u\tau\left[1 - \left(1 + \frac{t}{2\tau}\right)e^{-t/\tau}\right]$, $y_1 = d\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$.

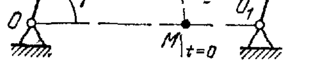
8.22. Грузу A массы $m = 20$ кг, находящемуся на поверхности неподвижной плиты B массы $m_1 = 80$ кг, в момент времени $t = 0$ сообщили скорость $\mathbf{v}_0$ ($v_0 = v_{0x} = 4$ м/с). При $t = t_1 = 2$ с плита начинает двигаться влево поступательно и прямолинейно по закону $s(\tau) = 0{,}25\tau^2$ м, где $\tau = t - t_1$. Сила сопротивления движению плиты по полу $R = \mu v N$, где $\mu = 0{,}01$ с/м, v — скорость плиты, N — сила давления плиты на пол. Коэффициент трения скольжения для пары груз — плита $f = 0{,}1$.

Определить: 1) в какой момент времени τ_1 скорость груза относительно плиты будет равна нулю, 2) значение силы G при $\tau_2 = 6$ с, которую нужно приложить к плите для обеспечения ее движения по заданному закону $s(\tau)$. При вычислениях полагать $g = 10$ м/с^2.

Ответ: 1) $\tau_1 = 4$ с; 2) $G = 80$ Н.



К задаче 8 22.



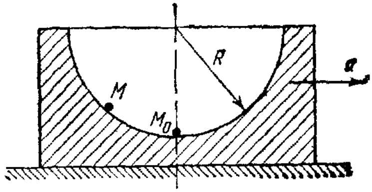
К задаче 8 23

8.23. Материальная точка M может двигаться в трубке AB, которой сообщается поступательное движение в вертикальной плоскости при помощи кривошипов OA и O_1B одинаковой длины r, вращающихся с постоянной угловой скоростью ω. Коэффициент трения скольжения между точкой M и трубкой равен f. В начальный момент времени точка M находилась на конце A трубки в состоянии относительного покоя, а трубка и кривошипы располагались горизонтально.

Определить перемещение точки M по трубке за время, соответствующее четверти оборота кривошипов, если $f=0{,}2$ и $\omega=2\sqrt{gf/r}$.

Ответ: $s=0{,}806r$.

8.24. Материальная точка M движется из крайнего нижнего положения по шероховатой поверхности бака, имеющего форму полусферы радиуса R. В начальный момент времени ($t=0$) точка находилась в состоянии относительного покоя в положении M_0. Бак движется поступательно и прямолинейно по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением **a**. Коэффициент трения точки о поверхность бака равен f.



К задаче 8.24.

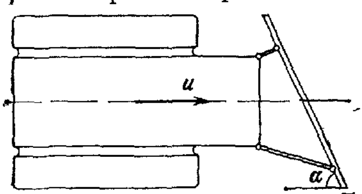
Составить дифференциальное уравнение движения точки M для координаты $s=\overset{\frown}{M_0M}$.

Ответ: $\ddot{s}+\frac{f}{R}\dot{s}^2=(a-gf)\cos\frac{s}{R}-(g+af)\sin\frac{s}{R}$.

8.25. Используя условия предыдущей задачи и полагая, что движение системы началось из состояния покоя, определить, при каком ускорении **a** точка M достигнет верхнего края бака, если: 1) поверхность бака гладкая, 2) поверхность шероховатая и $f=(\ln 2)/\pi\approx 0{,}22$.

Ответ: 1) $a=g$; 2) $a=1{,}79g$.

8.26. Бульдозер, движущийся по горизонтальной плоскости равномерно и прямолинейно со скоростью **u**, встречает ножом камень массы m. Камень мгновенно приобретает переносную скорость, равную **u**, и одновременно начинает скользить вдоль ножа ($v_r(0)=0$). Сила сопротивления движению камня по горизонтальной плоскости $\mathbf{R}=-\mu\mathbf{v}$, где $\mu=\text{const}>0$, $\mathbf{v}$ — абсолютная скорость камня. Коэффициент трения скольжения между камнем и поверхностью ножа равен f. Угол наклона ножа к направлению движения бульдозера α.



К задаче 8.26.

Рассматривая камень как материальную точку и полагая $\operatorname{ctg}\alpha>f$, найти относительную скорость камня.

Ответ: $v_r=u(\cos\alpha-f\sin\alpha)\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)$.

8.27. Сохраняя условия предыдущей задачи, определить, на какое расстояние s от края ножа будет отброшен камень в направлении, перпендикулярном **u**. При решении задачи полагать, что промежуток времени, в течение которого камень скользит по поверхности ножа, значительно больше $\tau = m/\mu$. Поэтому относительную скорость камня в момент достижения им края ножа считать равной предельному значению этой скорости $v_r = u(\cos\alpha - f\sin\alpha)$.

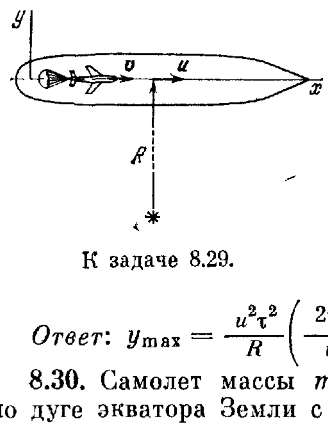
Ответ: $s = u\tau(\cos\alpha - f\sin\alpha)\sin\alpha$.

8.28. Самолет массы m совершает посадку на палубу авианосца, движущегося прямолинейно с постоянной скоростью $u = 8$ м/с. Абсолютная скорость самолета в момент его посадки на палубу $v_0 = 60$ м/с. Сила сопротивления, действующая на самолет со стороны тормозного парашюта $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$, где $\mu = \mathrm{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — абсолютная скорость самолета. Сила $\mathbf{F}$ сопротивления от тормозов шасси имеет постоянную величину.

Определить путь, пройденный самолетом по палубе до остановки, если $\mu v_0 = 1{,}5\,mg$, $F = 0{,}3\,mg$, $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $s = \dfrac{2v_0}{3g}\left[v_0 - u - \left(u + \dfrac{F}{\mu}\right)\ln\left(1 + \dfrac{v_0 - u}{u + \dfrac{F}{\mu}}\right)\right] = 105{,}5$м.

8.29. Самолет массы m, движущийся горизонтально и прямолинейно со скоростью $\mathbf{v}_0$, совершает посадку на палубу авианосца, который движется равномерно со скоростью $\mathbf{u}$ по дуге окружности радиуса R. Сила сопротивления, создаваемая тормозным парашютом $\mathbf{R}_1 = -\mu\mathbf{v}$, где $\mu = \mathrm{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — абсолютная скорость самолета



К задаче 8.29.

Найти смещение самолета от осевой линии посадочной полосы в момент его остановки. При решении задачи полагать, что размеры палубы авианосца значительно меньше R.

Ответ: $y_{\max} = \dfrac{u^2\tau^2}{R}\left(\dfrac{2v_0}{u} - \dfrac{u}{v_0} - 3\ln\dfrac{v_0}{u} - 1\right)$, где $\tau = m/\mu$.

8.30. Самолет массы m перед взлетом разгоняется, двигаясь по дуге экватора Земли с запада на восток. При этом возникает вертикальная подъемная сила $Y_a = kv^2$, где $k = \mathrm{const} > 0$, v — скорость самолета относительно Земли.

Пренебрегая изменением массы самолета и учитывая суточное вращение Земли, определить:

1) скорость v_1 самолета относительно Земли в момент взлета;

2) насколько «взлетная» скорость v_1 самолета при его разгоне в направлении с запада на восток будет отличаться от «взлетной» скорости v_2 при разгоне в противоположном направлении. При решении задачи полагать $R_{\text{Земли}} = 6400$ км, $k/m = 3$ 1/км, $\omega_{\text{Земли}} = 0{,}25$ 1/ч, $g = 12{,}96 \times 10^4$ км/ч^2.

Ответ: 1) $v_1 = 207{,}76$ км/ч; 2) $\Delta v = v_2 - v_1 \approx 0{,}17$ км/ч.

8.31. При посадке на экваторе с выключенным двигателем и выпущенным тормозным парашютом самолет массы m движется по Земле с севера на юг. При этом подъемная сила $Y_a = 0$, сила сопротивления воздуха $\mathbf{X}_a = -\mu\mathbf{v}$ ($\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — скорость самолета относительно Земли), сила трения $\mathbf{F}$ ($F = f \cdot N$, где $f = 0{,}1$, N — сила нормального давления самолета на Землю).

Пренебрегая кривизной посадочной полосы (меридиана) и учитывая суточное вращение Земли, определить время движения самолета до остановки, если его относительная скорость в момент посадки $v_0 = 200$ км/ч, $\mu/m = 60$ 1/ч, $\omega_{\text{Земли}} = 0{,}25$ 1/ч, $R_{\text{Земли}} = 6400$ км, $g = 12{,}96 \times 10^4$ км/ч^2.

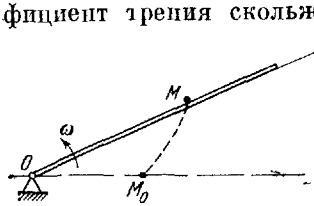
Ответ: $t = \dfrac{m}{\mu} \ln\left[1 + \dfrac{\mu v_0}{fm\left(g - R_{\text{Земли}}\,\omega^2_{\text{Земли}}\right)}\right] \approx 0{,}0109$ч.

8.32. Самолет массы m совершает посадку на воду на экваторе Земли, при выключенном двигателе. По воде он движется с севера на юг, преодолевая силу $\mathbf{R}$ сопротивления воды, модуль которой $R = \mu v^{1,5}$ ($\mu = \text{const} > 0$, v — скорость самолета относительно Земли).

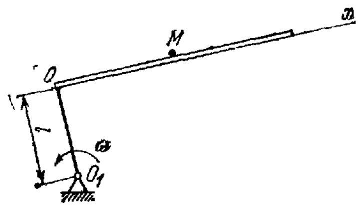
Пренебрегая кривизной меридиана и учитывая суточное вращение Земли, определить путь, пройденный самолетом до остановки, если его относительная скорость в момент посадки $v_0 = 256$ км/ч и $\mu/m = 40$ (км $\cdot$ ч)$^{-0,5}$.

Ответ: $s = 0{,}8$ км.

8.33. Материальная точка M массы m приводится в движение по неподвижной гладкой горизонтальной плоскости прямой лопаткой, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. Движению точки по плоскости препятствует сила сопротивления $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$ ($\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — абсолютная скорость точки) и сила трения точки о поверхность лопатки (коэффициент трения скольжения f).



К задаче 8.33.



К задаче 8.34.

Найти уравнение движения точки M относительно лопатки, если в начальный момент времени ($t = 0$) точка M находилась относительно лопатки в покое на расстоянии $OM_0 = l$ от оси вращения и имела переносную скорость $v_0^e = \omega l$.

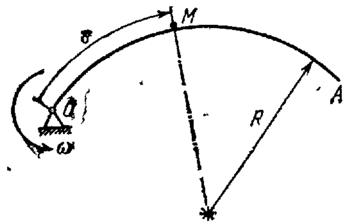
Ответ: $x = l\left(\operatorname{ch} kt + \dfrac{n}{k}\operatorname{sh} kt\right)e^{-nt}$, где $n = \dfrac{\mu}{2m} + \omega f$, $k = \sqrt{\left(\dfrac{\mu}{2m}\right)^2 + (1 + f^2)\,\omega^2}$.

8.34. Материальная точка M массы m приводится в движение по неподвижной горизонтальной плоскости Г-образной лопаткой, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, отстоящей на расстоянии l от плоскости лопатки. Движению точки препятствует сила сопротивления $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$, где $\mu = \mathrm{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — абсолютная скорость точки M.

Пренебрегая трением точки о поверхность лопатки, найти уравнение ее относительного движения, если $\omega = 2\mu/(3m)$ и при $t = 0$ $x = l$, $v_r = v_x = 0$.

Ответ: $x = \frac{l}{2}\left(e^{-2\omega t} + 4e^{\frac{\omega t}{2}} - 3\right)$.

8.35. Материальная точка M массы m приводится в движение по неподвижной горизонтальной плоскости криволинейной лопаткой, вращающейся равномерно с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. Профиль лопатки — дуга окружности радиуса R.



К задаче 8.35.

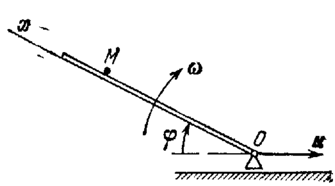
Составить дифференциальное уравнение движения точки относительно лопатки, если сила сопротивления, действующая на точку со стороны плоскости, пропорциональна абсолютной скорости точки (коэффициент пропорциональности $\mu > 0$), а коэффициент трения скольжения между точкой и лопаткой равен f.

Ответ: $\ddot{s} + 2(n + \omega f)\dot{s} + \frac{f}{R}\dot{s}^2 = \omega^2 R\left[\left(1 - \frac{2nf}{\omega}\right)\sin\frac{s}{R} + \left(\frac{2n}{\omega} - f\right)\left(1 - \cos\frac{s}{R}\right)\right]$, где $n = \frac{\mu}{2m}$.

8.36. Сохраняя условия предыдущей задачи, определить абсолютную скорость точки M в тот момент времени, когда она достигнет конца A лопатки, если $\smile{OA} = \pi R/3$. Движение точки начинается из состояния относительного покоя, когда $s_0 = \pi R/6$. Трением точки о плоскость и лопатку пренебречь.

Ответ: $v = 0{,}936\omega R$.

8.37. Материальная точка M массы m приводится в движение по неподвижной горизонтальной плоскости прямой лопаткой, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг подвижной вертикальной оси, проходящей через точку O. Ось вращения лопатки движется прямолинейно с постоянной скоростью $\mathbf{u}$. Движению точки M препятствует сила трения о горизонтальную плоскость $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$, где $\mu = \mathrm{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — скорость точки относительно плоскости.



К задаче 8.37.

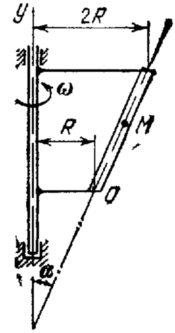
Определить перемещение точки M вдоль лопатки за время t_1, соответствующее четверти полного оборота лопатки, если $n = \frac{\mu}{2m} = \frac{3}{4}\omega$ и при $t = 0$ $x = 0$, $v_r = v_x = 0$, $\varphi = 0$.

Ответ: $x(t_1) = 1{,}51\, u/\omega$.

8.38. Материальная точка M массы m движется из состояния относительного покоя в точке O по гладкой трубке, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Расстояния от нижнего и верхнего концов трубки до оси вращения равны R и $2R$ соответственно, угол между осью вращения и трубкой $\alpha = 30°$.

Найти вертикальную составляющую абсолютной скорости точки в момент вылета из трубки, если $\omega^2 = 2\frac{g}{R}\operatorname{ctg}\alpha$.

Ответ: $v_y = 2{,}28\sqrt{gR}$.

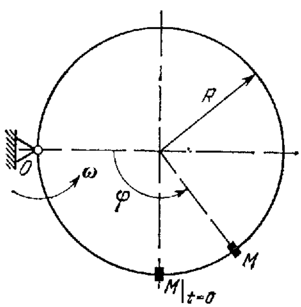


К задаче 8.38.

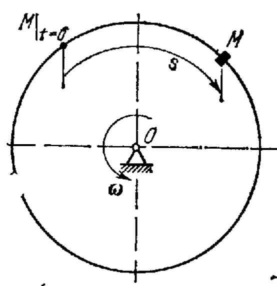
8.39. Кольцо (материальная точка M) массы m движется по гладкому обручу радиуса R. Обруч вращается в своей плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. В начальный момент времени кольцо находилось в состоянии относительного покоя в положении, соответствующем $\varphi_0 = \pi/2$.

Определить максимальную величину радиального давления кольца на обруч.

Ответ: $N_{max} = 2(2 + \sqrt{2})mR\omega^2$.



К задаче 8.39.



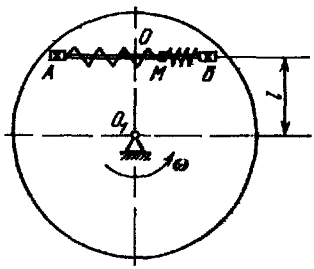
К задаче 8.40.

8.40. Кольцо (материальная точка M) массы m движется из состояния относительного покоя по обручу радиуса r, преодолевая силу сопротивления $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}_r$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}_r$ — скорость кольца относительно обруча. Обруч вращается в своей плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр обруча с угловой скоростью $\omega = \omega_0(1 - e^{-t/\tau})$, где $\omega_0 = \text{const} > 0$ и $\tau = \text{const} > 0$.

Найти предельное (при $t \to \infty$) расстояние, которое пройдет кольцо M в относительном движении, если $\tau = m/\mu$.

Ответ: $s_{\text{пр}} = r\omega_0\tau$.

8.41. К диску, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр O_1, прикреплен гладкий стержень AB, вдоль которого скользит кольцо M массы m. Стержень параллелен плоскости диска, и расстояние между ним и осью вращения диска равно l. К кольцу с двух сторон прикреплены концы двух одинаковых пружин, коэффициенты жесткости которых c. Вторые концы этих пружин закреплены на концах стержня. В средней точке стержня AB кольцо M находится в относительном равновесии и пружины при этом не деформированы.



К задаче 8.41.

Найти закон движения кольца по стержню, если оно было отклонено от положения относительного равновесия на расстояние, равное x_0, и отпущено без начальной скорости.

Ответ: $x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2c}{m} - \omega^2}\cdot t\right)$ при $\frac{2c}{m} > \omega^2$,

$x = x_0 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{2c}{m}}\cdot t\right)$ при $\frac{2c}{m} < \omega^2$.

8.42. Сохраняя условия предыдущей задачи и считая, что при движении кольца M по стержню возникает сила трения скольжения $F = fN$ ($f = \text{const} > 0$; N — сила нормального давления кольца на стержень), найти закон относительного движения кольца. В начальный момент времени $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$. Считать, что $l = 0$; при определении силы N силой тяжести пренебречь.

Ответ:

$$x = x_0 e^{-f\omega t}\left(\cos k_1 t + \frac{f\omega}{k_1}\sin k_1 t\right), \quad \text{где} \quad k_1 = \sqrt{\frac{2c}{m} - \omega^2(1+f^2)},$$

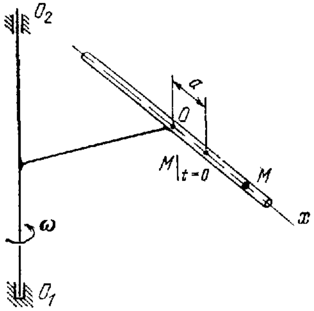
$$x = x_0 e^{-f\omega t}\left(\operatorname{ch} k_2 t + \frac{f\omega}{k_2}\operatorname{sh} k_2 t\right), \quad \text{где} \quad k_2 = \sqrt{\omega^2(1+f^2) - \frac{2c}{m}}.$$

8.43. Материальная точка M массы m движется в прямолинейной горизонтальной трубке, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси O_1O_2, расположенной на некотором расстоянии от нее. При движении по трубке точка преодолевает силу сопротивления $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}_r$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}_r$ — относительная скорость точки. В начальный момент времени точка M находилась в трубке на расстоянии a от точки O в состоянии относительного покоя.

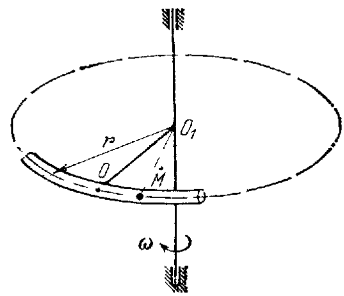
Найти уравнение движения точки по трубке.

Ответ: $x = \frac{a}{(k_2 - k_1)}\left(k_2 e^{k_1 t} - k_1 e^{k_2 t}\right)$, где $k_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm$ $\pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 + \omega^2}$.

8.44. Материальная точка M массы m движется в трубке, изогнутой по дуге окружности радиуса r. Трубка вращается вокруг вертикальной оси, перпендикулярной плоскости трубки и



К задаче 8.43.



К задаче 8.44.

проходящей через центр кривизны трубки, с угловой скоростью $\omega = \omega_0\left(0{,}5 - e^{-2t/\tau}\right)$, где $\omega_0 = \text{const} > 0$, $\tau = \text{const} > 0$. Точка преодолевает силу сопротивления $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}_r$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}_r$ — относительная скорость точки. В начальный момент времени ($t = 0$) точка находилась в трубке в состоянии относительного покоя.

Определить абсолютную скорость точки при $t = T$, если $\mu\tau = 4m$.

Ответ: $v(T) = \omega_0 r\left(2e^{-2T/\tau} - e^{-\mu T/m} - 0{,}5\right)$.

§ 3. Смешанные задачи

8.45. Тело массы m падает на Землю вертикально, преодолевая силу сопротивления воздуха $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — скорость тела. На высоте h, когда скорость тела равна v_1, включается тормозная установка, создающая силу $F = kmg$ ($k = \text{const} > 0$), вектор которой направлен вертикально вверх.

Считая, что тормозная установка работает до момента приземления тела, определить, при каком значении h скорость тела при приземлении будет равна нулю.

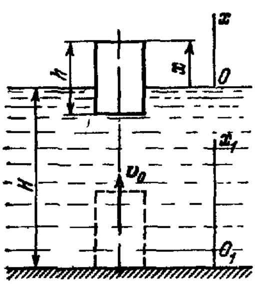
Ответ: $h = v_1\tau - (k-1)g\tau^2 \ln\left[\frac{v_1 + (k-1)g\tau}{(k-1)g\tau}\right]$, где $\tau = m/\mu$.

8.46. Спускаемый аппарат космического корабля массы $m = 800$ кг, который опускается на Землю вертикально, должен быть заторможен так, чтобы его посадочная скорость была равна нулю. Тормозной двигатель включается на высоте $H = 500$ м над поверхностью Земли при скорости спускаемого аппарата $v_0 = 50$ м/с и создает силу тяги $F_т$, направленную вертикально вверх.

Определить, при каком законе ($F_т = \mathrm{const}$ или $F_т = At$, где $A = \mathrm{const} > 0$) изменения силы тяги расход топлива на участке торможения будет меньше. Полагать, что секундный расход топлива прямо пропорционален силе тяги, а $g = 10$ м/с^2. Изменением массы спускаемого аппарата и действием на него аэродинамических сил пренебречь.

Ответ: при $F_т = At$ расход топлива составит 60% от расхода при $F_т = \mathrm{const}$.

8.47. Прямой цилиндр массы m начинает двигаться поступательно вверх по вертикали со скоростью $\mathbf{v}_0$ в неподвижной жидкости, плотность которой ρ. В начальном положении ось цилиндра вертикальна, расстояние от поверхности жидкости до нижнего основания цилиндра равно H. Площадь поперечного сечения цилиндра S, высота h. Со стороны жидкости на цилиндр действуют выталкивающая (архимедова) сила и сила сопротивления, модуль которой $R_1 = \mu_1 v^2$, где $\mu_1 = \mathrm{const} > 0$, v — скорость цилиндра.



К задаче 8 47.

После достижения поверхности жидкости верхним основанием цилиндра действующей на него силой сопротивления становится $\mathbf{R}_2 = -\mu_2 \mathbf{v}$, где $\mu_2 = \mathrm{const} > 0$.

Найти уравнение движения цилиндра после выхода из жидкости его верхнего основания, если $m = \rho S h$, $\mu_2 = 2\sqrt{g \rho S m}$.

Ответ: $x = v_0 t e^{-\frac{2\mu_1 (H-h) + \mu_2 t}{2m}}$ при $x < h$.

8.48. Тело массы m_1 брошено вертикально вверх с поверхности Земли с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$. Движение тела происходит под действием силы притяжения к Земле, принимаемой постоянной и равной $m_1 g$, а также силы сопротивления, модуль которой $Q = \mu v^2$, где $\mu = \mathrm{const} > 0$, v — скорость тела.

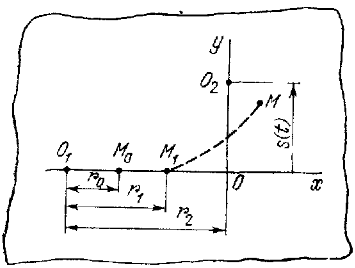
На высоте h от тела мгновенно отделяется материальная точка массы m с относительной скоростью $\mathbf{u}$, направленной вертикально вверх. Модуль силы притяжения точки к Земле изменяется по закону $F = mg\left(\frac{R}{R+x}\right)^2$, где R — радиус Земли, x — расстояние от поверхности Земли до точки.

Пренебрегая действием силы сопротивления на точку, определить наибольшую высоту ее подъема над поверхностью Земли.

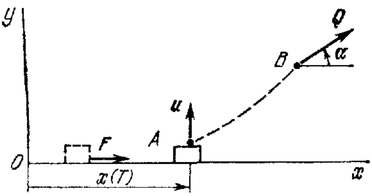
При решении задачи считать, что $2\mu h = m_1 \ln 2$, $\mu v_0^2 = 2m_1 g$.

Ответ: $H = \dfrac{8gR^2(R+h)}{8gR^2 - (R+h)(v_0+2u)^2} - R$.

8.49. Материальная точка M массы m движется прямолинейно по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы отталкивания от неподвижного центра O_1. Модуль силы отталкивания $F_1 = br^3$, где $b = \text{const} > 0$, $r = O_1M$. В начальный момент времени ($\tau = 0$) точка находилась в покое на расстоянии r_0 от центра O_1. В некоторый момент времени при $r = r_1 = O_1M_1$ действие силы $\mathbf{F}_1$ прекращается и на точку начинает действовать сила $\mathbf{F}_2 = -c \cdot \overrightarrow{O_2M}$ ($c = \text{const} > 0$), притягивающая ее к центру O_2. Центр O_2 движется в горизонтальной плоскости по прямой, перпендикулярной оси O_1x и отстоящей от центра O_1 на расстояние r_2. Уравнение движения центра O_2 имеет вид $s = at$, где $a = \text{const} > 0$; время t отсчитывается от момента прекращения действия силы $\mathbf{F}_1$.



К задаче 8.49.



К задаче 8.50.

Найти закон движения точки M в системе координат Oxy под действием силы $\mathbf{F}_2$, если $r_1 = 2r_0$. При решении задачи обозначить $c/m = k^2$.

Ответ: $x = (r_1 - r_2)\cos kt + \sqrt{\dfrac{15b}{2c}}\, r_0^2 \sin kt$; $y = at - \dfrac{a}{k}\sin kt$.

8.50. Тело A массы M движется из состояния покоя поступательно и прямолинейно по гладкой горизонтальной плоскости Oxy под действием силы $\mathbf{F}$, направленной по оси Ox. Модуль этой силы изменяется по закону $F = F_0\left(1 - \dfrac{t}{T}\right)$, где $F_0 = \text{const} > 0$ и $T = \text{const} > 0$.

В момент времени $t = T$ от тела в направлении, перпендикулярном его траектории, отделяется с относительной скоростью $\mathbf{u}$ материальная точка B массы m, которая движется в той же плоскости, что и тело. На точку действуют: сила $\mathbf{Q}$, направленная под постоянным углом α к траектории тела A ($Q = Q_0 e^{-2t/\tau}$, где $Q_0 = \text{const} > 0$, $\tau = \text{const} > 0$), и сила сопротивления воздуха $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — скорость точки. Время t отсчитывается от момента отделения точки B от тела A.

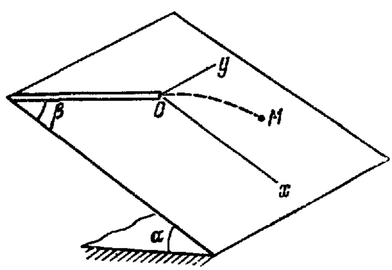
Найти закон движения точки B по траектории, если $\alpha = 60°$, $\tau = \frac{m}{\mu}$, $u = \frac{F_0 T \sqrt{3}}{2M}$, $\frac{F_0 T}{M} = \frac{Q_0 \tau}{2m}$.

Ответ: $s(t) = \frac{Q_0 \tau^2}{2m}\left(2 + e^{-2t/\tau} - 3e^{-t/\tau}\right)$.

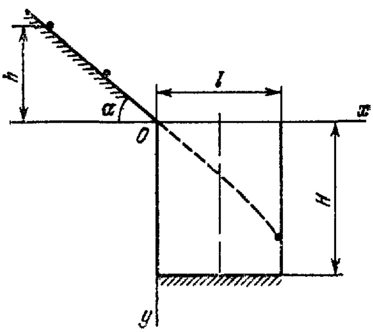
8.51. Материальная точка M массы m начинает двигаться из состояния покоя по гладкой трубке длины l, которая лежит на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Угол между трубкой и линией наибольшего ската наклонной плоскости равен β. После вылета из трубки точка движется по наклонной плоскости, преодолевая силу сопротивления $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где $\mu = \text{const}$, $\mathbf{v}$ — скорость точки.

Полагая наклонную плоскость достаточно протяженной, найти величину предельного (при $t \to \infty$) удаления точки от оси абсцисс системы координат Oxy, если $\alpha = \beta = 45°$.

Ответ: $y_{\text{пр}} = \frac{m}{\mu}\sqrt{\frac{lg}{2}}$.



К задаче 8.51.



К задаче 8.52.

8.52. Материальная точка массы m движется из состояния покоя по шероховатой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, и попадает в прямоугольный бак с жидкостью. Начальная высота точки над поверхностью жидкости равна h, коэффициент трения скольжения точки о плоскость f, высота бака H, ширина l. При движении в жидкости точка преодолевает силу сопротивления $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — скорость точки.

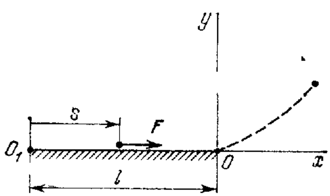
Найти величину промежутка времени T от момента попадания точки в бак до ее удара о стенку и глубину, на которой произойдет удар, если $\alpha = 45°$, $f = 0{,}25$, $l = \frac{m}{4\mu}\sqrt{3gh}$; $\frac{m^2 g}{\mu^2} < (H - l)$. Выталкивающей (архимедовой) силой пренебречь.

Ответ: $T = \frac{m}{\mu}\ln 2$; $y(T) = \frac{m^2 g}{\mu^2}(\ln 2 - 0{,}5) + l$.

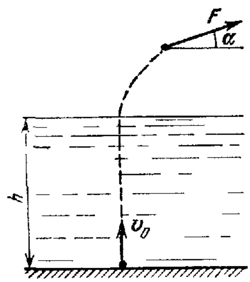
8.53. Планер массы m разгоняется из состояния покоя по горизонтальной плоскости с помощью катапультирующего устройства, создающего горизонтальную силу тяги $\mathbf{F}$ ($F = F_0\left(1 - \frac{s}{l}\right)$, где $F_0 = \text{const} > 0$, s — координата планера на прямолинейном участке O_1O, l — длина участка разгона). При $s = l$ действие катапультирующего устройства прекращается. Дальнейшее движение планера происходит в вертикальной плоскости Oxy под действием силы тяжести и аэродинамической силы $\mathbf{Q}$ с проекциями $Q_x = -\mu v_x$, $Q_y = k v_x$, где $\mu = \text{const} > 0$, $k = \text{const} > 0$, v_x — проекция вектора скорости планера на ось Ox.

Найти зависимость от времени вертикальной составляющей скорости планера после его отделения от Земли. Силами сопротивления, действующими на планер на участке разгона, пренебречь.

Ответ: $v_y = \frac{k}{\mu}\sqrt{\frac{F_0}{m} l}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) - gt$, где $\tau = \frac{m}{\mu}$.



К задаче 8.53



К задаче 8.54.

8.54. Тело массы m начинает движение в воде на глубине h с вертикальной скоростью $\mathbf{v}_0$ и движется вверх, преодолевая силу $\mathbf{R}_1$ сопротивления воды. Модуль этой силы $R_1 = \mu_1 v^2$, где $\mu_1 = \text{const} > 0$, v — скорость тела. После выхода тела из воды на него в течение T секунд действует сила $\mathbf{F} = \text{const}$, линия действия которой в течение всего отрезка времени наклонена под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Сила сопротивления воздуха $\mathbf{R}_2 = -\mu_2\mathbf{v}$, где $\mu_2 = \text{const} > 0$.

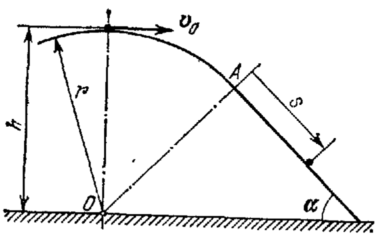
Пренебрегая выталкивающей силой, действующей на тело в воде, найти высоту H его подъема над поверхностью воды в момент окончания действия силы $\mathbf{F}$, если $F = 4mg$, $\mu_1 v_0 = 2\mu_2$, $2\mu_1 h = m \ln \frac{\mu_1 v_0^2}{mg}$ и поле сил тяжести однородно.

Ответ: $H = \frac{m^2 g}{2\mu_2^2}\left(e^{-\frac{\mu_2}{m}T} - 1\right) + \frac{mg}{\mu_2} T$.

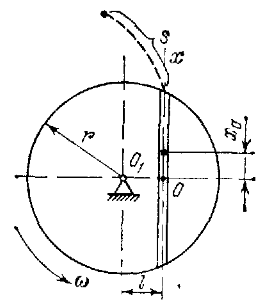
8.55. Лыжник массы m, находящийся на вершине горы высоты h, за счет толчка приобретает скорость $\mathbf{v}_0$ и скользит вниз по склону в вертикальной плоскости. Вначале траекторией лыжника является дуга окружности радиуса $r = h$, затем траекторией становится прямая линия — касательная к дуге окружности в точке A и наклоненная под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Сила сопротивления, возникающая при движении лыжника на прямолинейном участке, $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$, где $\mu = \mathrm{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — скорость лыжника.

Найти закон движения лыжника на прямолинейном участке спуска, пренебрегая силами сопротивления на криволинейном участке и полагая $v_0^2 = 0{,}1gh$.

Ответ: $s = \dfrac{mg}{\mu}\left[\dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{g}\left(\dfrac{mg}{2\mu} - 1{,}92v_0\right)\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)\right].$



К задаче 8.55.



К задаче 8.56.

8.56. Материальная точка массы m движется из состояния относительного покоя по гладкому пазу диска радиуса r, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости. Паз находится на расстоянии $l = r/2$ от центра диска. В момент начала движения координата материальной точки $x = x_0 = r/3$. После вылета из паза точка продолжает двигаться по горизонтальной плоскости, преодолевая силу сопротивления $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$, где $\mu = \mathrm{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — абсолютная скорость точки.

Найти путь, пройденный точкой по плоскости до остановки.

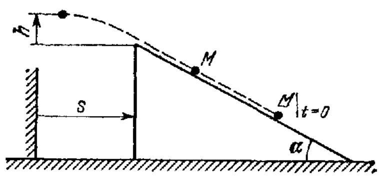
Ответ: $s = 1{,}56m\omega r/\mu$.

8.57. Материальная точка M массы m движется в прямолинейной гладкой трубке длины l, которая вращается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через ее конец. В начальный момент времени точка находилась на расстоянии a от оси вращения и имела скорость $v_0 = a\omega$, направленную от оси вращения вдоль трубки. После вылета из трубки точка движется по горизонтальной плоскости, преодолевая силу сухого трения. Коэффициент трения скольжения равен f.

Определить путь, пройденный точкой по плоскости до остановки.

Ответ: $s = \dfrac{\omega^2 l^2}{gf}$.

8.58. Материальная точка M массы m движется из состояния относительного покоя по наклонной грани прямоугольной призмы вследствие того, что сама призма движется поступательно и прямолинейно по закону $s(t) = (0{,}5g \times \operatorname{tg}\alpha)t^2 + bt^3$ ($b = \text{const} > 0$, α — угол наклона грани призмы к горизонту). Сила сопротивления движению точки по призме $\mathbf{R}_1 = -\mu_1 \mathbf{v}_r$, где $\mu_1 = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}_r$ — скорость точки относительно призмы. Через T секунд после начала движения точка покидает призму и продолжает движение в воздухе, преодолевая силу сопротивления $\mathbf{R}_2 = -\mu_2 \mathbf{v}$, где $\mu_2 = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — скорость точки.



К задаче 8.58.

Найти высоту h точки над горизонтальной плоскостью, проходящей через верхнее ребро призмы, как функцию времени (время отсчитывается от момента схода точки с призмы). При решении задачи полагать $T = m/\mu_1$, $b = g\mu_1 e/m$ (e — основание натурального логарифма), $\alpha = 15°$. Обозначить: $m/\mu_1 = \tau_1$, $m/\mu_2 = \tau_2$.

Ответ: $h(t) = g\tau_2 \left[(\tau_2 + 3\tau_1/2)\left(1 - e^{-t/\tau_2}\right) - t\right]$.

Глава 9

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

§ 1. Теорема об изменении количества движения. Теорема о движении центра масс механической системы

9.1. По борту стоящего свободно на воде катера массы 600 кг и длины 5 м с носа на корму переходит человек массы 80 кг.

Пренебрегая сопротивлением воды, определить направление и величину перемещения катера.

Ответ: вперед на 0,59 м.

9.2. С кормы катера массы 600 кг, стоящего перпендикулярно причалу, на причал прыгает человек массы 60 кг.

Какую скорость v приобретет при этом катер, если скорость человека относительно катера в момент отталкивания от него равна 2,75 м/с?

Ответ: $v = 0{,}25$ м/с.

9.3. В условиях задачи 9.2 определить путь s, который пройдет катер до остановки, если со стороны воды на него действует сила сопротивления $\mathbf{R} = -\alpha\mathbf{v}$, где $\alpha = 50$ Н·с/м.

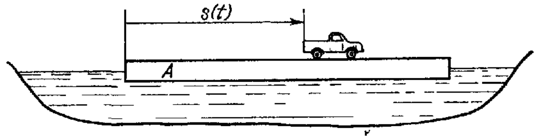
Ответ: $s = 3$ м.

9.4. Космический корабль массы 4000 кг при стыковке подходит к орбитальной станции массы 12 000 кг с относительной скоростью $\mathbf{u}$ ($u = 0{,}4$ м/с).

Как изменится скорость станции сразу после стыковки?

Ответ: станция получит приращение скорости, равное 0,1 м/с, направленное по вектору относительной скорости.

9.5. По понтонному мосту A массы M движется автомобиль массы m по закону $s(t) = b(\alpha t + e^{-\alpha t} - 1)$.



К задаче 9.5.

Пренебрегая сопротивлением воды и течением, определить: 1) скорость $\mathbf{v}_A$, с которой двигался бы мост, если его не скрепить с берегом; 2) силу $\mathbf{T}$ натяжения тросов, удерживающих мост.

Ответ: 1) $v_A = \frac{mb\alpha}{M+m}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$ и направлена в сторону, противоположную движению автомобиля; 2) $T = mb\alpha^2 e^{-\alpha t}$.

9.6. Определить скорость v_A незакрепленного моста, рассмотренного в задаче 9.5, учитывая, что со стороны воды на него действует сила сопротивления $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}_A$ ($\mu = \text{const} > 0$).

Ответ: мост будет двигаться в сторону, противоположную движению автомобиля со скоростью:

$$v_A = \frac{mb\alpha^2}{(\alpha - \beta)(M+m)}\left(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}\right) \quad \text{при } \alpha \neq \beta,$$

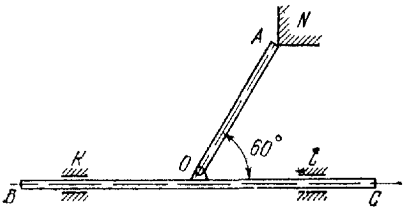
$$v_A = \frac{mb\alpha^2}{M+m}\, te^{-\alpha t} \qquad \text{при } \alpha = \beta,$$

где $\beta = \frac{\mu}{M+m}$.

9.7. Однородный стержень OA длины l и массы m расположен в вертикальной плоскости и шарнирно связан со стержнем BC массы $3m$, имеющим возможность двигаться в горизонтальных направляющих K и L. Стержень OA срывается с выступа N и падает на стержень BC.

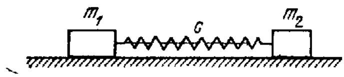
Пренебрегая трением в опорах, определить смещение, которое получает при этом стержень BC.

Ответ: стержень BC сместится влево на $l/16$.



К задаче 9.7.

9.8. Два тела масс m_1 и m_2, связанные между собой пружиной с коэффициентом жесткости c, лежат на горизонтальной гладкой поверхности.

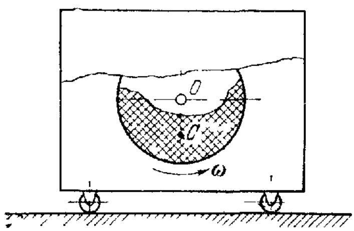


К задаче 9.8.

Определить ненулевую частоту собственных колебаний системы.

Ответ: $\omega_0^2 = \dfrac{c\,(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}$.

9.9. В стиральной машине типа «Эврика-3», схематически изображенной на рисунке, стирка и отжим белья происходят в барабане с горизонтальной осью вращения.



К задаче 9.9.

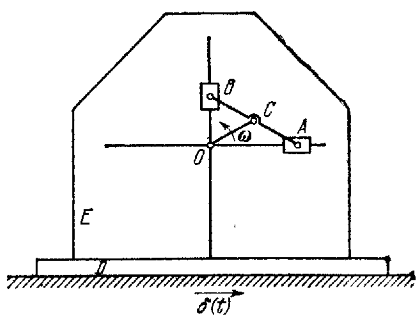
Определить горизонтальное движение машины при отжиме, если масса мокрого белья равна 5 кг, смещение OC его центра масс относительно оси вращения барабана равно 0,085 м, скорость вращения барабана при отжиме равна 380 об/мин, а масса самой машины равна 80 кг. Трением в осях опорных роликов и их массой пренебречь.

Ответ: машина будет совершать колебания с амплитудой 0,005 м и частотой 39,8 рад/с (6,3 Гц).

9.10. В условиях задачи 9.9 определить силу давления машины на пол в процессе отжима.

Ответ: $N = 833 + 673{,}2 \cos 39{,}8t$ Н (угол поворота барабана отсчитывается от положения, когда центр масс белья находится в нижней точке).

9.11. На вертикальной пластине E, связанной с плитой D, лежащей на горизонтальной гладкой плоскости, укреплен механизм эллипсографа. Кривошип OC длины l начинает вращаться с постоянной угловой скоростью ω.



К задаче 9.11.

Определить закон движения плиты, если массы ползунов A и B равны m, масса плиты с пластиной равна $16m$, а массы кривошипа и линейки пренебрежимо малы. В начальный момент плита D находилась в покое, ползун A занимал крайнее правое положение.

Ответ: $\delta(t) = \frac{l}{9}(1 - \cos\omega t)$.

9.12. Решить задачу 9.11 для случая, когда плита находится на гладкой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$. В начальный момент плита находилась в покое.

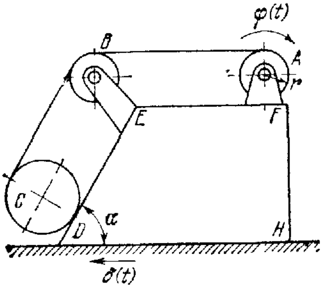
Ответ: $\delta(t) = \frac{gt^2}{4} + \frac{l}{9}(1 - \cos\omega t)$.

9.13. Механизм, рассмотренный в задаче 9.11, помещен на горизонтальную шероховатую плоскость.

Определить, при каком значении угловой скорости ω плита будет скользить по плоскости, если угол трения между плитой и плоскостью равен φ.

Ответ: $\omega > 3\sqrt{\frac{g}{l}\sin\varphi}$.

9.14. Призма $DEFH$ массы $6m$ находится на гладкой горизонтальной плоскости. По стороне DE призмы, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 60°$, катится без скольжения каток C массы $2m$ под воздействием нерастяжимой нити, обмотанной вокруг него. Барабан A массы m и радиуса r наматывает нить, вращаясь по закону $\varphi(t) = 0{,}5\varepsilon t^2$ рад.



К задаче 9.14.

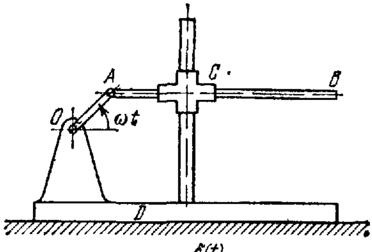
Учитывая, что блок B имеет массу m, определить закон движения призмы, если при $t = 0$ она находилась в покое.

Ответ: $\delta(t) = 0{,}025\varepsilon rt^2$.

9.15. Решить задачу 9.14, предположив, что перемещению призмы по горизонтальной плоскости препятствует пружина с коэффициентом жесткости c. В начальный момент времени призма находится в покое, пружина не нагружена.

Ответ: $\delta(t) = \frac{m}{2}\frac{\varepsilon r}{c} \times \left(1 - \cos\sqrt{\frac{c}{10m}}\, t\right)$.

9.16. На плите D, лежащей на горизонтальной гладкой плоскости, установлен механизм, в котором используются два наглухо соединенных между собой взаимно перпендикулярных ползуна C, обеспечивающих стержню AB по-



К задаче 9.16.

ступательное движение. Кривошип OA, представляющий собой однородный стержень длины l и массы m, вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω. Масса стержня AB равна $4m$, масса ползунов C равна $2m$, масса остальной конструкции $20m$.

Определить: 1) закон горизонтального движения плиты $\delta(t)$; 2) силу $N(t)$ давления плиты на плоскость; 3) угловую скорость вращения $\omega_{кр}$, при которой плита начинает подпрыгивать. Принять $\delta(0) = 0$.

Ответ: 1) $\delta(t) = \frac{l}{6}(1 - \cos \omega t)$;

2) $N(t) = 27\,mg - 6{,}5\,m\omega^2 l \sin \omega t$;

3) $\omega_{кр} = \sqrt{\frac{54g}{13l}}$.

9.17. Определить закон горизонтального движения плиты D механизма, рассмотренного в задаче 9.16, если со стороны горизонтальной плоскости на нее действует сила сопротивления $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}_D$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}_D$ — скорость плиты.

Ответ: $\delta(t) = \frac{1}{6} \frac{\omega l}{\omega^2 + n^2} \left[\omega\left(e^{-nt} - \cos \omega t\right) + n \sin \omega t\right]$, где $n = \mu/(27m)$.

§ 2. Теорема об изменении кинетического момента. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

9.18. Для ликвидации вращения орбитальной космической станции с угловой скоростью ω_0 вокруг оси Oz, являющейся одной из главных осей инерции, использованы два одинаковых управляющих ракетных двигателя, создающих пару сил тяги с плечом d в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Определить величину импульса тяги каждого двигателя, если известно, что момент инерции станции относительно оси Oz равен J.

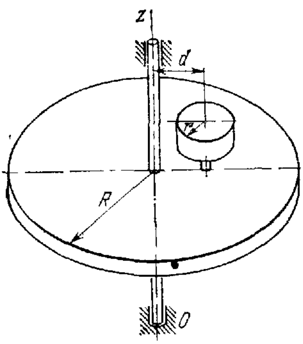
Ответ: $S = J\omega_0/d$.

9.19. Орбитальная космическая станция вращается вокруг оси Oz, являющейся одной из ее главных осей инерции, с угловой скоростью ω_0.

До какой угловой скорости относительно станции ω_r необходимо раскрутить находящийся внутри станции маховик, ось которого совпадает с осью вращения станции, чтобы угловая скорость вращения станции уменьшилась в два раза? Момент инерции маховика $J_1 = 0{,}01J$, где J — момент инерции самой станции относительно оси вращения. В начальный момент маховик относительно станции не вращался.

Ответ: $\omega_r = \frac{J + J_1}{J_1} \frac{\omega_0}{2} = 50{,}5\omega_0$.

9.20. Горизонтальная платформа, представляющая собой однородный диск радиуса R и массы M, вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω_0. На платформе на расстоянии $d=0{,}4R$ от оси вращения находится маховик, ось которого вертикальна. Он представляет собой однородный диск радиуса $r=0{,}2R$ и массы $m=0{,}1M$. В начальный момент маховик относительно платформы не вращался.



К задаче 9.20.

До какой угловой скорости ω_r относительно платформы необходимо раскрутить маховик, чтобы платформа остановилась? Сопротивлением вращению пренебречь.

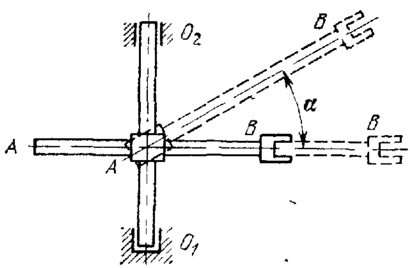
Ответ: $\omega_r=\left(\frac{M}{m}\frac{R^2}{r^2}+\frac{2d^2}{r^2}+1\right)\omega_0=259\omega_0.$

9.21. В условиях задачи 9.20 определить, какова будет угловая скорость ω_1 вращения платформы, если маховик раскрутить в сторону вращения платформы до относительной угловой скорости $\omega_r=49\omega_0$.

Ответ: $\omega_1=\frac{30}{37}\omega_0$.

9.22. Исполнительный механизм промышленного робота вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси. Штанга AB, несущая на конце B «схват», находится в положении, при котором ось вращения проходит через середину ее длины.

Какова будет скорость вращения ω_1, если штанга выдвинется горизонтально так, что конец A будет находиться на оси вращения? Как изменится скорость вращения, если после этого штанга повернется в вертикальной плоскости на угол α. При решении задачи предполагать, что момент привода уравновешивается моментом сил трения в опорах, штангу считать однородным стержнем массы m и длины l, «схват» — точечной массой M, сопротивлением воздуха пренебречь. Момент инерции остальных вращающихся частей механизма равен J.



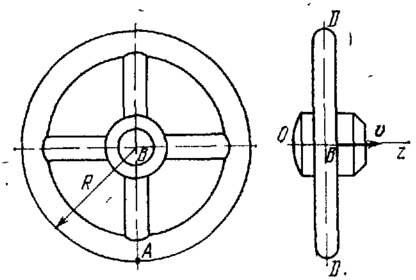
К задаче 9.22.

Ответ:

$$\omega_1=\frac{12J+ml^2+3Ml^2}{12J+4ml^2+12Ml^2}\omega_0;\quad \omega_2=\frac{12J+ml^2+3Ml^2}{12J+(4ml^2+12Ml^2)\cos^2\alpha}\omega_0.$$

9.23. Космическая станция с кольцевым и радиальными коридорами движется поступательно со скоростью **v**, перпендикулярной плоскости DD. Космонавт, находящийся в точке A, начинает двигаться по кольцевому коридору с относительной скоростью u.

Определить величину угловой скорости, которую приобретает в результате этого станция. Станцию считать симметричным телом массы M, центр масс ее B находится в точке пересечения оси симметрии Oz с плоскостью DD, радиус инерции станции относительно оси Oz $\rho = 0{,}8R$. При решении задачи космонавта считать материальной точкой массы $m = 0{,}005M$. Определить также приращение скорости центра масс станции B.



К задаче 9.23.

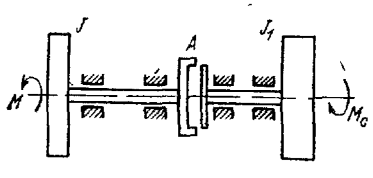
Ответ: $\omega = \dfrac{u}{R}\,\dfrac{1}{\dfrac{\rho^2}{R^2}\,\dfrac{M+m}{m}+1} = 0{,}00771\,\dfrac{u}{R}$; центр масс станции приобретает дополнительное движение в плоскости DD со скоростью $\Delta v_B = \dfrac{u}{\dfrac{M+m}{m}+\dfrac{R^2}{\rho^2}} = 0{,}00494u$.

9.24. Для создания искусственной тяжести в кольцевом коридоре космической станции, рассмотренной в задаче 9.23, ее раскрутили с помощью ракетных двигателей вокруг оси Oz до угловой скорости ω_0. В момент раскрутки космонавт находился в центре, на оси вращения станции.

Как изменится угловая скорость вращения станции, если космонавт, двигаясь по радиальному коридору, достигнет кольцевого коридора (точки A).

Ответ: $\omega = \dfrac{\omega_0}{1+\dfrac{m}{M+m}\,\dfrac{R^2}{\rho^2}} = 0{,}9923\omega_0$.

9.25. К ведущему валу привода, имеющему момент инерции J, приложен постоянный вращающий момент M. После того как вал приобретет угловую скорость ω_0, к нему подключается с помощью муфты сцепления A ведомый вал, имеющий момент инерции $J_1 = 3J$.



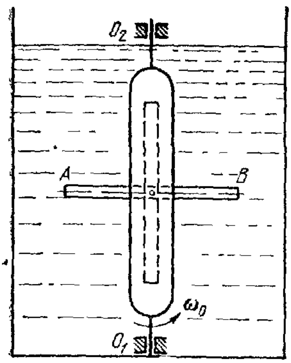
К задаче 9.25.

Учитывая, что на ведомый вал действует момент сил сопротивления, пропорциональный угловой скорости $M_c = \alpha\omega$, где $\alpha = \mathrm{const} > 0$, определить закон изменения угловой скорости системы после включения муфты. Считать, что муфта включается мгновенно.

Ответ: $\omega(t) = 0{,}25\omega_0 e^{-\frac{\alpha}{4J}t} + \frac{M}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{4J}t}\right)$.

9.26. Решить задачу 9.25, полагая, что момент сопротивления на ведомом валу пропорционален квадрату угловой скорости $M_c = \beta\omega^2$, где $\beta = \mathrm{const} > 0$. Выяснить, при каком значении $\beta_{кр}$ угловая скорость системы после включения муфты будет оставаться постоянной. Определить угол поворота системы как функцию времени t.

Ответ: $\omega(t) = \sqrt{\frac{M}{\beta}}\,\frac{\omega_0 \operatorname{ch}\gamma t + 4\sqrt{\frac{M}{\beta}}\operatorname{sh}\gamma t}{\omega_0 \operatorname{sh}\gamma t + 4\sqrt{\frac{M}{\beta}}\operatorname{ch}\gamma t}$, где $\gamma = \frac{\sqrt{M\beta}}{4J}$, $\beta_{кр} = 16M/\omega_0^2$; $\varphi(t) = \frac{4J}{\beta}\ln\left(\operatorname{ch}\gamma t + \frac{\omega_0}{4}\sqrt{\frac{\beta}{M}}\operatorname{sh}\gamma t\right)$.



К задаче 9.27.

9.27. Для торможения вращающегося в жидкости тела, имеющего момент инерции J и угловую скорость вращения ω_0 используется гидродинамический тормоз, представляющий собой стержень AB, поворачивающийся вокруг оси, перпендикулярной оси вращения, и выходящий из тела через специальные прорези.

Пренебрегая массой стержня AB и полагая, что момент сил сопротивления при включенном тормозе пропорционален угловой скорости: $M_c = \alpha\omega$, где $\alpha = \mathrm{const} > 0$, определить закон изменения угловой скорости и предельное значение угла поворота тела.

Ответ: $\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{J}t}$, $0 \leqslant t < \infty$; $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = \frac{J}{\alpha}\omega_0$.

9.28. Решить задачу 9.27 предполагая, что наряду с моментом сопротивления $M_c = \alpha\omega$, пропорциональным угловой скорости, на тело действует постоянный момент сил сухого трения в опорах, равный $k\alpha\omega_0$, где $k = \mathrm{const} > 0$. Определить закон изменения угловой скорости, время, необходимое для остановки тела, и угол, на который повернется тело до остановки.

Ответ: $\omega(t) = \omega_0\ (1 + k)\ e^{-\frac{\alpha}{J}t} - k\omega_0$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$; $t_1 = \frac{J}{\alpha}\ln\frac{1+k}{k}$; $\varphi(t_1) = \frac{J}{\alpha}\omega_0\left(1 - k\ln\frac{1+k}{k}\right)$.

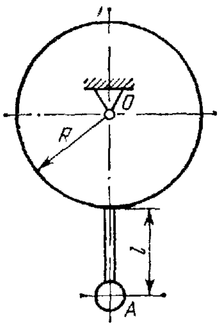
9.29. Решить задачу 9.27, полагая, что масса стержня равна m, а его длина $l=\sqrt{3J/m}$. Временем включения тормоза пренебречь.

Ответ: $\omega(t)=\frac{12\omega_0 J}{12J+ml^2}\exp\left(-\frac{12\alpha t}{12J+ml^2}\right)=0{,}8\omega_0\exp\left(-\frac{0{,}8\alpha t}{J}\right)$, $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=J\omega_0/\alpha$.

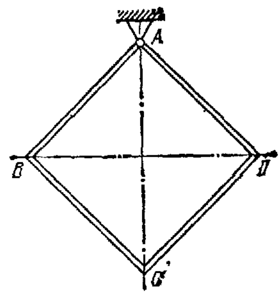
9.30. Однородный диск радиуса $R=0{,}05$ м и массы M может вращаться вокруг горизонтальной оси O, проходящей через его центр. К диску приварен стержень длины $l=R$, имеющий на конце точечный груз массы m.

Полагая $M=8m$, определить закон вращения получившегося физического маятника, если его отклонили от положения равновесия на малый угол φ_0 и отпустили без начальной скорости. Массой стержня пренебречь.

Ответ: $\varphi(t)=\varphi_0\cos 7t$.



К задаче 9.30.



К задаче 9.31.

9.31. Квадратная рамка $ABCD$, сваренная из тонких однородных стержней, может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку A. Рамку отклонили от положения равновесия на малый угол φ_0 и отпустили без начальной скорости.

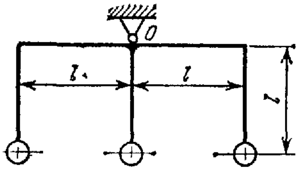
Определить закон движения рамки, если ее диагональ d равна 0,96 м.

Ответ: $\varphi(t)=\varphi_0\cos 3{,}5t$.

9.32. Определить частоту малых колебаний рамки, рассмотренной в задаче 9.31, если ее ось вращения совпадает с серединой одной из сторон.

Ответ: $\omega_0=\sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{7}\frac{g}{d}}=3{,}518$ рад/с.

9.33. Три шарика одинаковой массы m прикреплены к нижним концам сварной стержневой конструкции, имеющей возможность вращаться вокруг горизонтальной оси O.



К задаче 9.33.

Пренебрегая размерами шариков и массой конструкции, определить частоту малых колебаний системы, если $l = 0{,}48$ м.

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{5l}} = 3{,}5$ рад/с.

9.34. Решить задачу 9.33 полагая, что каждый из однородных стержней длины l, составляющих стержневую конструкцию, имеет массу m.

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\frac{27g}{52l}} = 3{,}256$ рад/с.

9.35. При включении вентилятора на него, наряду с моментом от двигателя, действует момент сил аэродинамического сопротивления лопастей, пропорциональный квадрату угловой скорости, $M_c = \alpha\omega^2$, где $\alpha = \text{const} > 0$.

Считая момент двигателя M постоянным, определить угол поворота вентилятора как функцию времени, если момент инерции его относительно оси вращения равен J.

Ответ: $\varphi(t) = \frac{J}{\alpha} \ln \operatorname{ch} \frac{\sqrt{M\alpha}}{J} t$.

9.36. После выключения двигателя вентилятор, вращавшийся с угловой скоростью ω_0, тормозится силами аэродинамического сопротивления, момент которых пропорционален квадрату угловой скорости $M_c = \alpha\omega^2$, где $\alpha = \text{const} > 0$.

Определить время, за которое угловая скорость вентилятора уменьшится вдвое, и угол, на который повернется вентилятор за это время, если его момент инерции относительно оси вращения равен J.

Ответ: $t_1 = \frac{J}{\alpha\omega_0}$, $\varphi = \frac{J}{\alpha} \ln 2$.

9.37. После того как выключен двигатель вентилятора, рассмотренного в задаче 9.35, при торможении, наряду с моментом аэродинамического сопротивления $M_c = \alpha\omega^2$, действует постоянный момент трения в опорах, который задан в виде $L_{\text{тр}} = k^2\alpha\omega_0^2$, где $k = \text{const} > 0$.

Определить время, необходимое для остановки вентилятора, и угол, на который он повернется в процессе торможения.

Ответ: $t_1 = \frac{J}{\alpha k\omega_0} \operatorname{arctg} \frac{1}{k}$, $\varphi = \frac{J}{2\alpha} \ln \frac{1 + k^2}{k^2}$.

9.38. Твердое тело может вращаться вокруг вертикальной оси. Спиральная пружина с коэффициентом жесткости c создает при его повороте восстанавливающий момент, пропорциональный углу поворота. Тело повернули из положения равновесия на угол φ_0 и отпустили без начальной скорости.

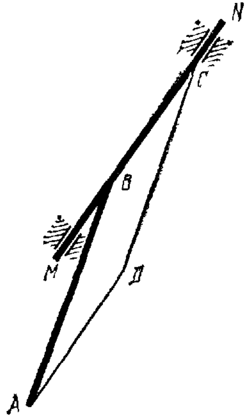
Определить угловую скорость, которую будет иметь тело в момент первого прохождения положения равновесия, если при движении на него действует момент сопротивления, пропорциональный квадрату угловой скорости $M_c = \alpha\omega^2$, где $\alpha = \text{const} > 0$. Момент инерции тела относительно оси вращения равен J.

Ответ: $\omega^2 = \left(\frac{c}{\alpha}\varphi_0 + \frac{cJ}{2\alpha^2}\right)\left(1 - e^{-\frac{2\alpha}{J}\varphi_0}\right) - \frac{c}{\alpha}\varphi_0$.

9.39. Однородная пластина $ABCD$ массы m и длины $AB = l$, имеющая возможность вращаться вокруг горизонтальной оси MN, поднята до горизонтального положения и отпущена без начальной скорости.

Определить угловую скорость пластины в нижнем положении, если на пластину в процессе движения действует момент сил аэродинамического сопротивления, пропорциональный квадрату угловой скорости $M_c = \alpha\omega^2$, где $\alpha = \text{const} > 0$.

Ответ: $$\omega^2 = \frac{mgl}{J^2 + 4\alpha^2}\left(J - 2\alpha e^{-\frac{\alpha\pi}{J}}\right),$$
где $J = ml^2/3$.

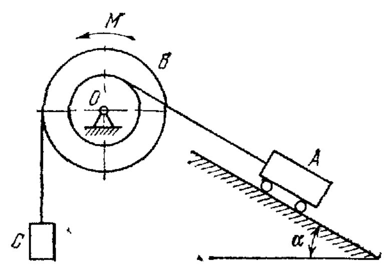


К задаче 9.39.

9.40. Решить задачу 9.39, полагая, что в начальный момент пластина находится в верхнем вертикальном положении и опускается без начальной скорости.

Ответ: $\omega^2 = \frac{mglJ}{J^2 + 4\alpha^2}\left(1 + e^{-2\alpha\pi/J}\right)$, где $J = ml^2/3$.

9.41. Вагонетка A массы m_1 поднимается по наклонному слипу с углом наклона α при помощи нерастяжимого троса, намотанного на ступень радиуса r двухступенчатого ворота B, имеющего массу m и радиус инерции относительно оси вращения ρ. На ступень ворота радиуса R намотан другой нерастяжимый трос, к концу которого подвешен противовес C массы m_2. Ворот приводится в движение постоянным вращающим моментом M.



К задаче 9.41.

Пренебрегая массой тросов, массой колес вагонетки, трением в их осях и в подшипниках ворота, определить ускорение a вагонетки.

Ответ: $$a = \frac{M + g(m_2R - m_1r\sin\alpha)}{m\rho^2 + m_1r^2 + m_2R^2}r.$$

§ 3. Теорема об изменении кинетической энергии

9.42. Автомобиль, двигающийся со скоростью 60 км/ч, при экстренном торможении проходит тормозной путь длины 30 м. Как изменится длина тормозного пути, если автомобиль будет двигаться со скоростью 90 км/ч? При решении задачи считать, что со стороны дороги на автомобиль с заторможенными колесами действует постоянная сила трения скольжения; сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: увеличится в 2,25 раза и будет равен 67,5 м.

9.43. В условиях задачи 9.42 определить, каков будет тормозной путь автомобиля, если при скорости в 60 км/ч он тормозит на уклоне крутизной в 10° ($\sin 10° = 0{,}174$, $\cos 10° = 0{,}985$).

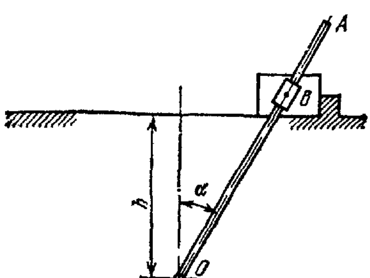
Ответ: 48,7 м.

9.44. Центру C цилиндрического катка радиуса r, имеющего возможность катиться без скольжения по наклонной плоскости, сообщена скорость $\mathbf{v}_0$, направленная параллельно плоскости вверх.

Какова будет скорость центра катка, когда он вернется в исходное положение, если коэффициент трения качения равен δ, а угол наклона плоскости к горизонту α.

Ответ: $v^2 = v_0^2 \dfrac{r \operatorname{tg}\alpha - \delta}{r \operatorname{tg}\alpha + \delta}$.

9.45. В кулисном механизме однородный стержень OA длины 1,2 м и массы 5 кг приводит в движение по горизонтальной плоскости груз B массы 15 кг. В начальном положении угол отклонения стержня от вертикали $\alpha = 30°$ и механизм находится в покое.



К задаче 9.45.

Определить угловую скорость ω, которую надо сообщить стержню, чтобы он достиг вертикального положения. Расстояние от оси вращения стержня O до плоскости $h = 0{,}9$ м. Рассеянием энергии за счет сил трения пренебречь.

Ответ: $\omega = 0{,}573$ рад/с.

9.46. В условиях задачи 9.41 определить скорость вагонетки v в зависимости от ее перемещения s, полагая, что движение начинается из состояния покоя.

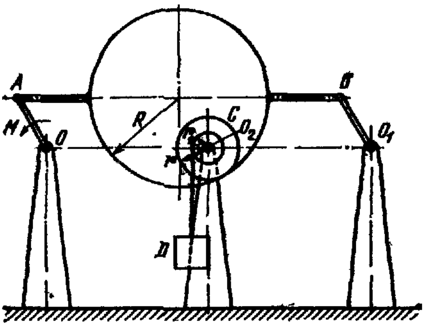
Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{M + g\,(m_2R - m_1 r \sin\alpha)}{m\rho^2 + m_1 r^2 + m_2 R^2}\, 2rs}$.

9.47. В шарнирно-параллелограммном механизме с внутренним зацеплением подъем груза D массы $10m$ происходит за счет постоянного момента $M = 40mgr$, приложенного к кривошипу OA.

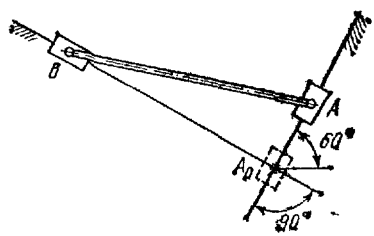
Определить скорость груза после того, как кривошип OA повернется из состояния покоя на один оборот, если кривошипы OA и O_1B представляют собой однородные стержни длины $l = 2r$ и массы m каждый, масса звена AB равна $3m$. Блок-шестерня C имеет массу $3m$ и радиус инерции относительно собственной оси вращения $\rho = 2r/3$. Кроме того, $R = 3r$ и $r_1 = 0{,}5r$. Трением в подшипниках пренебречь.

Ответ: $v_D = 2\sqrt{\pi g r}$.

9.48. Ползуны A и B одинаковой массы m, шарнирно соединенные однородным стержнем AB длины l, имеющим также массу m, могут скользить без трения по взаимно перпендикулярным направляющим, расположенным в вертикальной плоскости. В положении A_0 ползуну A сообщается начальная скорость v_0.



К задаче 9.47.

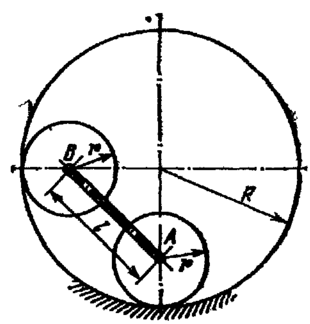


К задаче 9.48.

Определить, при каком значении начальной скорости стержень достигнет горизонтального положения.

Ответ: $v_0 = \frac{3}{4}\sqrt{2gl\left(\sqrt{3} - 1\right)}$.

9.49. Два однородных цилиндрических катка радиуса r и массы m каждый, оси которых шарнирно связаны однородным стержнем AB длины $l = 2\sqrt{2}\,r$ и массы $m_1 = 0{,}5m$, могут катиться без скольжения внутри цилиндра радиуса $R = 3r$ с горизонтальной образующей.



К задаче 9.49.

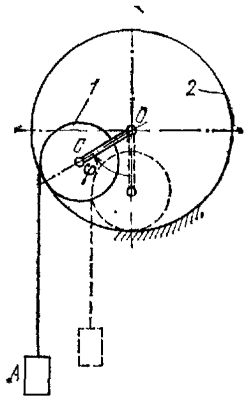
Определить, пренебрегая трением качения, скорости осей катков в тот момент, когда стержень AB займет горизонтальное положение, если в начальный момент катки были отведены в положение, указанное на рисунке, и отпущены без начальной скорости.

Ответ: $v_A = v_B = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right) g r} = 0{,}788\sqrt{gr}$.

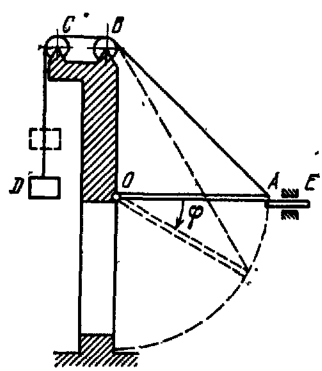
9.50. В планетарном механизме, расположенном в вертикальной плоскости, шестерня *1* находится во внутреннем зацеплении с неподвижной шестерней *2*. С шестерней *1* жестко связан барабан того же радиуса, на который намотана нерастяжимая нить с грузом A массы m на свободном конце.

Чему должна быть равна суммарная масса шестерни *1* и связанного с ней барабана, чтобы механизм остановился после того, как кривошип OC повернется на угол φ. В начальный момент шестерня *1* находилась в покое в крайнем нижнем положении. При решении задачи, считая нить достаточно длинной, пренебречь маятниковым движением груза. Массу кривошипа и нити не учитывать.

Ответ: $m_1 = m \dfrac{\varphi - 1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}$.



К задаче 9.50.



К задаче 9.51.

9.51. Затвор OA, закрывающийся под действием собственного веса, представляет собой однородную прямоугольную пластину массы m, имеющую возможность вращаться вокруг горизонтальной оси O. Для уменьшения удара затвора об упоры в нижнем положении с ним связан посредством троса, перекинутого через блоки B и C, противовес D массы m_1. Известно, что $OA = OB = l$. Затвор удерживается в горизонтальном положении фиксатором E.

Определить угловую скорость ω затвора при его опускании после снятия фиксатора как функцию угла поворота φ. При каком значении m_1 угловая скорость затвора в нижнем положении будет в два раза меньше по сравнению со случаем отсутствия противовеса? При решении задачи трос считать нерастяжимым, массой блоков и троса, трением в опорах, а также сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\omega^2 = \frac{6g}{l} \frac{m \sin\varphi - 2\sqrt{2}\, m_1 (\sqrt{1+\sin\varphi} - 1)}{2m + 3m_1 (1 - \sin\varphi)}$, $m_1 = \frac{3m}{8(2-\sqrt{2})} = 0{,}64m$.

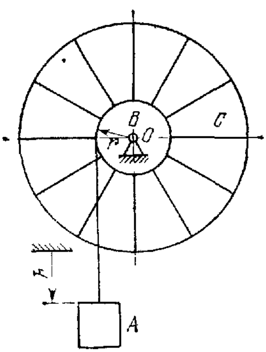
9.52. Используя решение задачи 9.51, выяснить, возможно ли подобрать массу противовеса m_1 таким образом, чтобы угловая скорость затвора в нижнем положении равнялась нулю.

Ответ: нет; для этого необходимо иметь $m_1 = 0{,}854m$, но для того, чтобы затвор после снятия фиксатора двигался вниз, должно быть $m_1 < 0{,}707m$.

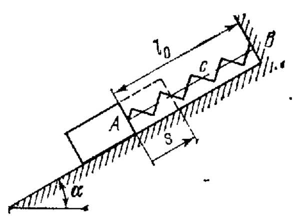
9.53. Для обеспечения равномерности опускания груза A массы m используется пневматический тормоз — крыльчатка, насаженная на барабан, с которого сматывается трос, несущий груз. Определить скорость груза как функцию его перемещения h, если момент инерции барабана с крыльчаткой равен J, радиус барабана r и при вращении крыльчатки возникает момент сопротивления, пропорциональный квадрату угловой скорости $M_c = \alpha\omega^2$, где $\alpha = \text{const} > 0$. Движение начинается из состояния покоя. Массой троса и сопротивлением воздуха движению груза пренебречь.

Ответ: $v_A^2 = \frac{mgr^3}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{2\alpha h}{r(mr^2+J)}}\right)$.

9.54. Груз A массы m находится на гладкой наклонной плоскости с углом наклона α и связан пружиной с коэффициентом жесткости c с неподвижной точкой B. Пружину сжимают из свободного состояния на величину s, после чего груз отпускают без начальной скорости.



К задаче 9.53.



К задаче 9.54.

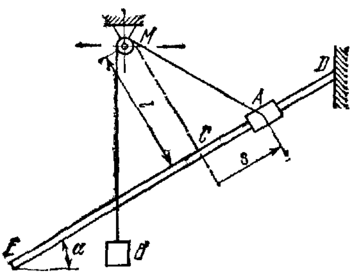
Определить: 1) скорость груза в тот момент, когда его удаление от точки B будет равно длине свободной пружины, 2) максимальное растяжение пружины.

Ответ: 1) $v = \sqrt{\left(2g\sin\alpha + \frac{cs}{m}\right)s}$, 2) $\lambda = s + \frac{2mg\sin\alpha}{c}$.

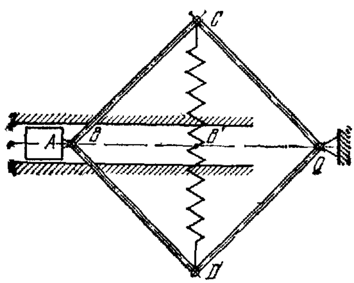
9.55. Груз A массы m_1, имеющий возможность скользить вдоль гладкого стержня DE, наклоненного под углом α к горизонту, связан с помощью нерастяжимой нити, перекинутой через блок M, с грузом B массы m_2. В начальный момент груз A отведен от положения C, в котором нить перпендикулярна стержню, вверх на величину s и отпущен без начальной скорости.

Обозначив через k отношение $\frac{m_1 \sin\alpha}{m_2}$, установить, при каких значениях k груз A сможет остановиться, пройдя от положения C некоторое расстояние λ вниз, и определить λ как функцию k и s. Расстояние от блока M до стержня DE равно l. Размерами блока, массой блока и нити пренебречь.

Ответ: $k < 1$; $\lambda = \frac{s(1+k^2) + 2k\sqrt{l^2+s^2}}{1-k^2}$.



К задаче 9.55.



К задаче 9.56.

9.56. Ползун A массы M, имеющий возможность двигаться в горизонтальных направляющих, связан со стержневым ромбом $BCOD$, образованным однородными стержнями длины l и массы m каждый. Пружина с коэффициентом жесткости c связывает вершины C и D ромба. Механизм находится в покое (пружина CD не нагружена), когда угол COD равен 90°.

Какую начальную скорость надо сообщить ползуну, чтобы вершина ромба B переместилась в положение B', если $BO = 2B'O$. Трение в шарнирах и направляющих не учитывать.

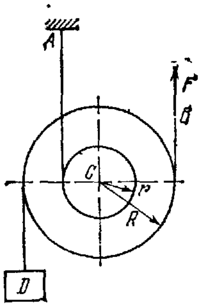
Ответ: $v_A^2 = 0{,}625\,\frac{cl^2}{3M+5m}$.

9.57. Двухступенчатый барабан массы $m_1 = 15$ кг связан с неподвижной точкой A посредством нерастяжимой нити, намотанной на малую ступень барабана радиуса r. Большая ступень барабана радиуса $R = 2r$ обмотана двумя нерастяжимыми нитями; к одной из них подвешен груз D массы $m_2 = 15$ кг, а к концу другой приложена сила $F = 196$ Н.

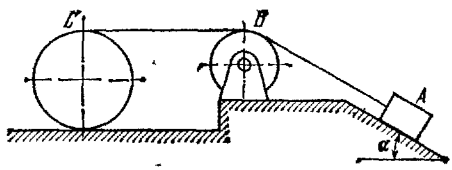
Найти скорость и ускорение груза D после того, как он опустится на величину $s = 1$ м. Радиус инерции барабана относительно оси, проходящей через его центр C, равен $\rho = \sqrt{Rr}$; нити остаются в процессе движения вертикальными; движение начинается из состояния покоя. Массой нитей пренебречь.

Указание. Для определения ускорения воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

Ответ: $v_D = 4{,}43$ м/с, $a_D = 9{,}8$ м/с^2.



9.58. Груз A массы $m_1 = 40$ кг, скользящий по гладкой наклонной плоскости с углом $\alpha = 30°$, прикреплен к нерастяжимой нити, переброшенной через блок B массы



К задаче 9.57. К задаче 9.58.

$m_2 = 4$ кг и намотанной на каток C. Каток, представляющий собой однородный сплошной цилиндр массы $m_3 = 80$ кг, имеет возможность катиться по горизонтальной плоскости без скольжения.

Пренебрегая массой нити, трением качения и трением в оси блока, определить скорость груза A после того, как он переместится по наклонной плоскости на расстояние $s = 1$ м. В начальный момент система находилась в покое; масса блока равномерно распределена по ободу.

Ответ: $v_A = 4\sqrt{\dfrac{m_1 \sin 30°}{8m_1 + 8m_2 + 3m_3} gs} = 2{,}3$ м/с.

9.59. Решить задачу 9.58 с учетом трения качения катка по плоскости, если отношение коэффициента трения качения δ к радиусу катка R равно 0,05.

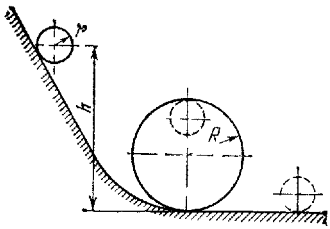
Ответ: $v_A = 4\sqrt{\dfrac{m_1 \sin 30° - 0{,}5m_3\delta/R}{8m_1 + 8m_2 + 3m_3} gs} = 2{,}18$ м/с.

9.60. Желоб образует в вертикальной плоскости петлю в виде кругового кольца радиуса R.

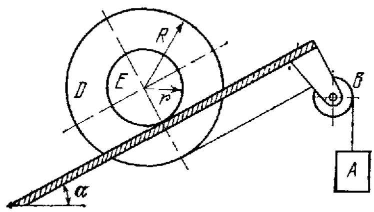
Определить начальную высоту h центра масс, необходимую для того, чтобы скатывающееся тело обошло всю петлю, не отделяясь от нее, если в качестве тела используются: 1) однородный диск радиуса r; 2) кольцо радиуса r с массой, равномерно распределенной по ободу; считать, что качение происходит без скольжения. Трением качения и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $h \geqslant \frac{1}{2}\left[\left(5 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)R - \left(3 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)r\right]$, где ρ — радиус инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости кольца; $h_1 = 2{,}75R - 1{,}75r$; $h_2 = 3R - 2r$.

9.61. Груз A массы $m_1 = 60$ кг прикреплен к нерастяжимой нити, переброшенной через блок B — однородный диск массы $m_2 = 6$ кг и намотанной на барабан D катка E, который может катиться без скольжения по двум параллельным рельсам, наклоненным к горизонту на угол $\alpha = 30°$. Барабан D радиуса $R = 0{,}4$ м жестко связан с катком E радиуса $r = 0{,}2$ м, их общая масса равна $m_3 = 100$ кг, радиус инерции относительно оси катка $\rho = 0{,}3$ м и центр масс лежит на оси катка.



К задаче 9.60.



К задаче 9.61.

Пренебрегая трением качения, трением в оси блока и массой нити, определить скорость груза A после того, как он опустится на $s = 1$ м. В начальный момент система находилась в покое.

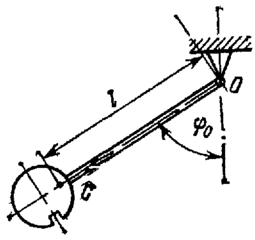
Ответ: $v_A = \sqrt{2gs(R-r)\dfrac{m_1(R-r)+m_3 r\sin\alpha}{(m_1+0{,}5m_2)(R-r)^2+m_3(\rho^2+r^2)}} = 2{,}36$ м/с.

§ 4. Смешанные задачи

9.62. Грузовой автомобиль везет в кузове тяжелую бетонную плиту, двигаясь со скоростью v.

При каком минимальном тормозном пути (торможение считать постоянным) плита не сместится относительно кузова, если коэффициент трения скольжения между плитой и кузовом равен f.

Ответ: $s_{\min} = \dfrac{v^2}{2gf}$.



К задаче 9.63.

9.63. Маятник ударного копра, используемого для испытания материалов, может вращаться вокруг горизонтальной оси O. Перед ударом его отклоняют от положения равновесия на угол φ_0 и отпускают без начальной скорости.

Определить давление на ось O маятника в начальный момент движения, если его масса равна m, радиус инерции относительно оси вращения ρ, расстояние от центра масс маятника C до оси вращения l.

Ответ: $R_O = mg\sqrt{1 - \frac{l^2}{\rho^2}\left(1 - 0{,}5\frac{l^2}{\rho^2}\right)(1 - \cos 2\varphi_0)}$.

9.64. Маятник ударного копра, рассмотренный в задаче 9.63, отклоняют от положения равновесия на угол $\varphi_0 = 90°$ и отпускают без начальной скорости.

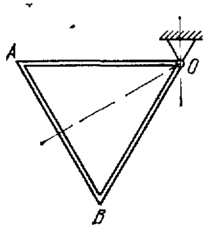
Определить давление на ось маятника как функцию угла φ отклонения его от положения равновесия. Трением в оси и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $R_O = mg\sqrt{1 + \frac{l^2}{\rho^2} + 2{,}5\frac{l^4}{\rho^4} + 3\frac{l^2}{\rho^2}\left(1 + 0{,}5\frac{l^2}{\rho^2}\right)\cos 2\varphi}$.

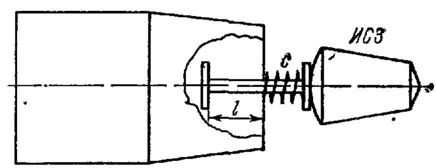
9.65. Треугольник OAB, стороны которого представляют собой однородные тонкие стержни равной длины, массы m каждый, может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через вершину O перпендикулярно плоскости OAB. Из положения, когда сторона OA горизонтальна, треугольник отпускают без начальной скорости.

Определить давление на ось O в начальный момент движения и в момент, когда сторона AB станет горизонтальной.

Ответ: $R_1 = mg\sqrt{3}$, $R_2 = 5mg$.



К задаче 9.65.



К задаче 9.66.

9.66. Для отделения искусственного спутника Земли (ИСЗ) массы m от последней ступени ракеты-носителя массы M используется пружинный толкатель, рабочим элементом которого является пружина, коэффициент жесткости которой равен c.

Определить относительную скорость v_r ИСЗ после разделения, если ход штока толкателя равен l и по окончании движения толкателя пружина не напряжена. Разделение происходит в пустоте после окончания работы двигательной установки последней ступени. Зависит ли относительная скорость ИСЗ от скорости, приобретенной последней ступенью вместе со спутником к моменту разделения?

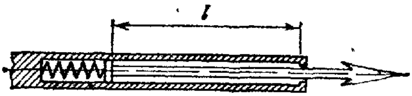
Ответ: $v_r = l\sqrt{\frac{c(M+m)}{Mm}}$; не зависит.

9.67. В пружинном ружье для подводной охоты выброс гарпуна массы m происходит за счет пружинного толкателя, имеющего ход l. Попав в воду, гарпун преодолевает силу сопротивления, пропорциональную скорости движения, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где $\mu = \text{const} > 0$.

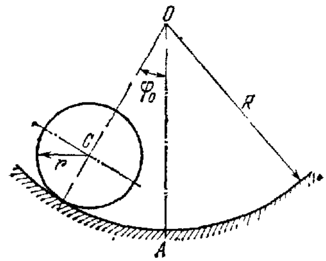
Какой коэффициент жесткости c должна иметь пружина толкателя, чтобы после горизонтального выстрела гарпун преодолел расстояние L. У незаряженного ружья пружина сжата на величину λ, равную $l/2$. Считать, что после выстрела гарпун движется по горизонтальной прямой, движением ружья (отдачей) пренебречь.

Ответ: $c = \dfrac{\mu^2 L^2}{2ml^2}$.

9.68. Каток, представляющий собой однородный сплошной цилиндр радиуса r, может катиться без скольжения



К задаче 9.67.



К задаче 9.68.

внутри цилиндрической лунки радиуса R с горизонтальной образующей.

Определить скорость оси катка в тот момент, когда он проходит нижнее положение, если каток был отведен из этого положения на угол $AOC = \varphi_0$ и отпущен без начальной скорости. Коэффициент трения качения равен δ.

Ответ:

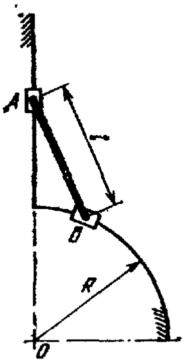
$$v_C^2 = \frac{4g(R-r)}{9+16\alpha^2}\left[(3-4\alpha^2)\left(1 - e^{-\frac{4}{3}\alpha\varphi_0}\cos\varphi_0\right) - 7\alpha e^{-\frac{4}{3}\alpha\varphi_0}\sin\varphi_0\right],$$

где $\alpha = \delta/r$.

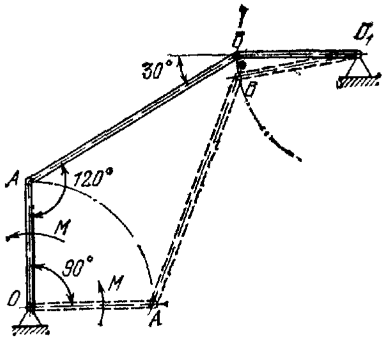
9.69. В механизме, расположенном в вертикальной плоскости, стержень AB длины $l = 1$ м и массы $M = 6$ кг имеет на концах ползуны A и B, один из которых A скользит по вертикальной направляющей, а другой по дуге окружности радиуса $R = l = 1$ м с центром в точке O, лежащей на одной вертикали с ползуном A. Стержень начинает движение из вертикального положения.

Определить скорость ползуна A, а также количество движения механизма в тот момент, когда угол OAB будет равен 30°. Ползуны считать точечными массами $m = 1$ кг, трением в направляющих и шарнирах пренебречь.

Ответ: $v_A = 6\sqrt{\dfrac{2m+M}{24m+10M}\, gl\,(1-\cos 30°)} = 2{,}12$ м/с, $Q = (m + 0{,}5M)\, v_A \sqrt{3} = 14{,}7$ Н·с.



К задаче 9.69.

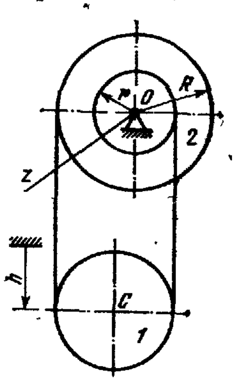


К задаче 9.70.

9.70. В положении, показанном на рисунке пунктиром, к кривошипу OA шарнирного четырехзвенника $OABO_1$, расположенного в горизонтальной плоскости, приложен постоянный момент M, после чего механизм пришел в движение из состояния покоя.

Определить угловую скорость кривошина OA и количество движения механизма в тот момент, когда кривошип повернется на угол в 90° и механизм займет положение, показанное на рисунке. Звенья механизма считать однородными стержнями с длинами $OA = l$, $AB = 2l$, $BO_1 = l$ и массами m, $2m$ и m соответственно; трением в шарнирах пренебречь.

Ответ: $\omega = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{M\pi}{m}}$, $\quad Q = 3m\omega l = 1{,}5\sqrt{\pi M m}$.



К задаче 9.71.

9.71. Нерастяжимая нить, охватывающая шкив 1, намотана на ступени двухступенчатого барабана 2. Масса шкива, представляющего собой однородный сплошной цилиндр, равна $2m$; масса барабана равна m, а его радиус инерции относительно оси вращения $\rho = \sqrt{Rr}$, причем $R = 2r$.

Считая, что нить по шкиву и ступеням не скользит, определить скорость центра шкива — точки C и кинетический момент системы относительно оси вращения Oz в тот момент, когда центр шкива опустится вниз на величину h. В начальный момент система находилась в покое.

Ответ: $v_C = 2\sqrt{\frac{gh}{19}}$, $K_{Oz} = 9{,}5 m v_C r = mr\sqrt{19gh}$.

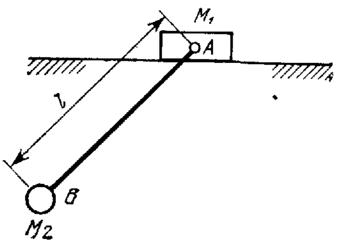
9.72. В условиях задачи 9.71 определить натяжение левой и правой ветвей нити и реакцию в оси O.

Ответ: $T_{\text{лев}} = \frac{14mg}{19}$, $T_{\text{пр}} = \frac{20mg}{19}$, $R_O = \frac{53mg}{19}$.

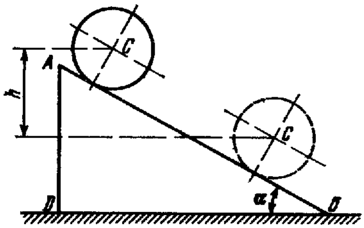
9.73. Эллиптический маятник состоит из ползуна M_1 массы m, находящегося на горизонтальной гладкой плоскости, и шарика M_2 той же массы m, соединенного с ползуном стержнем AB длины l, имеющим возможность вращаться вокруг оси A, связанной с ползуном и перпендикулярной плоскости рисунка. Стержень AB приводят в горизонтальное положение и отпускают без начальной скорости.

Определить угловую скорость стержня в момент, когда шарик будет находиться в крайнем нижнем положении. Размерами шарика и массой стержня AB пренебречь.

Ответ: $\omega = 2\sqrt{g/l}$.



К задаче 9 73.



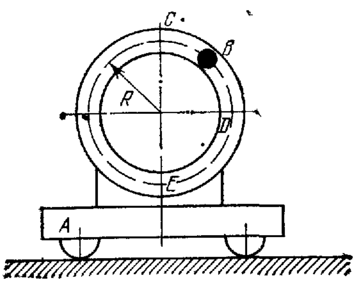
К задаче 9 74.

9.74. На гладкой горизонтальной плоскости помещена треугольная призма ABD массы m с углом $\alpha = 30°$. По грани призмы AB катится без скольжения однородный круглый цилиндр массы m.

Определить скорость центра цилиндра C в тот момент, когда он опустится на высоту h. В начальный момент призма и цилиндр находились в покое.

Ответ: $v_C = \sqrt{7gh}/3$.

9.75. Тележка A массы M может перемещаться по горизонтальной плоскости Материальная точка B массы m помещена в круговую трубку радиуса R, связанную с тележкой. В начальный момент точка находится в верхней позиции C, и вся система покоится



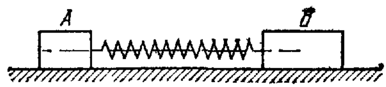
К задаче 9 75.

Определить скорость тележки и абсолютную скорость точки для двух моментов времени, когда точка находится в позициях D и E. Сопротивлением движению точки в трубке и тележки по плоскости пренебречь.

Ответ. в точке D $v_A = 0$, $v_B = \sqrt{2gR}$; в точке E

$$v_A = 2m\sqrt{\frac{gR}{M(M+m)}}, \quad v_B = 2M\sqrt{\frac{gR}{M(M+m)}}.$$

9.76. Два груза A и B, имеющие массы m и $2m$ соответственно, связаны между собой пружиной с коэффициентом жесткости c и находятся на горизонтальной гладкой плоскости. В начальный момент грузы развели в стороны, так что пружина растянулась из свободного состояния на величину λ, и отпустили без начальной скорости.



К задаче 9.76.

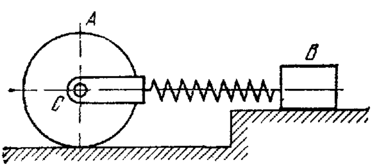
Определить скорость груза A в тот момент, когда деформация пружины станет равна нулю.

Ответ: $v_A = \lambda \sqrt{\frac{2c}{3m}}$.

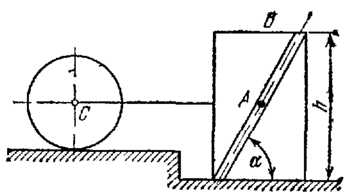
9.77. Ось C однородного сплошного цилиндра A массы $2m$, имеющего возможность катиться без скольжения по горизонтальной шероховатой плоскости, связана при помощи пружины с коэффициентом жесткости c с грузом B массы m, лежащим на горизонтальной гладкой плоскости. В начальный момент пружина растянута на величину λ, после чего цилиндр и груз отпущены без начальной скорости.

Определить скорость оси цилиндра C в тот момент, когда деформация пружины станет равна нулю. Трением качения пренебречь.

Ответ: $v_C = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{c}{3m}}$.



К задаче 9.77.



К задаче 9.78.

9.78. Материальная точка A массы m, опускаясь вниз по прямолинейному пазу тела B, наклоненному к горизонту под углом $\alpha = 60°$, приводит в движение тело B массы $4m$, которое может двигаться по горизонтальной гладкой плоскости. С телом B связан нерастяжимой нитью однородный сплошной цилиндр массы $2m$, который может катиться по шероховатой горизонтальной плоскости без скольжения.

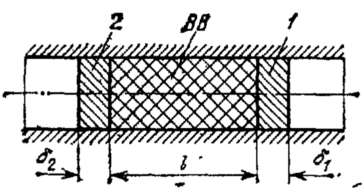
Пренебрегая трением качения и сопротивлением движению материальной точки в пазе, определить скорость тела B в тот момент, когда точка A опустится в крайнее нижнее положение. В начальный момент времени точка занимала крайнее верхнее положение, и вся система находилась в покое. Высота тела B равна h.

Ответ: $v_B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gh}{31}}$.

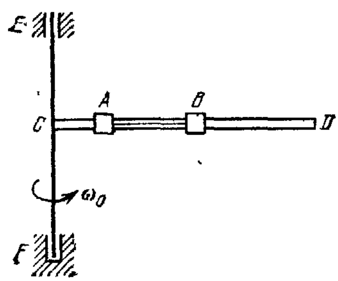
9.79. *Задача Гарни.* В жесткой трубе находятся абсолютно твердые тела *1* и *2* с плотностями и длинами, соответственно равными ρ_1, δ_1 и ρ_2, δ_2, а также взрывчатое вещество (ВВ), имеющее плотность ρ_0, длину l и энергию единицы массы E_0.

1) При условии, что вся потенциальная энергия ВВ переходит в кинетическую энергию движения тел и продуктов взрыва, выделение энергии мгновенное, и частицы продуктов взрыва имеют скорость, изменяющуюся по длине ВВ по линейному закону, определить скорости метания тел. 2) Определить скорость метания первого тела в случае отсутствия второго. Использовать обозначения: $\frac{\rho_0 l}{\rho_1\delta_1} = \eta_1$, $\frac{\rho_0 l}{\rho_2\delta_2} = \eta_2$.

Ответ: 1) $\frac{v_1^2}{E_0} = \frac{6\eta_1}{3 + \eta_1 + \frac{\eta_2}{\eta_1}\frac{\eta_1+2}{(\eta_2+2)^2}(\eta_1 + 2\eta_2 + 6)}$, $v_2 = \frac{\eta_1+2}{\eta_2+2} \times \frac{\eta_2}{\eta_1} v_1$; 2) $(\eta_2 \to \infty)$ $\frac{v_1^2}{E_0} = \frac{6\eta_1^2}{\eta_1^2 + 5\eta_1 + 4}$, $v_2 = \frac{\eta_1+2}{\eta_1} v_1$.



К задаче 9.79.



К задаче 9.80.

9.80. Два одинаковых точечных груза A и B массы m каждый, связанные нерастяжимой нитью длины l, могут скользить по гладкому однородному стержню CD длины $3l$ и массы m. В начальный момент времени, когда груз A находился на вертикальной оси EF, системе сообщили угловую скорость ω_0.

Найти натяжение нити T в тот момент, когда груз B достигнет конца D стержня.

Ответ: $T = \frac{ml}{32}\omega_0^2$.

9.81. В условиях задачи 9.80 определить относительную скорость связки грузов в тот момент, когда груз B достигнет конца D стержня.

Ответ: $v_r = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\omega_0 l$.

9.82. Круглая горизонтальная платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. На краю платформы стоит человек.

Какую работу необходимо совершить человеку, чтобы, двигаясь по радиальному пути, дойти до центра платформы, если момент инерции платформы относительно оси вращения равен J, радиус R, ее начальная угловая скорость ω_0. Человека считать точечной массой m.

Ответ: $A = \dfrac{mR^2(J + mR^2)\,\omega_0^2}{2J}$.

Глава 10

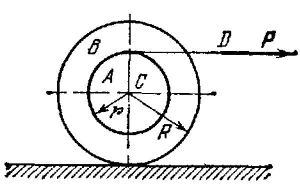
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Плоское движение тела

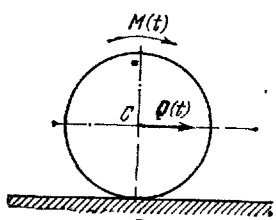
10.1. К концу D нити, намотанной на барабан A радиуса r, жестко связанный с катком B радиуса R, приложена горизонтальная сила $\mathbf{P}$. Радиус инерции катка с барабаном относительно общей оси симметрии C равен ρ.

Выяснить, при каком соотношении между радиусами R и r и радиусом инерции ρ каток будет катиться по горизонтальной поверхности без скольжения, независимо от величины силы $\mathbf{P}$, при любом отличном от нуля значении коэффициента трения скольжения. Трением качения пренебречь.

Ответ: $Rr = \rho^2$.



К задаче 10.1.



К задаче 10.2.

10.2. К однородному сплошному цилиндру радиуса R и массы m, находящемуся в покое на горизонтальной шероховатой плоскости, приложены сила $Q(t) = 0{,}12mg(t+1)$ и момент $M(t) = 0{,}24mgR(t^2 + t)$.

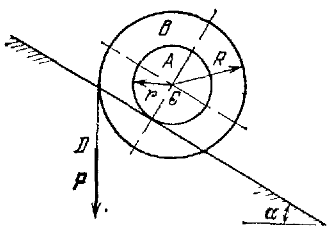
Определить момент времени t_1 смены направления силы трения и момент t_2 начала скольжения цилиндра по плоскости. Коэффициент трения скольжения $f = 0{,}14$, трением качения пренебречь.

Ответ: $t_1 = 0{,}25$ с; $t_2 = 0{,}75$ с.

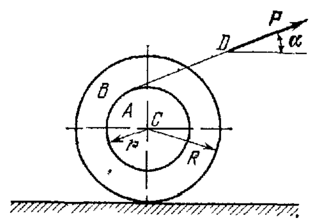
10.3. Каток A радиуса r может катиться вверх по наклонной плоскости под воздействием вертикальной силы $\mathbf{P}$, приложенной к концу D нерастяжимой нити, намотанной на барабан B радиуса $R = 2r$. Барабан жестко связан с катком, их масса равна $m = 2P/g$, а радиус инерции относительно общей оси симметрии C равен $\rho = \sqrt{Rr}$.

Определить предельное значение угла α наклона плоскости к горизонту, при котором каток будет катиться без скольжения, если коэффициент трения скольжения $f = 2/3$. Трением качения пренебречь, нить по барабану не скользит.

Ответ: $\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{8}{9} = 31°22'$.



К задаче 10.3.



К задаче 10.4.

10.4. К концу D нерастяжимой нити, намотанной на барабан A радиуса r, жестко связанный с катком B радиуса $R = 2r$, приложена под углом α к горизонту сила $\mathbf{P}$. Масса катка с барабаном $m = P/g$, их радиус инерции ρ относительно общей оси симметрии C равен $\sqrt{Rr}$.

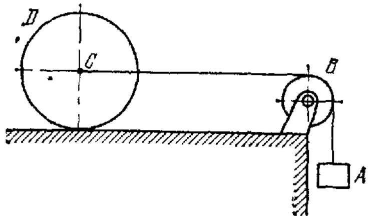
Определить максимальное значение угла α, при котором каток будет катиться по горизонтальной шероховатой плоскости без скольжения, если коэффициент трения скольжения равен $f = 0{,}1$. Трением качения пренебречь, нить по барабану не скользит.

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{3f}}} = 0{,}279$; $\alpha = 31°12'$.

10.5. Груз A массы m прикреплен к нерастяжимой нити, перекинутой через блок B массы $2m$ и присоединенной к оси C катка D, представляющего собой однородный цилиндр массы $4m$.

Пренебрегая трением в оси блока и трением качения между катком и плоскостью, определить минимальное значение коэффициента трения скольжения $f_{\min}$, при котором каток будет катиться по горизонтальной плоскости без скольжения. Блок B считать однородным цилиндром.

Ответ: $f_{\min} = 0{,}0625$.

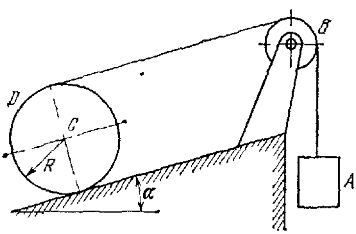


К задаче 10.5.

10.6. Решить задачу 10.5, учитывая трение качения между катком и плоскостью, если коэффициент трения качения $\delta = 0{,}05R$, где R — радиус катка.

Ответ: $f_{\min} = 0{,}1$.

10.7. Груз A массы m прикреплен к нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок B и намотанной на каток D массы $2m$. Каток представляет собой однородный цилиндр, имеющий возможность катиться по наклонной плоскости.



К задаче 10.7.

Пренебрегая трением качения и трением в оси блока, определить: 1) минимальное значение коэффициента трения скольжения $f_{\min}$, при котором возможно качение без скольжения при нулевом значении угла наклона α; 2) максимальное значение угла наклона $\alpha_{\max}$, при котором возможно качение без скольжения, если $f = 0{,}3$.

Ответ: 1) $f_{\min} = \frac{1}{14}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha_{\max}}{2} = \frac{-6 + \sqrt{196f^2 + 35}}{1 + 14f}$, $\alpha_{\max} = 27°6'$.

10.8. В условиях задачи 10.7, приняв угол α равным 30°, а коэффициент трения скольжения f равным 0,3, определить количество движения Q и кинетическую энергию T системы, как функции времени t, полагая, что в начальный момент времени система находилась в покое.

Ответ: $Q = 0{,}267mgt$, $T = 0{,}0734mg^2t^2$ — качение со скольжением.

10.9. Решить предыдущую задачу при $\alpha = 30°$ и $f = 0{,}4$.

Ответ: $Q = 0{,}286mgt$, $T = 0{,}0714mg^2t^2$ — качение без скольжения.

10.10. В условиях задачи 9.58 определить минимальное значение коэффициента трения скольжения $f_{\min}$, при котором каток будет катиться без скольжения.

Ответ: $f_{\min} \doteq 0{,}0338$.

10.11. В условиях задачи 9.58 выяснить, при каком значении коэффициента трения качения δ каток будет катиться без скольжения независимо от величины коэффициента трения скольжения f.

Ответ: $\delta = 0{,}0595R$, где R — радиус катка.

10.12. В условиях задачи 9.61 определить минимальное значение коэффициента трения скольжения f_{min}, при котором каток E будет катиться без скольжения.

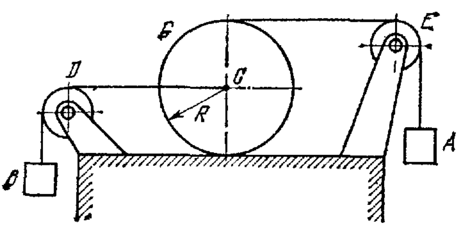
Ответ: $f_{min} = 0{,}237$.

10.13. Для системы, рассмотренной в задаче 9.61, полагая коэффициент трения скольжения f равным 0,2, определить перемещение центра катка $s(t)$ и его угол поворота $\varphi(t)$.

Указание. Воспользоваться ответом задачи 10.12.

Ответ: $s(t) = 1{,}3t^2$ м, $\varphi(t) = 6{,}99t^2$ рад.

10.14. Грузы A и B массы m каждый прикреплены к нерастяжимым нитям, переброшенным через блоки D и E и скрепленным с катком G, представляющим собой однородный цилиндр массы $4m$. Одна нить намотана на каток, а другая соединена с его осью C.



К задаче 10.14.

Считая, что нить не скользит по катку, определить минимальное значение коэффициента трения скольжения f_{min} между катком и горизонтальной плоскостью, при котором каток будет катиться без скольжения. Трением качения, трением в осях блоков D и E и их массой пренебречь.

Ответ: $f_{min} = 0{,}159$.

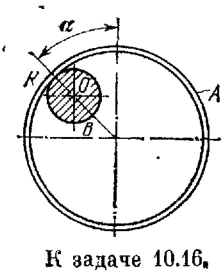
10.15. Для системы, рассмотренной в задаче 10.14, определить движение катка при двух значениях коэффициента трения скольжения: 1) $f_1 = 0{,}1$ и 2) $f_2 = 0{,}2$. В начальный момент система находилась в покое.

Ответ: 1) качение со скольжением: $x_C(t) = 0{,}173t^2$ м, $R\varphi(t) = 0{,}922t^2$ м; 2) качение без скольжения: $x_C(t) = R\varphi(t) = 0{,}445t^2$ м. Ось Ox направлена слева направо, положительное направление угла поворота $\varphi(t)$ — по часовой стрелке, R — радиус катка.

10.16. Тонкое однородное кольцо A массы m движется в вертикальной плоскости, перекатываясь без скольжения по неподвижному цилиндрическому валу B. Ось вала O горизонтальна.

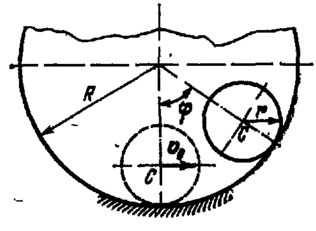
Определить силу трения в точке контакта K в зависимости от ее положения (угла α).

Ответ: $F_{тр} = \frac{1}{2} mg \sin\alpha$.



К задаче 10.16.

10.17. Оси C однородного цилиндра радиуса r, находившегося в нижнем положении внутри цилиндрической полости радиуса R с горизонтальной образующей, сообщили начальную скорость, равную $v_0 = \sqrt{\frac{4}{3}(R-r)g}$.



К задаче 10.17.

Определить до какого значения угла φ цилиндр будет катиться внутри полости без скольжения, если коэффициент трения скольжения f равен 1/7. Трением качения и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\varphi = 45°$.

10.18. В условиях задачи 10.17 выяснить, какую наименьшую скорость надо сообщить оси цилиндра в нижнем положении, чтобы он, двигаясь без скольжения, достиг положения, определяемого углом $\varphi = 90°$.

Ответ: $v_0 = \sqrt{\frac{11}{3}(R-r)g}$.

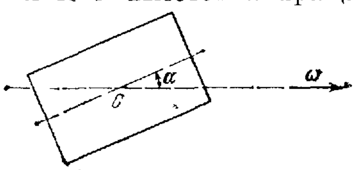
§ 2. Сферическое движение тела

10.19. Однородный куб массы m с ребром $2a$ вращается с угловой скоростью ω.

Найти кинетический момент куба относительно какой-либо точки его диагонали, когда мгновенная ось вращения куба совпадает с этой диагональю.

Ответ: кинетический момент $\mathbf{K}_O$ направлен вдоль указанной диагонали; $K_O = 2ma^2\omega/3$.

10.20. Прямой круговой цилиндр массы m с радиусом основания R и высотой h вращается с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр цилиндра и образующей с его осью симметрии угол α.



К задаче 10.20.

Найти кинетический момент $\mathbf{K}_C$ цилиндра относительно его центра и относительно какой-либо точки, лежащей на оси вращения.

Ответ: $K_C = \frac{m\omega}{12}\sqrt{(3R^2+h^2)^2\sin^2\alpha + 36R^4\cos^2\alpha}$. Вектор $\mathbf{K}_C$ образует с осью симметрии цилиндра угол ψ, определяемый равенством $\operatorname{tg}\psi = \frac{3R^2+h^2}{6R^2}\operatorname{tg}\alpha$. Кинетический момент относительно любой точки оси вращения равен $\mathbf{K}_C$.

10.21. Доказать, что при движении тела с неподвижной точкой кинетическая энергия тела остается неизменной в том и только том случае, когда кинетический момент тела $\mathbf{K}$ относительно неподвижной точки все время остается ортогональным вектору его углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Указание. Учесть, что кинетическая энергия T тела с неподвижной точкой равна $\mathbf{K}\boldsymbol{\omega}/2$.

10.22. Тело подвешено на подвижной тележке с помощью сферического шарнира, центр которого совпадает с центром масс тела.

Доказать, что после остановки тележки тело будет вращаться с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, которой обладало тело в момент остановки тележки.

10.23. На симметричное однородное твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, совпадающей с его центром масс, действуют силы сопротивления среды, главный момент которых относительно этой точки $\mathbf{M} = -\mu\boldsymbol{\omega}$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела.

По какому закону изменяется угловая скорость тела?

Ответ: $\omega_e = \omega_{e0} e^{-\frac{\mu}{A}t}$, $\omega_z = \omega_{z0} e^{-\frac{\mu}{C}t}$, где ω_e, ω_z — экваториальная составляющая и проекция на ось симметрии угловой скорости тела; ω_{e0}, ω_{z0} — начальные значения этих величин; A, C — экваториальный и полярный моменты инерции тела.

10.24. Показать, что при свободной регулярной прецессии твердого тела угловая скорость $\dot\varphi$ собственного вращения его и угловая скорость прецессии $\dot\psi$ связаны соотношением $\dfrac{\dot\varphi}{\dot\psi} = \dfrac{A-C}{C}\cos\theta$, где θ — угол нутации; A и C — экваториальный и полярный моменты инерции тела.

10.25. Симметричное твердое тело совершает регулярную прецессию.

Найти выражение для кинетического момента тела через угловые скорости собственного вращения $\dot\varphi$ и прецессии $\dot\psi$.

Ответ: $\mathbf{K}_O = [C\dot\varphi + (C-A)\dot\psi\cos\theta]\mathbf{e}_1 + A\dot\psi\mathbf{e}_2$, где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — орты осей собственного вращения и прецессии, θ — угол нутации, A и C — экваториальный и полярный моменты инерции тела.

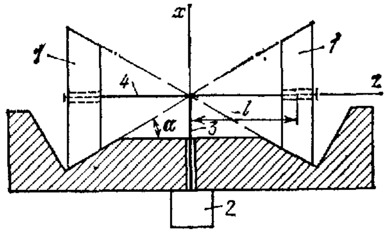
10.26. Каков должен быть главный момент $\mathbf{L}_O$ внешних сил, приложенных к симметричному твердому телу, чтобы они сообщали ему регулярную прецессию.

Ответ: $\mathbf{L}_O = C\dot\psi\dot\varphi\,(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1)\left(1 + \dfrac{C-A}{C}\,\dfrac{\dot\psi}{\dot\varphi}\cos\theta\right)$. Обозначения те же, что и в задаче 10.25.

10.27. В условиях задачи 10.22 положить, что центр шарнира не совпадает с центром масс тела.

Доказать, что при поступательном движении тележки с некоторым ускорением, движение тела относительно тележки будет таким же, как если последняя неподвижна; но в центре масс тела приложена сила $\mathbf{F} = -m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$, где m — масса тела, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ — закон, определяющий скорость тележки во время ее движения.

10.28. Бегуны *1* дробильной мельницы, имеющие форму усеченных конусов, приводятся в движение мотором *2* через вертикальный вал *3* и кривошип *4*; при этом бегуны катятся без проскальзывания по дну конической чаши.



К задаче 10.28.

Определить закон изменения угловой скорости ω вала *3* при разгоне, если момент M, развиваемый мотором, постоянен, масса каждого бегуна m, главные центральные моменты инерции его J_x и J_z, расстояние от вала *3* до центра масс бегуна l, угол наклона дна чаши α. Массой кривошипа и диссипативными силами пренебречь.

Ответ: $\omega = \frac{M}{E}t$, где $E = 2(J_x + J_z\operatorname{ctg}^2\alpha + ml^2)$.

Глава 11

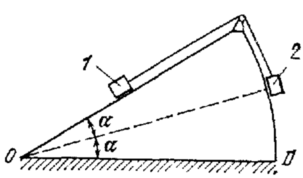
ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ*)

§ 1. Системы с одной степенью свободы

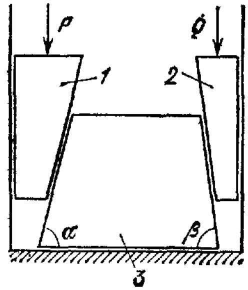
11.1. Грузы *1* и *2*, связанные нерастяжимой нитью, расположены на сторонах кругового сектора с углом 2α, как показано на рисунке. Сектор находится в вертикальной плоскости, сторона OD горизонтальна. Вес груза *1* равен P.

Определить вес Q груза *2* при равновесии системы.

Ответ: $Q = 2P\sin\alpha$.



К задаче 11.1.



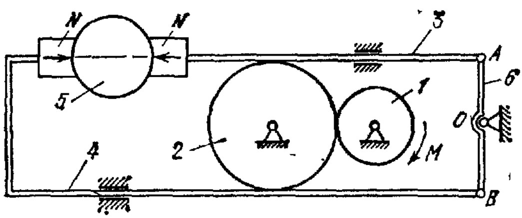
К задаче 11.2.

*) В задачах данной главы, если не делается специальных оговорок, силы трения не учитываются.

11.2. Определить соотношение между величинами вертикальных сил **P** и **Q**, при котором клиновой механизм, изображенный на рисунке, находится в равновесии. Весом клиньев *1*, *2*, *3* пренебречь по сравнению с силами P и Q. Острые углы при вершинах клина *3* равны α и β.

Ответ: $P = Q\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$.

11.3. В механизме для зажима заготовок к шестерне *1* радиуса r прикладывается пара сил с моментом M. Посредством шестерни *2*, находящейся в зацеплении с шестерней *1* и зубчатыми рейками штоков *3* и *4*, движение передается штокам, которые зажимают заготовку *5*. Механизм находится в вертикальной плоскости, стержень *6* однороден, $OA = OB$.



К задаче 11.3.

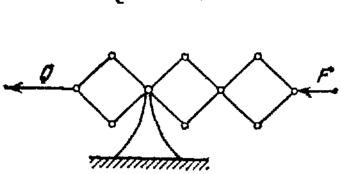
Определить силы N, сжимающие заготовку в положении равновесия системы.

Ответ: $N = \dfrac{M}{2r}$.

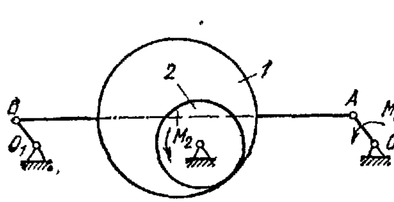
11.4. Шарнирный трехкратный параллелограмм находится под действием горизонтальных сил **F** и **Q**. Сила **F** задана.

Определить величину силы **Q**, которая обеспечивает равновесие параллелограмма.

Ответ: $Q = 2F$.



К задаче 11.4.



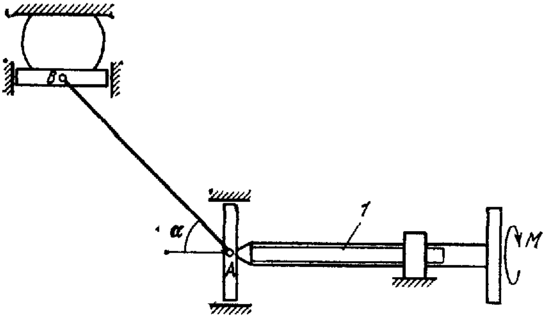
К задаче 11.5.

11.5. Шестерня *1* жестко связана со спарником AB и находится в зацеплении с шестерней *2* радиуса R. К кривошипу OA длины r приложена пара сил с моментом M_1, а к шестерне *2* — пара с моментом M_2. Механизм расположен в горизонтальной плоскости.

При заданной величине момента M_2 определить величину момента M_1, при которой механизм находится в равновесии.

Ответ: $M_1 = \frac{r}{R} M_2$.

11.6. В механизме пресса шаг винта *1* равен h. К винту приложена пара сил с моментом M.



К задаче 11.6.

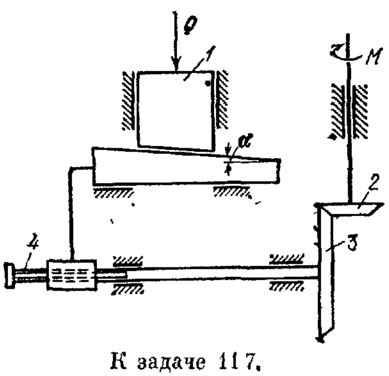
Определить силу давления, развиваемую прессом в положении равновесия, при котором стержень AB составляет с осью винта угол α.

Ответ: $Q = \frac{2\pi M}{h} \operatorname{tg} \alpha$.

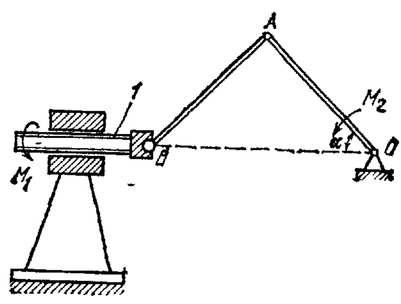
11.7. В механизме регулировки подпятника *1* карусельного станка радиусы шестерен *2* и *3* равны соответственно r_2 и r_3, шаг винта *4* равен h. Угол регулировочного клина равен α. На подпятник действует вертикальная сила $\mathbf{Q}$, а на шестерню *2* — пара сил.

Определить значение момента M пары сил, при котором механизм находится в равновесии.

Ответ: $M = \frac{Q r_2 h}{2\pi r_3} \operatorname{tg} \alpha$.



К задаче 11.7.



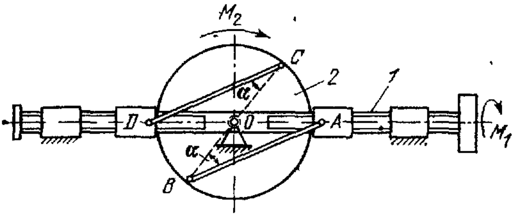
К задаче 11.8.

11.8. В винто-рычажном механизме с шаровым шарниром B $OA = AB = l$, $\angle AOB = \alpha$, шаг винта *1* равен h. К винту в плоскости его нормального сечения приложена пара сил с моментом M_1, а к стержню OA в плоскости рисунка — пара с моментом M_2.

Определить соотношение между этими моментами в положении равновесия механизма, изображенном на рисунке. Весом стержней OA и AB пренебречь.

Ответ: $M_2 = \dfrac{4\pi l M_1}{h} \sin\alpha$.

11.9. В винто-рычажном механизме поворота диска винт *1* имеет резьбу шага h. При вращении винта диск *2* радиуса r может поворачиваться вокруг оси O. К винту в плоскости его нормального сечения приложена пара сил с моментом M_1, а к диску в его плоскости — пара с моментом M_2. В положении равновесия, изображенном на рисунке, $OA = OD = r$, $\angle OBA = \angle OCD = \alpha$.

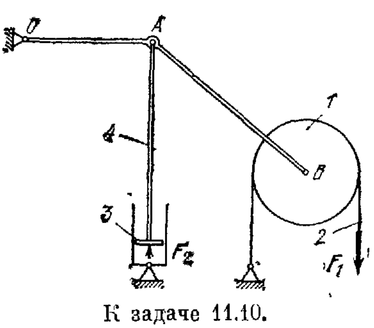


К задаче 11.9.

Определить соотношение между моментами M_1 и M_2 в этом положении, пренебрегая весом стержней AB и CD.

Ответ: $M_1 = \dfrac{M_2 h}{2\pi r} \operatorname{ctg}\alpha$.

11.10. В кулисно-рычажном механизме качающегося цилиндра, расположенном в вертикальной плоскости, на конце коленчатого рычага OAB насажен блок *1*, ось которого перпендикулярна плоскости рычага. Блок охватывается тросом *2*, один конец которого закреплен. К свободному концу троса приложена вертикальная сила $\mathbf{F}_1$, а к поршню *3* — вертикальная сила $\mathbf{F}_2$. Длины колен рычага равны $OA = l_1$, $AB = l_2$; $\angle OAB = \alpha$.



К задаче 11.10.

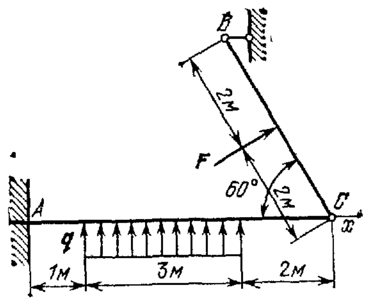
Найти соотношение между величинами сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ в положении равновесия механизма, при котором колено OA горизонтально, а шток поршня *4* вертикален. Вес звеньев механизма не учитывать.

Ответ: $F_2 = 2F_1\left(1 - \dfrac{l_2}{l_1}\cos\alpha\right)$.

11.11. Система, изображенная на рисунке, находится в равновесии. Линия действия силы **F** перпендикулярна стержню BC, система распределенных сил интенсивности **q** приложена к стержню AC под прямым углом.

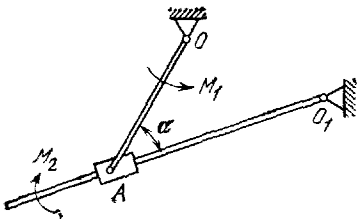
Определить проекцию реакции заделки на ось Ax и момент заделки, если $F=10$ кН, $q=2$ кН/м. Весом стержней пренебречь.

Ответ: $X_A=-2{,}87$ кН, $M=-45$ кН · м.

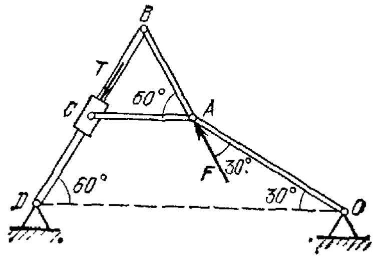


К задаче 11.11.

11.12. В кулисном механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, $OO_1=OA$. К механизму приложены пары сил с моментами M_1 и M_2.



К задаче 11.12.



К задаче 11.13.

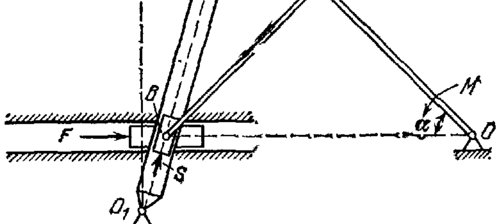
Определить соотношение между этими моментами, при котором механизм будет находиться в равновесии при любом допустимом значении угла α.

Ответ: $M_2=2M_1$.

11.13. В стержневой системе, изображенной на рисунке, $AB=AC$, $BD=2AB$, сила **T** приложена к ползуну, который может скользить по стержню BD.

Определить, при каком соотношении между силами F и T система находится в равновесии в положении, показанном на рисунке. Весом всех звеньев пренебречь.

Ответ: $F=3T$.



К задаче 11.14.

11.14. В кулисно-рычажном механизме, изображенном на рисунке и расположенном в горизонтальной плоскости, $OA = AB = l$, $\angle AOB = \alpha$, $\angle LO_1N = \beta$.

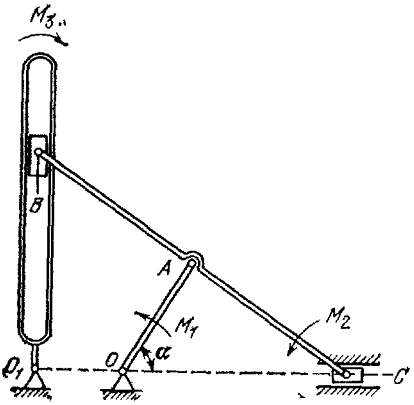
При каком соотношении между силами F, S и моментом M механизм находится в равновесии в указанном на рисунке положении?

Ответ: $M = 2l(F + S\sin\beta)\sin\alpha$.

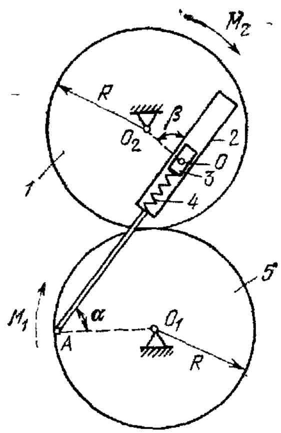
11.15. В кривошипно-ползунном механизме с присоединенной кулисой, расположенном в горизонтальной плоскости, $AB = AC$. На механизм действуют три пары сил с моментами M_1, M_2 и M_3.

Определить, при каком соотношении между этими моментами механизм находится в равновесии в положении, при котором $\angle OAC = 90°$, $\angle AOC = \alpha$ $(\alpha \neq 45°)$.

Ответ: $M_1 = M_2 \operatorname{ctg}^2\alpha - M_3 \dfrac{\cos 2\alpha}{2\sin^2\alpha}$.



К задаче 11.15.



К задаче 11.16.

11.16. В зубчато-кулисном механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, палец O жестко связан с шестерней *1*. Кулиса *2* может скользить по направляющей *3*, которая надета на палец и может вращаться вокруг оси пальца. Скольжению кулисы противодействует пружина *4*. Кулиса посредством шарнира A соединена с шестерней *5*, находящейся в зацеплении с шестерней *1*. К шестерне *5* приложена пара сил с моментом M_1, а к шестерне *1* — пара с моментом M_2. В положении равновесия, изображенном на рисунке, продольная ось кулисы составляет с отрезком O_1A угол α, а с отрезком O_2O — угол β.

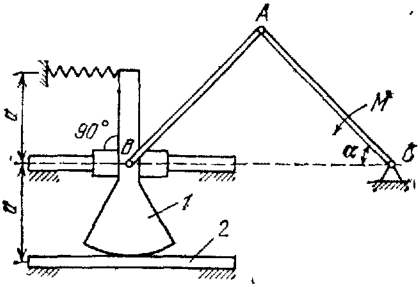
Определить силу упругости пружины в этом положении, если $O_2O = a$.

Ответ: $F_{\text{упр}} = \left|\dfrac{M_1 - M_2}{R\sin\alpha - a\sin\beta}\right|$.

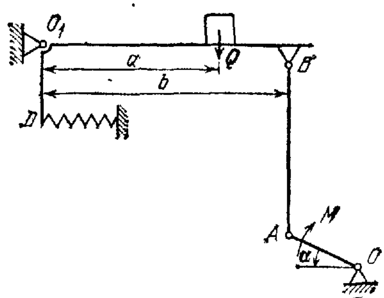
11.17. В кривошипно-ползунном механизме с зубчатым сектором *1* и зубчатой рейкой *2*, расположенном в горизонтальной плоскости $OA = AB = l$, $\angle AOB = \alpha$. На кривошип OA действует пара сил с моментом M.

Определить силу упругости пружины в положении равновесия, изображенном на рисунке.

Ответ: $F_{\text{упр}} = \dfrac{M}{4l \sin \alpha}$.



К задаче 11.17.



К задаче 11.18.

11.18. Подъемно-качающийся стол механизма подъемных клетей прокатных станов вместе с находящимся на нем грузом веса Q удерживается в равновесии парой сил с моментом M и пружиной с коэффициентом жесткости c. Плоскость стола при этом горизонтальна, стержень AB вертикален, а стержень OA образует угол α с горизонтом.

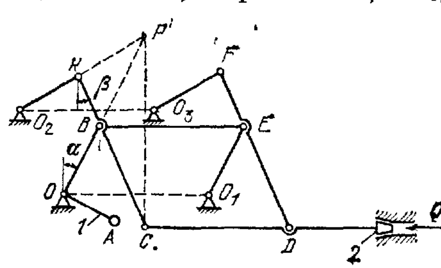
Определить деформацию пружины, если $OA = O_1D = r$, $\angle BO_1D = 90°$.

Ответ: $\lambda = \dfrac{|Mb - Qar \cos \alpha|}{cr^2 \cos\alpha}$.

11.19. Механизм шлакового стопора закрывает лётку доменной печи под действием груза 1 веса P. Механизм расположен в вертикальной плоскости, $CK = DF$, отрезки BE, OO_1, O_2O_3, CD горизонтальны и равны между собой. В положении равновесия стержень OB образует с вертикалью угол α, а стержень KC — угол β.

Определить силу давления шлака на пробку 2, если $OA = a$, $OB = b$, $\angle BOA = 90°$, $\angle PCD = 90°$.

Ответ: $Q = \dfrac{aP}{b} \dfrac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$.

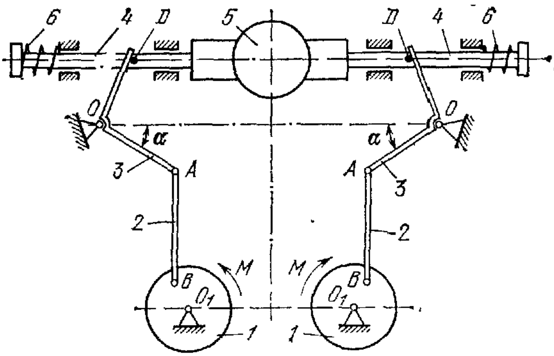


К задаче 11.19.

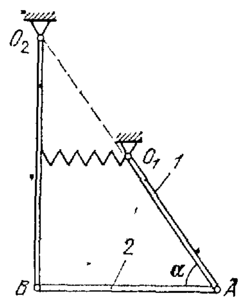
11.20. В механизме обжатия к колесам 1 прикладываются пары сил, имеющие одинаковые по величине моменты M, но противоположные направления действия. Посредством шатунов 2, связанных шарнирно с колесами 1 и рычагами 3, движение передается штокам 4, которые зажимают тело 5. Штоки поджимаются к рычагам пружинами 6, коэффициент жесткости которых c. В нерабочем положении равновесия механизма силы упругости пружин равны F_0. Механизм расположен в горизонтальной плоскости, прямая OO параллельна направляющим штоков, $\angle AOD = 90°$.

Определить силы сжатия в рабочем положении равновесия системы, если в этом положении точки O, B и O_1 лежат на одной прямой, перемещения штоков из нерабочего положения равновесия равны a, $O_1B = b$, $OB = 6O_1B$, $OA = \frac{5}{2}O_1B$, $OD = OA$, стержни 3 составляют с прямой OO углы α.

Ответ: $N = \dfrac{12M\cos\alpha}{5b} - F_0 - ca$.



К задаче 11.20.



К задаче 11.21.

11.21. В стержневой системе, расположенной в вертикальной плоскости, $AO_1 = O_1O_2$, стержни 1 и 2 однородны и имеют вес P_1 и P_2 соответственно.

Определить силу патяжения пружины, если в положении равновесия системы, изображенном на рисунке, $\angle O_1AB = \alpha$, $\angle ABO_2 = 90°$, точки A, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.

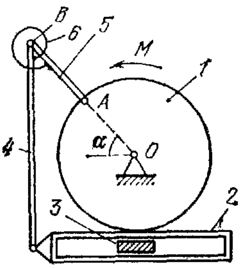
Ответ: $F = (P_1 + P_2)\operatorname{ctg}\alpha$.

11.22. В зубчато-рычажном механизме шестерня 1 находится в зацеплении с зубчатой рейкой 2, которая может перемещаться по неподвижной направляющей 3. С рейкой шарнирно связан стержень 4. Стержень 5 шарниром A связан с шестерней, а шарниром B — со стержнем 4. Стержни 4 и 5 соединены также спиральной пружиной 6. В положении равновесия механизма, изображенном на рисунке, угол между стержнем 4 и рейкой равен 90°, точки O, A и B расположены на одной прямой, наклоненной к рейке под углом α.

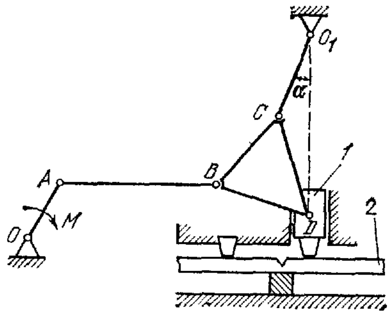
Определить момент, развиваемый пружиной в этом положении, считая, что $OA = AB$, $\alpha = 45°$, и пренебрегая весом стержней.

Ответ: $M = M\sqrt{2}/2$.

11.23. В механизме для разделения отливок движение кривошипа OA передается через шатун AB и распорный механизм, состоящий из жесткого равностороннего треугольника BCD и стержня O_1C, ползуну *1*. Длина кривошипа OA равна r, $O_1C = CD$. К кривошипу приложена пара сил с моментом M.



К задаче 11.22.

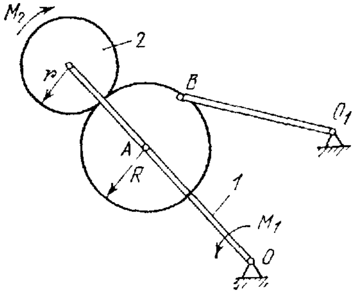


К задаче 11.23.

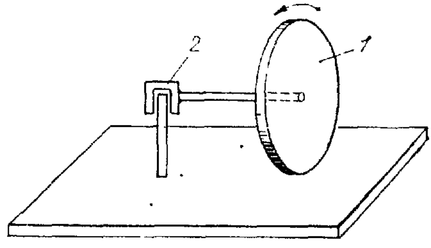
Определить силу давления ползуна на отливку *2* в положении равновесия, при котором $AB \perp O_1D$, $\alpha = 15°$, $\angle OAB = 120°$. Весом элементов механизма пренебречь.

Ответ: $N = \dfrac{M\sqrt{3}}{3r}$.

11.24. В зубчато-рычажном планетарном механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, $OA = O_1B$, $OO_1 = 8R/3$, $R = 4r/3$. К стержню *1* приложена пара сил с моментом M_1, а к шестерне *2* — пара с моментом M_2. При некотором соотношении между M_1 и M_2 механизм остается в равновесном положении, при котором $AB \parallel OO_1$.



К задаче 11.24.



К задаче 11.25.

Найти это соотношение.

Ответ: $M_2 = \frac{9}{41} M_1$.

11.25. Колесо *1* радиуса r может катиться без проскальзывания по горизонтальной плоскости так, что его центр движется по окружности радиуса R с центром на вертикальной оси.

Определить, при каком соотношении между моментом M, моментом трения M_1 на оси колеса, моментом трения качения M_2 и моментом трения M_3 в опоре *2* колесо находится в равновесии.

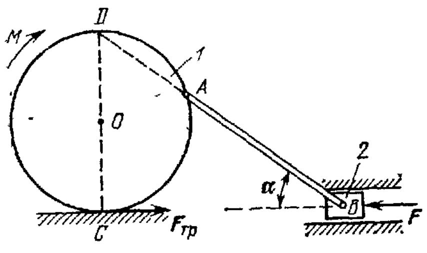
Ответ: $M = \dfrac{(M_1 + M_2) R + M_3 r}{R}$.

§ 2. Системы с двумя степенями свободы

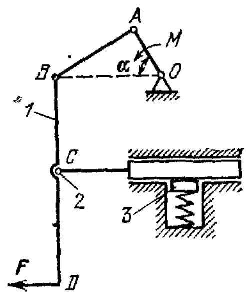
11.26. Каток *1* радиуса r может катиться с проскальзыванием по шероховатой горизонтальной направляющей. С катком посредством шарнирного стержня AB связан ползун *2*, который может скользить по гладким горизонтальным направляющим. К катку приложена пара сил с моментом M, а к ползуну — постоянная горизонтальная сила $\mathbf{F}$.

Определить значения момента M и силы трения скольжения между катком и направляющей, при которых система находится в равновесии, если $CD \perp BC$; $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = 90° - \alpha$.

Ответ: $M = 2rF$, $F_{\text{тр}} = F$.



К задаче 11.26.



К задаче 11.27.

11.27. В рычажном механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, $OA = r$, $BC = CD$. При перегрузке опора *2* рычага *1* перемещается, преодолевая силу трения зажима *3*.

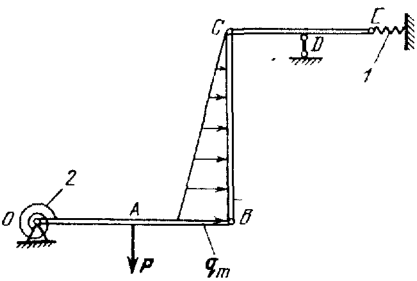
Считая момент M заданным, определить значения силы $\mathbf{F}$ и силы трения в положении равновесия, показанном на рисунке ($\angle OAB = 90°$, $\angle AOB = \alpha$).

Ответ: $F = \frac{M}{r} \sin\alpha$, $F_{\text{тр}} = 2F$.

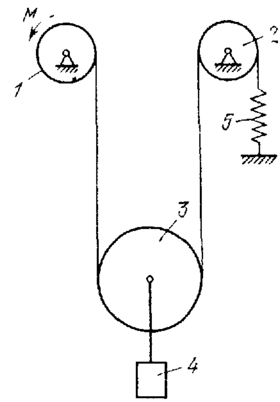
11.28. В стержневой системе, находящейся в равновесии в вертикальной плоскости, $OB = BC = l$, $CD = DE$, $\angle OBC = \angle BCE = 90°$. Однородный стержень CE соединен с неподвижной опорой пружиной *1* с коэффициентом жесткости c_1, а однородный стержень *OB* соединен с шарнирной опорой спиральной пружиной *2* с коэффициентом жесткости c_2. На стержень *BC* действует перпендикулярная к нему распределенная система сил с максимальной интенсивностью q_m.

Определить деформации пружин λ (для пружины *1*) и φ (для пружины *2*), если вес стержня *OB* равен *P*. Весом стержня *BC* пренебречь.

Ответ: $\lambda = \frac{q_m l}{6c_1}$, $\varphi = \frac{Pl}{2c_2}$.



К задаче 11.28.



К задаче 11.29.

11.29. Блок *3* веса *P* подвешен на нити, которая намотана на блок *1* и перекинута через блок *2*. Свободный конец нити прикреплен к пружине *5*, коэффициент жесткости которой *c*. К центру блока *3* подвешен груз *4* веса *Q*. К блоку *1* приложена пара сил с моментом *M*, радиус этого блока *r*.

При каком значении *M* система находится в равновесии? Чему будет равна при этом деформация пружины?

Ответ: $M = \frac{(P+Q)\,r}{2}$, $\lambda = \frac{P+Q}{2c}$.

Глава 12

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II РОДА. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ МЕХАНИКИ*)

§ 1. Системы с одной степенью свободы

12.1. Ползун *1* движется по гладкой горизонтальной направляющей под действием силы **F**. Посредством шатуна *2* движение

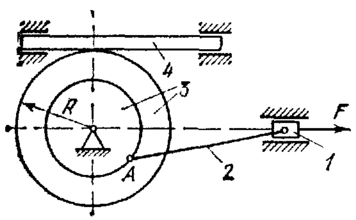
*) Во всех задачах данной главы, если не оговорено противное, силы трения не учитываются. Массы нитей и пружин считаются пренебрежимо малыми по сравнению с массами других тел.

передается ступенчатому блоку, который перемещает рейку *4*, скользящую в гладких горизонтальных направляющих. Момент инерции блока относительно его оси вращения I, масса рейки m. В начальный момент времени точка A занимала крайнее нижнее положение, движение началось из состояния покоя.

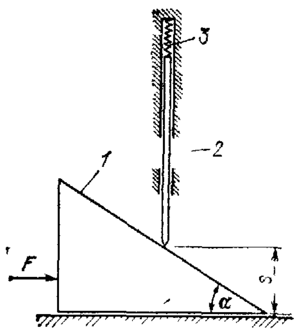
Найти скорость рейки как функцию перемещения ползуна s, предполагая, что длина шатуна значительно больше радиуса меньшей ступени. Массами ползуна и шатуна пренебречь.

Ответ: $v_4 \approx R\sqrt{\dfrac{2Fs}{I+mR^2}}$.

12.2. Кулачок *1* массы M скользит по горизонтальной плоскости под действием силы $\mathbf{F}$ и перемещает толкатель *2* массы m. Толкатель движется в вертикальных направляющих. Пружина *3*, коэффициент жесткости которой c, прижимает



К задаче 12.1.



К задаче 12.2

толкатель к кулачку. В начальный момент времени система находилась в покое и пружина была не деформирована.

Определить закон движения толкателя $s = s(t)$, полагая $s(0) = 0$.

Ответ: $s = A(1 - \cos kt)$, где $A = \dfrac{F - mg\operatorname{tg}\alpha}{c\operatorname{tg}\alpha}$, $k = \sqrt{\dfrac{c\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}{M + m\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

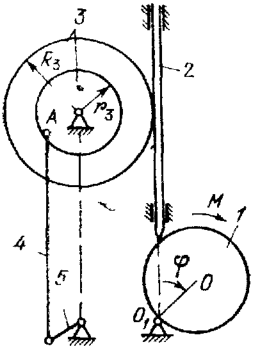
12.3. В кулачковом механизме, расположенном в вертикальной плоскости, кулачок *1*, представляющий собой однородный диск радиуса r и массы m, вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O_1. К кулачку приложена пара сил с моментом M. Толкатель *2*, являющийся зубчатой рейкой, движется в вертикальных направляющих и вращает ступенчатый блок *3*, с которым он находится в зацеплении. С блоком *3* шарнирно связан спарник *4*. Массы толкателя и спарника равны m_2 и m_4 соответственно. Момент инерции блока относительно его оси вращения I.

Составить дифференциальное уравнение движения системы, полагая $R_3 = 2r_3$, $r_3 = 2r/3$, $m_2 = m/3$, $m_4 = m/6$, $I = 2mr^2$.

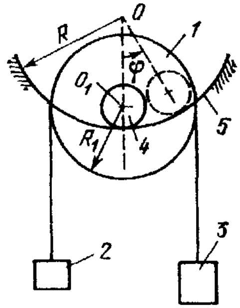
Массой кривошипа *5* пренебречь.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}+6\sin^2\varphi\right)mr^2\ddot{\varphi}+3mr^2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi+\frac{m}{6}gr\sin\varphi\sin\left[\frac{3}{2}\times\right.$ $\left.\times(1-\cos\varphi)\right]-\frac{5}{3}mgr\sin\varphi=M.$

12.4. Ротор *1* радиуса R_1 движется под действием грузов *2* и *3* так, что его вал *4* катается без скольжения по направляющей *5*, изогнутой в виде



К задаче 12 3.



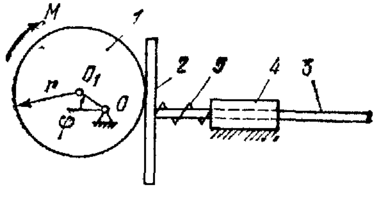
К задаче 12.4.

дуги окружности радиуса R. Масса ротора m_1, его радиус инерции относительно оси симметрии, перпендикулярной плоскости рисунка, равен ρ. Массы грузов *2* и *3* равны m_2 и m_3 соответственно ($m_3>m_2$). Трос, на котором подвешены грузы *2* и *3*, по поверхности ротора не скользит. В начальный момент времени центр ротора находился на вертикали, проходящей через точку O.

Составить дифференциальное уравнение движения системы, если радиус вала *4* равен r. При вычислениях полагать $m_1=$ $=m_3=2m_2$, $R_1=5r/2$, $R=4r$, $\rho=2r$.

Ответ: $(381-60\sin\varphi)\ddot{\varphi}-30\dot{\varphi}^2\cos\varphi-10\frac{g}{r}(1-2\sin\varphi)=0.$

12.5. Кулачок *1*, представляющий собой однородный круглый диск радиуса r и массы m, может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O перпендикулярно его плоскости и отстоящей от его центра на расстояние $r/2$. К кулачку приложена пара сил с моментом M. Движение кулачка передается через тарелку *2* штанге *3*, которая перемещается в направляющей *4*. Непрерывный контакт кулачка и тарелки обеспечивает пружина *5*, коэффициент жесткости которой



К задаче 12.5.

c. Общая масса тарелки и штанги равна m. В начальный момент времени тарелка находилась на расстоянии $r/2$ от точки O, а пружина при этом была не деформирована.

Составить дифференциальное уравнение движения механизма. Определить ускорение тарелки в момент времени, когда кулачок повернется на $90°$ из начального положения, если $M = \frac{9}{4}cr^2$.

Ответ: $2mr^2(3+\sin^2\varphi)\ddot{\varphi} + mr^2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi + 2cr^2(1-\cos\varphi)\sin\varphi + 4mgr\cos\varphi = 8M$, $a_2 = cr/m$.

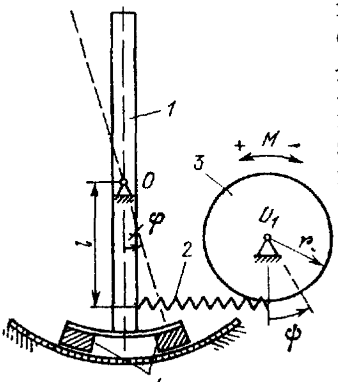
§ 2. Системы с двумя и тремя степенями свободы

12.6. В механизме для шлифования цилиндрических поверхностей маятник *1* приводится в движение вокруг горизонтальной оси O пружиной *2*, один конец которой закреплен на краю однородного диска *3*. Масса диска m, радиус r. Коэффициент жесткости пружины c. Центр масс маятника находится на оси O, его момент инерции относительно этой оси равен I_O. К диску приложена пара сил с моментом $M = M_0\cos\omega t$, которая сообщает ему вращение вокруг горизонтальной оси O_1. В положении равновесия механизма ось симметрии маятника вертикальна, пружина не деформирована, а ее ось горизонтальна и находится на расстоянии l от оси O. При движении механизма возникает момент сил вязкого трения, модуль которого $M_1 = n|\dot{\varphi}|$ ($n = \mathrm{const} > 0$).

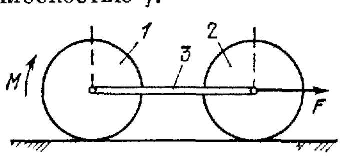
Составить дифференциальные уравнения движения системы, считая углы отклонения φ и ψ от положения равновесия малыми.

Ответ: $I_O\ddot{\varphi} + n\dot{\varphi} + cl(l\varphi - r\psi) = 0$, $\frac{mr^2}{2}\ddot{\psi} + cr(r\psi - l\varphi) = M_0\cos\omega t$.

12.7. Колесо *1* двухколесной тележки катится по горизонтальной плоскости без скольжения, а колесо *2* — со скольжением. Радиусы колес R, их массы m_1 и m_2 соответственно. К колесу *1* приложена пара сил с моментом M, к центру колеса *2* — горизонтальная сила $\mathbf{F}$. Коэффициент трения скольжения между колесами и опорной плоскостью f.



К задаче 12.6.



К задаче 12.7.

Определить ускорение стержня *3* и угловое ускорение колеса *2*, рассматривая колеса как сплошные однородные диски. Массой стержня *3* пренебречь.

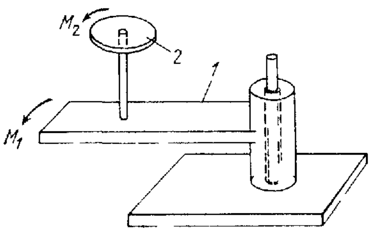
Ответ: $a_3 = \dfrac{2(M + FR - m_2 g f R)}{(3m_1 + 2m_2)R}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{2gf}{R}$.

12.8. На пластине *1*, вращающейся вокруг неподвижной вертикальной оси под действием пары сил с моментом M_1, закреплена вертикальная ось, вокруг которой вращается однородный диск *2* радиуса r. К диску приложена пара сил с моментом M_2. Момент инерции пластины относительно ее оси вращения I. Масса диска m, расстояние от его оси вращения до оси вращения пластины равно l.

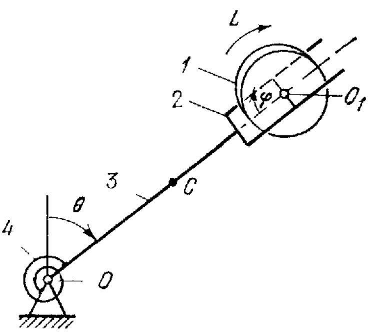
Определить угловое ускорение пластины *1* и угловое ускорение диска *2* относительно пластины.

Ответ: $\varepsilon_1 = \dfrac{M_1}{I + ml^2}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{2M_2}{mr^2} - \dfrac{M_1}{I + ml^2}$.

12.9. Однородный диск *1* радиуса r и массы m вращается вокруг горизонтальной оси, которую несет вилка *2*, жестко прикрепленная к стержню *3*. К диску приложена пара сил с моментом L. Стержень *3* может



К задаче 12.8.



К задаче 12.9.

вращаться вокруг оси O цилиндрического шарнира, параллельной оси вращения диска. Стержень связан с опорой спиральной пружиной *4*, коэффициент жесткости которой c. Суммарная масса вилки и стержня M, их центр масс C находится на расстоянии a от оси O, $OO_1 = b$. Суммарный момент инерции вилки и стержня относительно оси O равен I_0. При вертикальном положении стержня пружина не деформирована.

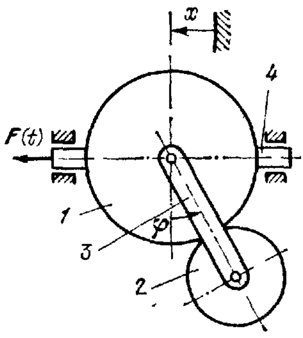
Составить дифференциальные уравнения движения системы.

Ответ: $\dfrac{mr^2}{2}(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}) = L$, $(I_O + mb^2)\ddot{\theta} + c\theta - (Ma + mb) g \sin\theta = 0$.

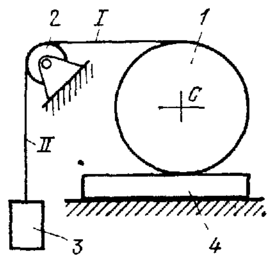
12.10. К рейке *4*, движущейся поступательно в горизонтальных направляющих, жестко прикреплена шестерня *1* радиуса R, расположенная в вертикальной плоскости. Общая масса шестерни и рейки m_1. К центру шестерни *1* шарнирно прикреплено водило *3*, которое несет ось шестерни *2* массы m_2. Шестерня *2* находится в зацеплении с шестерней *1*. К рейке приложена горизонтальная сила $F = F_0 \cos \omega t$.

Составить дифференциальные уравнения движения. Шестерню *2* рассматривать как однородный диск радиуса r.

Ответ: $(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2(R + r)\ddot{\varphi} \cos \varphi + m_2(R + r)\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F_0 \cos \omega t$, $\frac{3}{2} (R + r)\ddot{\varphi} - \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0$.



К задаче 12.10.



К задаче 12.11.

12.11. На каток *1* массы m_1 намотана нерастяжимая нить, перекинутая через блок *2* массы m_2. К концу нити прикреплен груз *3* массы m_3. Каток катится без скольжения по брусу *4* массы m_4, который перемещается по гладкой горизонтальной плоскости. Нить по блоку и катку не скользит.

Определить абсолютные ускорения груза и оси катка, а также силу натяжения в ветвях нити *I* и *II*. Каток рассматривать как однородный круглый цилиндр, блок — как однородный диск. При вычислениях положить $m_2 = 0{,}5m_1$, $m_3 = 0{,}75m_1$, $m_4 = 0{,}25m_1$.

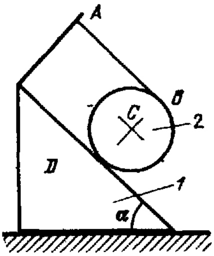
Ответ: $a_3 = \frac{5}{9} g$, $a_C = \frac{2}{9} g$, $T_I = \frac{7}{36} m_1 g$, $T_{II} = \frac{1}{3} m_1 g$.

12.12. Призма *1* массы m_1 может скользить по горизонтальной плоскости. По наклонной грани призмы, образующей угол α с горизонтом, катится со скольжением однородный круглый цилиндр *2* массы m_2. Цилиндр обмотан посередине нерастяжимой нитью, конец которой прикреплен в точке *A* к кронштейну, жестко связанному с призмой. Ось цилиндра перпендикулярна, а участок *AB* нити параллелен линии наибольшего ската наклонной грани призмы.

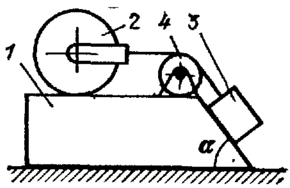
Найти ускорение призмы и ускорение центра цилиндра относительно призмы, а также натяжение нити. При вычислениях положить $m_2 = 2m_1$, $m_1 = 5{,}1$ кг, $\alpha = 30°$.

Ответ: $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} g \simeq 2{,}82$ м/с^2, $a_C = \frac{1}{2} g \simeq 4{,}9$ м/с^2, $T = 25$ Н.

12.13. Призма *1* массы m_1 движется по горизонтальной плоскости. По верхней грани призмы, параллельной опорной плоскости, катится без скольжения однородный круглый цилиндр *2* массы m_2. По наклонной грани, образующей с горизонтом угол α, скользит груз *3* массы m_3. Ось цилиндра и груз связаны нерастяжимой нитью, переброшенной через блок *4*.



К задаче 12.12.

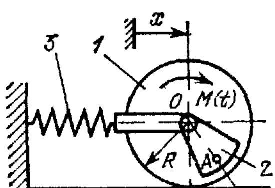


К задаче 12.13.

Определить ускорения призмы и груза относительно призмы, а также силу давления призмы на горизонтальную плоскость. Массой блока пренебречь. При вычислениях положить $m_2 = 0{,}6m_1$, $m_3 = 0{,}4m_1$, $m_1 = 10$ кг, $\alpha = 60°$.

Ответ: $a_1 = 1{,}388$ м/с^2, $a_3 = 3{,}47$ м/с^2, $N = 184$ Н.

12.14. Однородный круглый цилиндр *1* массы m_1 и радиуса R катается без скольжения по горизонтальной плоскости. К нему приложена пара сил с моментом $M = M_0 \cos \omega t$. К оси цилиндра шарнирно прикреплен физический маятник *2* массы m_2. Момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно основанию цилиндра, I_O. Центр масс маятника находится в точке A, $OA = h$. Точка O соединена горизонтальной пружиной *3* с неподвижной опорой. Коэффициент жесткости пружины c. В начальный момент времени $t = 0$ система покоилась, пружина была не деформирована и $\varphi = 0$.

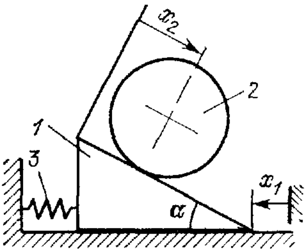


К задаче 12.14.

Составить дифференциальные уравнения движения системы и для начального момента времени определить реакцию шарнира O. При вычислениях положить $m_2 = 0{,}25m_1$, $M_0 = m_1 gR$, $m_1 = 40$ кг, $I_O = 0{,}1m_1R^2$, $h = 0{,}6R$.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{x} + m_2h\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2h\dot{\varphi}^2\sin\varphi = \frac{M_0}{R}\cos\omega t - cx$, $\quad I_0\ddot{\varphi} + m_2h\ddot{x}\cos\varphi + m_2gh\sin\varphi = 0$, $\quad X_O(0) = \frac{m_1 g}{61} \approx 6{,}4$ Н, $Y_O(0) = \frac{m_1 g}{4} = 98$ Н.

12.15. По наклонной грани призмы *1*, образующей угол α с горизонтом, скатывается без скольжения однородный круглый цилиндр *2* массы m_2. При этом призма перемещается по гладкой горизонтальной плоскости, деформируя пружину *3*, соединяющую ее с вертикальной стеной. Масса призмы m_1, коэффициент жесткости пружины c, ось пружины горизонтальна. В начальный момент времени пружина была не деформирована.

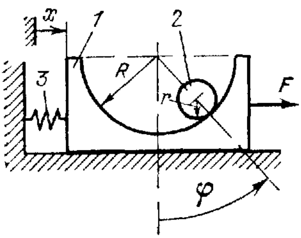


К задаче 12.15.

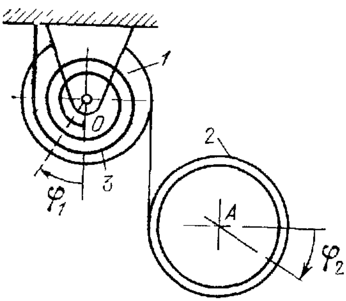
Составить дифференциальные уравнения движения системы, отсчитывая координату x_1 от начального положения призмы.

Ответ: $(m_1+m_2)\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2\cos\alpha + cx_1 = 0, \quad 3\ddot{x}_2 - 2\ddot{x}_1\cos\alpha - 2g\sin\alpha = 0.$

12.16. В брусе *1* массы m_1 сделана цилиндрическая выточка радиуса R в которой катается однородный круглый цилиндр *2* массы m_2 и радиуса r. Оси выточки и цилиндра параллельны. Брус движется по горизонтальной плоскости под действием горизонтальной силы $F = F_0 \sin\omega t$ и силы упругости пружины *3*, коэффициент жесткости которой c. Ось пружины горизонтальна. В начальный момент времени $t = 0$ система покоилась, пружина была не деформирована, угол φ был равен 30°, а $x = 0$.



К задаче 12.16.



К задаче 12.17.

Составить дифференциальные уравнения движения системы и для начального момента времени определить ускорение бруса и угловое ускорение цилиндра. При вычислениях положить $m_1 = 5m_2$, $R = 0{,}2$ м, $r = 0{,}05$ м.

Ответ: $(m_1+m_2)\ddot{x} + m_2(R-r)\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2(R-r)\dot{\varphi}^2\sin\varphi = F_0\sin\omega t - cx, \quad \frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0; \quad \ddot{x}(0) \approx 0{,}515$ м/с², $\ddot{\varphi}(0) = -23{,}78$ рад/с².

12.17. Однородный круглый цилиндр *1* массы m_1 и тонкостенный цилиндр *2* массы m_2 обмотаны двумя нерастяжимыми нитями. Цилиндр *1* вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси, совпадающей с его продольной осью симметрии. Цилиндр *2* падает так, что его ось остается параллельной оси цилиндра *1*. Нити по цилиндрам не скользят. Радиусы цилиндров равны r_1 и r_2 соответственно. К цилиндру *1* прикреплен конец спиральной пружины *3*, коэффициент жесткости которой c. Другой конец пружины закреплен неподвижно. В начальный момент времени пружина была не деформирована.

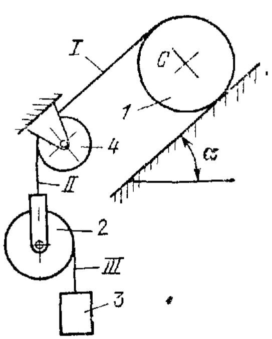
Составить дифференциальные уравнения движения системы. Определить натяжение нити в начальный момент времени.

Ответ: $r_1^2(m_1+2m_2)\ddot{\varphi}_1 + 2m_2r_1r_2\ddot{\varphi}_2 + 2c\varphi_1 = 2r_1m_2g$, $r_1\ddot{\varphi}_1 + 2r_2\ddot{\varphi}_2 = g$, $T(t_0) = \dfrac{m_1m_2g}{4(m_1+m_2)}$.

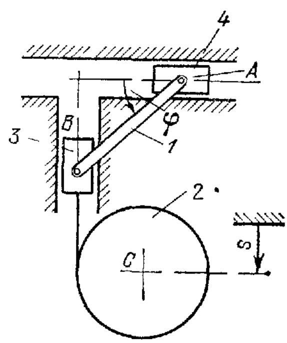
12.18. Однородный круглый цилиндр *1* массы m_1 катится без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. На цилиндр намотана нить, свободный участок которой перекинут через блок *4* и на его конце подвешен подвижный блок *2* массы m_2. С блока *2* сматывается другая нить, на конце которой находится груз *3* массы m_3. Обе нити нерастяжимы и по блоку и цилиндру не скользят. Участки нитей *II* и *III* во время движения остаются вертикальными, а участок нити *I* — параллельным линии наибольшего ската наклонной плоскости.

Определить ускорения оси цилиндра *1* и груза *3*, а также силы натяжения нитей. Блок *2* рассматривать как однородный диск, массой блока *4* пренебречь. При вычислениях положить $m_2 = m_3 = 0{,}5m_1$, $\alpha = 30°$.

Ответ: $a_C = 0{,}44g$, $a_3 = 0{,}96g$, $T_I = T_{II} = 0{,}08m_1g$, $T_{III} = 0{,}02m_1g$.



К задаче 12.18.



К задаче 12.19.

12.19. Стержень *1* длины l шарнирно прикреплен в точках A и B к ползунам *3* и *4* одинаковой массы m. Ползун *3* скользит по вертикальным направляющим, а ползун *4* — по горизонтальным. К ползуну *3* прикреплены концы двух нерастяжимых нитей, которые намотаны на однородный круглый цилиндр *2*. Концы нитей, находящиеся на цилиндре, закреплены на нем. Цилиндр имеет массу M и падает так, что его ось остается перпендикулярной плоскости, в которой движется стержень.

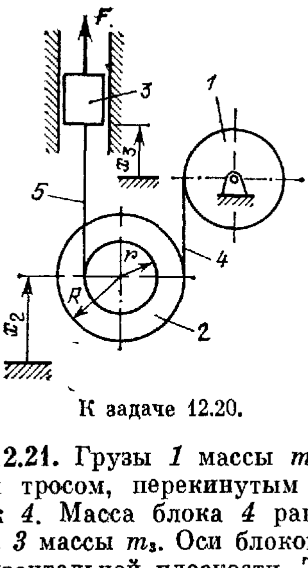
Составить дифференциальные уравнения движения системы. Массой стержня пренебречь.

Ответ: $2l(2m + M\cos^2\varphi)\ddot{\varphi} - 2M\ddot{s}\cos\varphi - lM\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi = 4mg\cos\varphi$, $3\ddot{s} - l\ddot{\varphi}\cos\varphi + l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 2g$.

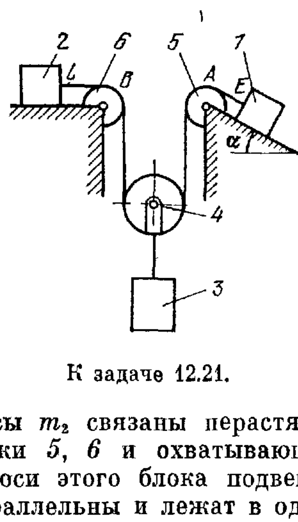
12.20. Однородный круглый цилиндр *1* массы m_1 может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, совпадающей с его продольной осью симметрии. На поверхность этого цилиндра, а также на внешнюю ступень подвижного блока *2* массы m_2 намотаны концы нерастяжимой нити *4*. Один конец другой нерастяжимой нити *5* намотан на внутреннюю ступень блока *2*, а ее второй конец прикреплен к ползуну *3* массы m_3. Ползун движется в вертикальных направляющих под действием силы $\mathbf{F}$. При этом нити по поверхностям блока и цилиндра не скользят, а их свободные участки остаются вертикальными. Радиус инерции блока относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно вертикальной плоскости, равен ρ. Радиусы его наружной и внутренней ступеней равны R и r соответственно.

Составить дифференциальные уравнения движения системы и определить натяжения нитей *4* и *5*, полагая $m_2 = 3m_1$, $m_3 = m_1$, $F = 6m_1g$, $R = 2r$, $\rho = r$.

Ответ: $(9m_1 + 4m_2)\ddot{x}_2 - (6m_1 + 2m_2)\ddot{x}_3 = -2m_2g$, $-(3m_1 + m_2)\ddot{x}_2 + (2m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_3 = F - m_3g$, $T_4 = 0{,}61m_1g$, $T_5 = 3{,}72m_1g$.



К задаче 12.20.



К задаче 12.21.

12.21. Грузы *1* массы m_1 и *2* массы m_2 связаны нерастяжимым тросом, перекинутым через блоки *5*, *6* и охватывающим блок *4*. Масса блока *4* равна m_4, к оси этого блока подвешен груз *3* массы m_3. Оси блоков *5* и *6* параллельны и лежат в одной горизонтальной плоскости. Трос по блокам не скользит. Участки

AE и BL троса параллельны опорным плоскостям грузов *1* и *2*. Опорная плоскость груза *1* является гладкой и наклонена к горизонту под углом α. Опорная плоскость груза *2* горизонтальна, коэффициент трения скольжения между грузом *2* и этой плоскостью f.

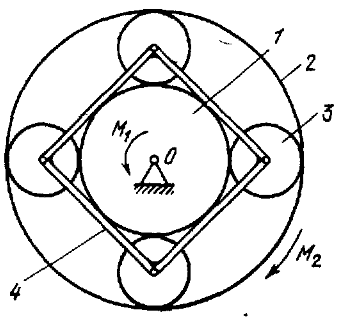
Найти ускорения грузов. Массой блоков *5* и *6* и троса пренебречь, блок *4* рассматривать как однородный диск. При вычислениях положить $m_4 = 0{,}2m_1 = 0{,}4m_3$, $m_2 = 7{,}5m_4$, $\alpha = 30°$, $f = 0{,}2$.

Ответ: $a_1 \approx 1{,}28$ м/с^2, $a_2 \approx 0{,}4$ м/с^2.

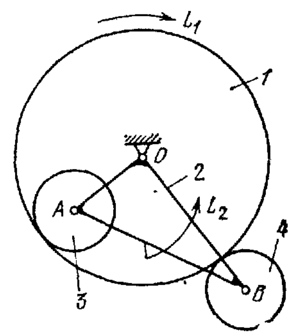
12.22. В планетарном механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, шестерни *1* и *2* вращаются вокруг общей вертикальной оси симметрии O. К шестерне *1* приложена пара сил с моментом M_1, к шестерне *2* — пара сил с моментом M_2. Четыре одинаковые шестерни *3* находятся в зацеплении с шестернями *1* и *2*. Центры их соединены жесткой квадратной рамой *4* так, что эти шестерни могут вращаться вокруг вертикальных осей, проходящих через вершины рамы. Массы шестерен *1*, *2* и *3* равны m_1, m_2 и m_3 соответственно. В начальный момент времени $t = 0$ система находилась в состоянии покоя.

Определить угловые скорости шестерен *1* и *2* как функции времени, если их радиусы равны r_1 и r_2 соответственно. Шестерни *1* и *3* рассматривать как сплошные однородные диски, шестерню *2* — как однородное кольцо. При вычислениях полагать $m_1 = m_2 = 4m_3$. Массой рамы *4* пренебречь.

Ответ: $\omega_1 = \dfrac{2\,(11M_1r_2 + M_2r_1)}{19m_1r_1^2r_2}\,t$, $\omega_2 = \dfrac{2\,(M_1r_2 + 7M_2r_1)}{19m_2r_1r_2^2}\,t$.



К задаче 12.22.



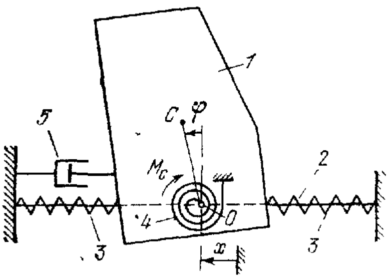
К задаче 12.23.

12.23. В планетарном механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, шестерня *1* массы M и жесткая треугольная рама *2* могут вращаться независимо вокруг вертикальной оси O. К шестерне *1* приложена пара сил с моментом L_1, а к раме — пара сил с моментом L_2. С вершинами рамы A и B шарнирно скреплены центры двух одинаковых шестерен 3 и 4, находящихся в зацеплении с шестерней 1. Масса каждой из этих шестерен m. Система приходит в движение из состояния покоя.

Найти зависимость угловой скорости шестерни 1 от времени. Шестерни 3 и 4 рассматривать как сплошные однородные диски радиусов r, шестерню 1 — как однородное кольцо радиуса R. При вычислениях положить $M = 2m$, $R = 3r$. Массой рамы пренебречь.

Ответ: $\omega_1 = \dfrac{10L_1 - 3L_2}{243mr^2}\,t$.

12.24. Колебания стойки расточного станка, возникающие вследствие упругости элементов конструкции, могут быть исследованы с помощью модели, изображенной на рисунке. Пластина 1 массы m скользит вдоль неподвижной горизонтальной направляющей 2 и вращается вокруг подвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O пластины перпендикулярно ее плоскости. Коэффициенты жесткости пружин 3 и 4 равны c_1 и c_2 соответственно. Сила сопротивления демпфера 5 $\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость поступательного движения пластины, $b = \mathrm{const} > 0$. Кроме того, к пластине приложен момент сил сопротивления $\mathbf{M}_c = -n\omega$ (ω — угловая скорость пластины, $n = \mathrm{const} > 0$). Центр масс пластины находится в точке C, $OC = l$. В положении равновесия системы прямая OC вертикальна, а пружины не деформированы. Момент инерции пластины относительно ее оси вращения I_O.



К задаче 12.24.

Составить дифференциальные уравнения движения пластины.

Ответ: $m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + b\dot{x} + 2c_1x = 0,$

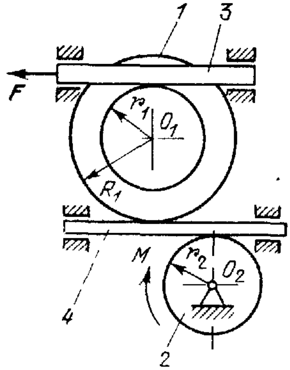
$(I_O + ml^2)\ddot{\varphi} + ml\ddot{x}\cos\varphi + n\dot{\varphi} + c_2\varphi - mgl\sin\varphi = 0.$

12.25. Ступенчатое колесо 1 массы m_1 приводится в движение параллельными горизонтальными рейками 3 и 4. К рейке 3 массы m_3 приложена горизонтальная сила $\mathbf{F}$. Рейка 4 находится в зацеплении с маховиком 2 массы m_2, к которому приложена пара сил с моментом M. Радиус инерции колеса относительно его оси симметрии, перпендикулярной плоскости рисунка, равен ρ.

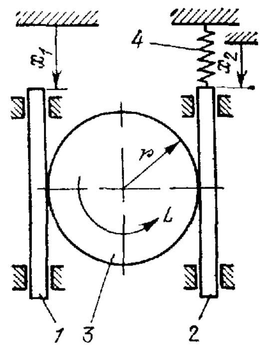
Найти величину углового ускорения маховика и величину касательной силы S в зацеплении маховика с рейкой 4. Все зацепления в системе считать зубчатыми. Маховик рассматривать как однородный диск радиуса r_2, массой рейки 4 пренебречь. При вычислениях положить $m_2 = \frac{2}{9} m_1$, $m_3 = \frac{1}{9} m_1$, $F = \frac{M}{2r_2}$, $R_1 = 2r_1$, $\rho = \frac{4}{3} r_1$.

Ответ: $\varepsilon_2 = \frac{279M}{115 m_1 r_2^2}$, $S = \frac{84M}{115 r_2}$.

12.26. Рейки *1* и *2* одинаковой массы m движутся в параллельных направляющих, расположенных в горизонтальной плоскости. К рейке *2* прикреплен конец пружины *4*, коэффициент



К задаче 12.25.



К задаче 12.26.

жесткости которой c. Другой конец пружины закреплен неподвижно. Рейки находятся в зацеплении с однородным диском *3* массы M и радиуса r. К диску приложена пара сил с моментом L. В начальный момент времени пружина была не деформирована.

Составить дифференциальные уравнения движения системы.

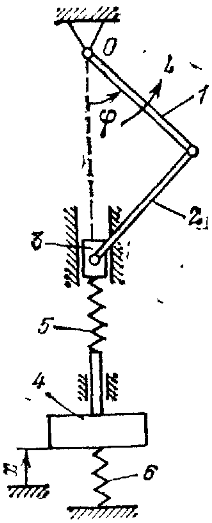
Ответ: $r(8m + 3M)\ddot{x}_1 + rM\ddot{x}_2 = 4L$, $rM\ddot{x}_1 + r(8m + 3M)\ddot{x}_2 + 8crx_2 = -4L$.

12.27. В вибротрамбующем механизме к кривошипу *1* массы m и длины l, вращающемуся в вертикальной плоскости, приложена пара сил с моментом L. Движение кривошипа через шатун *2* массы m и длины l передается ползуну *3*, который перемещается в вертикальных направляющих. Ползун *3* соединен пружиной *5* со штоком трамбующей плиты *4*. Масса плиты вместе со штоком равна M. Пружина *6* имитирует упругие свойства грунта. Коэффициенты жесткости пружин *5* и *6* равны c_1 и c_2 соответственно. Статическая деформация пружины *5* равна λ_0.

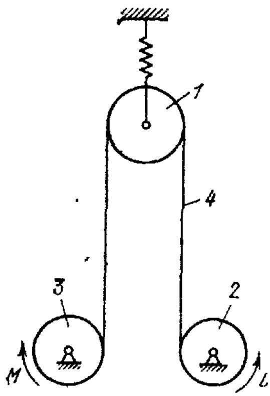
Составить дифференциальные уравнения движения системы, отсчитывая координату x от положения статического равновесия плиты *4*. Массой ползуна *3* пренебречь, кривошип и шатун рассматривать как однородные стержни.

Ответ: $ml^2\left(\frac{5}{3}-\cos 2\varphi\right)\ddot\varphi+ml^2\dot\varphi^2\sin 2\varphi+2c_1l\sin\varphi\,[\lambda_0+2l(1-\cos\varphi)-x]+2mgl\sin\varphi=L,\ M\ddot x+(c_1+c_2)x-2c_1l(1-\cos\varphi)=0.$

12.28. Блоки *1*, *2* и *3*, имеющие одинаковые радиусы r и массы m, могут вращаться вокруг параллельных горизонтальных осей, совпадающих с их осями симметрии. При этом оси блоков *2* и *3* неподвижны, а блок *1* подвешен на пружине, коэффициент жесткости которой c. Нить *4* охватывает блок *1*, а ее концы намотаны на блоки *2* и *3*. К блоку *3* приложена пара сил с моментом M, а к блоку *2* — пара сил с моментом L. Нить по блокам не скользит и остается натянутой во все время движения.



К задаче 12.27.



К задаче 12.28.

Найти закон движения $s=s(t)$ центра блока *1*, полагая $s(0)=0$, $\dot s(0)=0$. Блоки считать сплошными однородными дисками.

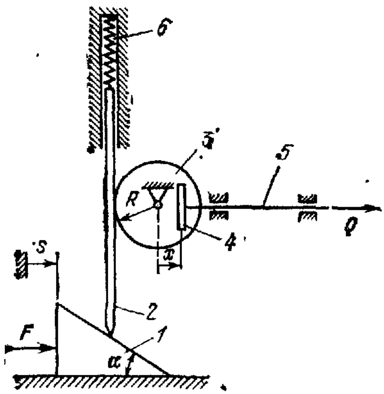
Ответ: $s(t)=\frac{M+L}{cr}(1-\cos\omega t)$, где $\omega=\sqrt{\frac{c}{2m}}$.

12.29. В механизме вариатора скоростей гладкий кулачок *1* движется по горизонтальной гладкой плоскости под действием силы **F** и приводит в движение шток *2*, перемещающийся в вертикальных направляющих. Шток вращает однородный диск *3* радиуса R, движение которого передается ролику *4*, жестко скрепленному со штангой *5*, скользящей в горизонтальных направляющих. Массы названных элементов механизма m_1, m_2, m_3, m_4 и m_5 соответственно. Шток прижимается к кулачку пружиной *6*, коэффициент жесткости которой c. К штанге приложена сила **Q**, а к ролику — сила **T**, перпендикулярная плоскости диска и не показанная на рисунке. Поверхность диска такова, что проскальзывания между роликом и диском в вертикальном направлении нет, а коэффициент трения скольжения в горизонтальном направлении f. В начальный момент времени пружина не деформирована и $s=0$.

Составить дифференциальные уравнения движения системы, полагая $m_1=m_3=2m_2$. Ролик рассматривать как однородный диск, штангу 5 — как стержень.

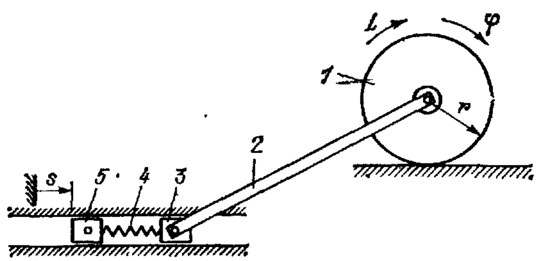
Ответ: $\left(\frac{m_1}{\cos^2\alpha}+\frac{m_4\operatorname{tg}^2\alpha}{2R^2}x^2\right)\ddot{s}+\frac{m_4\operatorname{tg}^2\alpha}{R^2}x\dot{x}\dot{s}+cs\operatorname{tg}^2\alpha=F-\frac{m_1 g}{2}\operatorname{tg}\alpha,$

$(m_4+m_5)\ddot{x}-\frac{m_4\operatorname{tg}^2\alpha}{2R^2}x\dot{s}^2=Q-fT.$



К задаче 12.29.

12.30. Каток 1 массы M и радиуса r катится без скольжения по горизонтальной плоскости под действием пары сил с моментом L. Движение катка через стержень 2 массы m передается ползуну 3, который соединен пружиной 4 с ползуном 5 массы m. Ползуны движутся в горизонтальных направляющих. Масса ползуна 3 равна $2m$, коэффициент жесткости пружины c. В начальный момент времени $t=0$ система находилась в покое и пружина была не деформирована.



К задаче 12.30.

Найти уравнение движения ползуна 5 $s=s(t)$, полагая $M=4m$, $s(0)=0$, $\varphi(0)=0$. Трением между ползунами и их направляющими пренебречь. Каток рассматривать как однородный диск.

Ответ: $s=\frac{L}{20mr}\left(t^2-\frac{18m}{5c}\sin^2\frac{\omega t}{2}\right)$, где $\omega=\sqrt{\frac{10c}{9m}}$.

12.31. Составить дифференциальные уравнения движения системы из задачи 12.15, считая опору призмы шероховатой и полагая коэффициент трения скольжения между призмой и опорой равным f.

Ответ:

$(m_1+m_2)\ddot{x}_1-m_2\cos\alpha\,\ddot{x}_2+cx_1+f\,[(m_1+m_2)g-m_2\ddot{x}_2\sin\alpha]\operatorname{sign}\dot{x}_1=0,$

где

$$\operatorname{sign} \dot{x}_1 = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad \dot{x}_1 > 0, \\ -1 & \text{при} \quad \dot{x}_1 < 0; \end{cases}$$

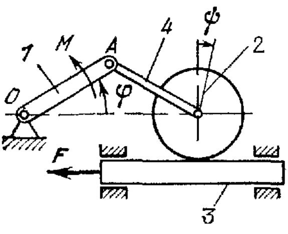
$$3\ddot{x}_2 - 2\cos\alpha \ddot{x}_1 - 2g\sin\alpha = 0.$$

12.32. Решить задачу 12.30 с учетом трения скольжения между ползуном *3* и направляющими, полагая коэффициент трения скольжения между ними $f = 2/13$. Трением между ползуном *5* и направляющими пренебречь.

Угол наклона стержня *2* к горизонту принять равным 45°.

Ответ: $s = \dfrac{15L - 5mgr}{286mr}\left(t^2 - \dfrac{40m}{11c}\sin^2\dfrac{\omega t}{2}\right)$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{11c}{10m}}$.

12.33. Кривошип *1*, являющийся однородным стержнем массы m_1 и длины l, вращается в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через точку O. Движение передается шестерне *2* массы m_2 через шатун *4* длины l. Шестерня *2* находится в зацеплении с рейкой *3* массы m_3, которая скользит в горизонтальных направляющих. К рейке приложена сила $\mathbf{F}$, а к кривошипу — пара сил с моментом M. В начальный момент времени механизм находился в покое и кривошип занимал при этом горизонтальное положение.



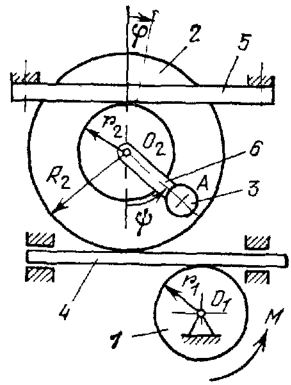
К задаче 12.33.

Составить дифференциальные уравнения движения системы и для начального момента времени определить угловые ускорения кривошипа и шестерни. Массой шатуна пренебречь. Шестерню рассматривать как однородный диск радиуса r. При вычислениях положить $m_2 = 2m_3 = 10$ кг, $F = 20$ Н, $M = m_1 gl$, $l = 2$ м, $r = 0{,}5$ м.

Ответ: $2l^2[m_1 + 12(m_2 + m_3)\sin^2\varphi]\ddot{\varphi} + 12l^2(m_2 + m_3)\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi + 12m_3 rl\ddot{\psi}\sin\varphi + 3m_1 gl\cos\varphi - 12Fl\sin\varphi = 6M$, $(m_2 + 2m_3)r\ddot{\psi} + 4m_3 l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) = 2F$, $\varepsilon_1(t_0) = \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{l} \approx 7{,}35$ рад/с², $\varepsilon_2(t_0) = \dfrac{F}{m_2 r} = 4$ рад/с².

12.34. Маховик *1* массы m_1, вращающийся вокруг горизонтальной оси O_1 под действием пары сил с моментом M, приводит в движение горизонтальную рейку *4*. Рейка передает движение однородному ступенчатому колесу *2* массы m_2, которое катится по неподвижной горизонтальной направляющей *5*. Радиус инерции колеса относительно его оси симметрии, перпендикулярной плоскости рисунка, равен ρ. Радиусы наружной и внутренней ступеней колеса равны R_2 и r_2 соответственно. К центру колеса шарнирно прикреплен стержень *6* длины l с грузом *3* массы m_3 на конце. В начальный момент времени груз *3* занимал нижнее положение.

Составить дифференциальные уравнения движения системы, считая все зацепления в ней зубчатыми. Найти величину углового ускорения колеса в начальный момент времени. Маховик *1* рассматривать как однородный диск радиуса r_1, а груз *3* — как материальную точку. Массами рейки *4* и стержня *6* пренебречь. При вычислениях положить $m_1 = m_2/20$, $m_3 = m_2/80$, $R_2 = 2r_2$, $r_1 = r_2/2$, $\rho = 3r_2/2$.

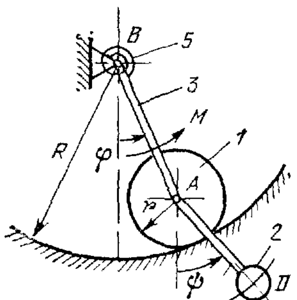


К задаче 12.34.

Ответ: $\left[m_1 (r_2 + R_2)^2 + 2m_2 (r_2^2 + \rho^2) + 2m_3 r_2^2\right] \ddot{\varphi} + 2m_3 r_2 l \times$
$\times \left(\dot{\psi}^2 \sin \psi - \ddot{\psi} \cos \psi\right) = 2M \dfrac{r_2 + R_2}{r_1}, \quad l\ddot{\psi} - r_2 \ddot{\varphi} \cos \psi + g \sin \psi = 0,$

$$\varepsilon_2 (t_0) = \frac{240M}{139 m_2 r_2^2}.$$

12.35. Однородный диск *1* массы m_1 и радиуса r катится без скольжения по цилиндрической поверхности радиуса R. Диск приводится в движение стержнем *3*, к которому приложена пара сил с моментом M. К стержню *3* присоединен один конец спиральной пружины *5*, коэффициент жесткости которой c. Другой конец пружины закреплен неподвижно. К диску *1* в точке A шарнирно прикреплен стержень *4* длины l, на свободном конце которого находится груз *2* массы m_2. При начальном положении системы оба стержня были вертикальны, а пружина была не деформирована.

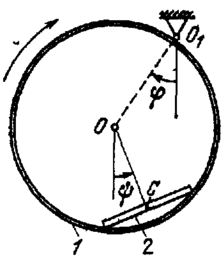


К задаче 12.35.

Составить дифференциальные уравнения движения системы и для начального момента времени найти величины абсолютных угловых ускорений стержней, полагая $R = l = 2r$. Массами стержней пренебречь.

Ответ:

$$(3m_1 + 2m_2) \frac{(R-r)^2}{2} \ddot{\varphi} + m_2 (R - r) l \left[\ddot{\psi} \cos(\psi - \varphi) - \dot{\psi}^2 \sin(\psi - \varphi)\right] +$$
$$+ (m_1 + m_2) g (R - r) \sin \varphi + c\varphi = M,$$
$$l\ddot{\psi} + (R - r) \ddot{\varphi} \cos(\psi - \varphi) + (R - r) \dot{\varphi}^2 \sin(\psi - \varphi) + g \sin \psi = 0,$$
$$\varepsilon_3 (t_0) = \frac{2M}{3m_1 r^2}, \quad \varepsilon_4 (t_0) = -\frac{M}{3m_1 r^2}.$$



К задаче 12.36.

12.36. Однородное кольцо *1* радиуса R и массы M вращается вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через точку O_1, под действием пары сил с моментом $L = L_0 \sin \omega t$. Внутри кольца находится однородный стержень *2* массы m и длины $2l$. В начальный момент времени $t = 0$ система находилась в покое. При этом центр кольца O занимал крайнее нижнее положение, а стержень располагался так, что отрезок OC составлял с продолжением отрезка O_1O угол 30°.

Составить дифференциальные уравнения движения системы и определить угловое ускорение кольца при $t = 0$, полагая $R = 2l$.

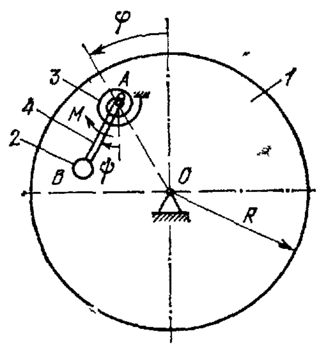
Ответ: $R^2(2M + m)\ddot{\varphi} - mR\sqrt{R^2 - l^2}\,\ddot{\psi}\cos(\varphi + \psi) +$

$$+ mR\sqrt{R^2 - l^2}\,\dot{\psi}^2 \sin(\varphi + \psi) + g(M + m)R\sin\varphi = L_0 \sin \omega t,$$

$$\left(R^2 - \frac{2}{3}l^2\right)\ddot{\psi} - R\sqrt{R^2 - l^2}\,\ddot{\varphi}\cos(\varphi + \psi) + R\sqrt{R^2 - l^2}\,\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \psi) +$$

$$+ g\sqrt{R^2 - l^2}\sin\psi = 0, \quad \varepsilon_1(0) = -\frac{9\sqrt{3}\,mg}{(80M + 13m)R}.$$

12.37. Однородный диск *1* массы m_1 и радиуса R вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр O. В точке A к диску шарнирно прикреплен стержень *4* с грузом *2* массы m_2 на конце. Длина стержня l, $OA = a$. К стержню приложена пара сил с моментом M. Спиральная пружина *3*, коэффициент жесткости которой c, прикреплена своими концами к диску и стержню.



К задаче 12.37.

Составить дифференциальные уравнения движения, полагая что углы φ и ψ отсчитываются от вертикальных направлений и что при $\varphi = \psi = 0$ пружина не деформирована. Массой стержня пренебречь.

Ответ: $(m_1R^2 + 2m_2a^2)\ddot{\varphi} + 2m_2al\ddot{\psi}\cos(\varphi + \psi) -$

$$- 2m_2al\dot{\psi}^2 \sin(\varphi + \psi) - 2m_2ga\sin\varphi + 2c(\varphi + \psi) = 0,$$

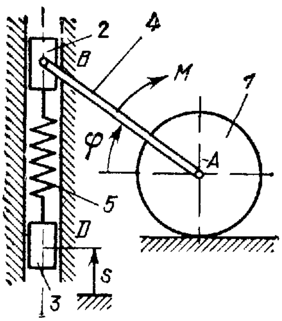
$$m_2al\ddot{\varphi}\cos(\varphi + \psi) + m_2l^2\ddot{\psi} - m_2al\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \psi) +$$

$$+ m_2gl\sin\psi + c(\varphi + \psi) = M.$$

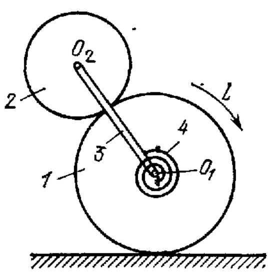
12.38. Однородный диск *1* массы m_1 катится без скольжения по горизонтальной плоскости. К центру диска шарнирно прикреплен одним своим концом стержень *4* длины l. К стержню приложена пара сил с моментом M. Другой конец стержня шарнирно прикреплен к ползуну *2* массы m_2, движущемуся в вертикальных направляющих. К ползуну с помощью пружины *5*, коэффициент жесткости которой c, подвешен груз *3* массы m_3.

Составить дифференциальные уравнения движения системы, выбрав в качестве обобщенных координат угол поворота φ стержня *4* и перемещение s ползуна *3*. Пружина *5* при $\varphi = 0$ и $s = 0$ не деформирована. Массой стержня пренебречь.

Ответ:
$$2(3m_1 \sin^2\varphi + 2m_2 \cos^2\varphi) l^2 \ddot{\varphi} + (3m_1 - 2m_2) l^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi + 4cl(l \sin\varphi - s)\cos\varphi + 4m_2 gl \cos\varphi = 4M,$$
$$m_3 \ddot{s} + c(s - l\sin\varphi) + m_3 g = 0.$$



К задаче 12.38.



К задаче 12.39.

12.39. Колесо *1* радиуса R и массы M катится без скольжения по горизонтальной плоскости под действием пары сил с моментом L. По колесу *1* катится без скольжения колесо *2* радиуса r и массы m. Ось колеса *2* шарнирно прикреплена к стержню *3*, вращающемуся вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O_1. Стержень *3* соединен с осью колеса *1* спиральной пружиной *4*, коэффициент жесткости которой c. В начальный момент времени $t = 0$ стержень занимал верхнее вертикальное положение, а пружина была не деформирована.

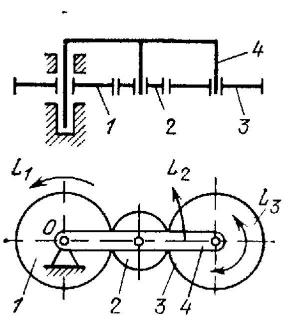
Составить дифференциальные уравнения движения системы и найти угловое ускорение колеса *1* при $t = 0$. Массой стержня пренебречь. Колеса считать однородными дисками.

Ответ:
$$3(M+m)R^2\ddot{\varphi} + mR(R+r)(1-2\cos\psi)\ddot{\psi} + 2mR(R+r)\dot{\psi}^2 \sin\psi = 2L,$$
$$3m(R+r)^2\ddot{\psi} + mR(R+r)(1-2\cos\psi)\ddot{\varphi} + 2m(R+r)\left(R\dot{\varphi}\dot{\psi} - g\right)\sin\psi + 2c\psi = 0;$$
$$\varepsilon_1(0) = \frac{6L}{(9M+8m)R^2}.$$

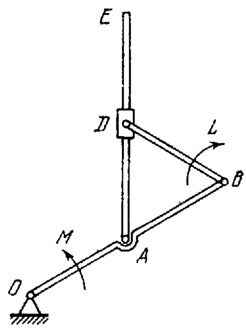
12.40. В дифференциальном механизме шестерня *1* массы m_1 и водило *4* вращаются независимо друг от друга вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. Шестерня *1* находится в зацеплении с шестерней *2* массы m_2, а последняя — с шестерней *3* массы m_3. Оси шестерен *2* и *3* укреплены на водиле *4*. К шестерне *1* и водилу *4* приложены пары сил с моментами L_1 и L_4 соответственно. К шестерне *3* приложен момент сопротивления L_3.

Определить угловые ускорения шестерни *1* и водила. Шестерни рассматривать как однородные диски радиусов r_1, r_2 и r_3 соответственно. Массой водила пренебречь. При вычислениях положить $m_1 = m_3 = 9m_2 = 90$ кг, $L_1 = 150$ Н · м, $L_3 = 120$ Н · м, $L_4 = 180$ Н · м, $r_1 = r_3 = 3r_2 = 0{,}3$ м.

Ответ: $\varepsilon_1 = 3{,}72$ рад/с^2, $\varepsilon_4 = 3{,}04$ рад/с^2.



К задаче 12.40.

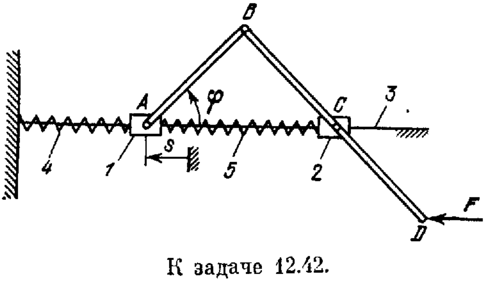


К задаче 12.41.

12.41. В стержневом механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, стержень OB вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O, под действием пары сил с моментом M. К стержню BD приложена пара сил с моментом L. Длина стержня BD равна l, длины стержней OB и AE равны $2l$, $OA = AB$. Массы стержней OB и AE одинаковы и равны m. Все стержни однородны.

Определить, при каком соотношении между моментами M и L угловое ускорение стержня OB будет больше углового ускорения стержня AE в тот момент, когда они будут располагаться на одной прямой. Массами ползуна D и стержня BD пренебречь.

Ответ: $M > 7L$.



К задаче 12.42.

12.42. В стержневом механизме, расположенном в вертикальной плоскости, ползуны *1* и *2* могут скользить по горизонтальной направляющей *3*.

Стержень BD в точке C шарнирно соединен с ползуном *2*. К его свободному концу приложена горизонтальная сила **F**. Пружины *4* и *5* имеют одинаковые коэффициенты жесткости c. Масса стержня AB равна m, масса стержня BD равна $2m$. Система приходит в движение из состояния покоя, при котором стержни наклонены под углами 45° к направляющей, а пружины не деформированы.

Составить дифференциальные уравнения движения системы, полагая $AB = BC = CD = l$. Определить величину ускорения ползуна *1* в начальный момент времени. Стержни считать однородными, массами ползунов пренебречь.

Ответ: $6m\ddot{s} + 9ml\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + 2cs = 2F,$

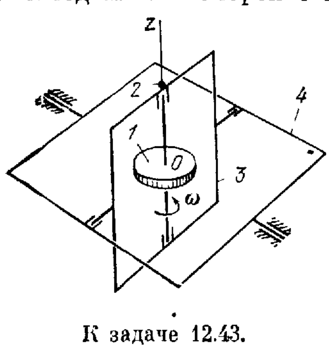
$$2ml\,(1 + 8\sin^2\varphi)\,\ddot{\varphi} + 8ml\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi + 9m\ddot{s}\sin\varphi +$$
$$+ 4cl\left(\sqrt{2} - 2\cos\varphi\right)\sin\varphi + mg\cos\varphi = 6F\sin\varphi,\quad a_1(t_0) = \frac{9mg - 14F}{39m}.$$

12.43. Гироскопический маятник состоит из ротора *1*, установленного в кардановом подвесе, и грузика *2*, который прикреплен к рамке *3*. Оси рамок *3* и *4* пересекаются в точке O, являющейся центром масс ротора. Ротор вращается вокруг своей оси симметрии Oz с постоянной угловой скоростью ω. Грузик расположен в точке пересечения оси Oz с рамкой *3* на расстоянии l от точки O. Масса грузика m, полярный момент инерции ротора C, экваториальный — A. В начальный момент времени ось Oz была выведена из вертикального положения равновесия так, что отклонение грузика от его крайнего верхнего положения было мало.

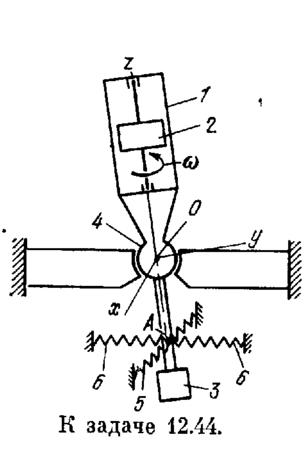
Предполагая отклонения оси Oz от вертикали малыми во все последующие моменты времени, составить линеаризованные дифференциальные уравнения движения гиромаятника. Массой рамок пренебречь.

Ответ: $(A + ml^2)\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} = mgl\alpha$, $(A + ml^2)\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} = mgl\beta$, где α и β — углы Крылова (см. задачу 6.3).

12.44. Модель центрифуги состоит из кожуха *1*, ротора *2* и груза *3*. Кожух связан с неподвижной опорой с помощью



К задаче 12.43.



К задаче 12.44.

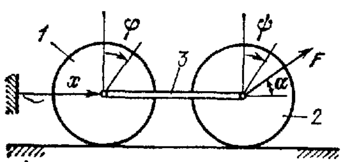
сферического шарнира *4*. Ротор вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии, имеющей неподвижную точку O в центре этого шарнира. Суммарная масса кожуха и ротора равна M, масса груза *3* равна $M/4$. Расстояния от точки O до центров масс груза *3* и кожуха совместно с ротором одинаковы и равны l. Момент инерции ротора относительно оси вращения Oz равен I_0, моменты инерции кожуха вместе с ротором относительно осей Ox и Oy равны $I_x = I_y = 3Ml^2/2$. В точке A, находящейся на продолжении оси Oz на расстоянии $OA = a$, с центрифугой связаны пружины *5* и *6*, коэффициенты жесткости которых одинаковы и равны c. При вертикальном положении оси Oz пружины не деформированы и их оси параллельны осям Ox и Oy соответственно. При отклонениях оси Oz от вертикали на центрифугу действует момент сил сопротивления, проекции вектора которого на оси Ox и Oy имеют соответственно вид $M_x = -n\omega_x$, $M_y = -n\omega_y$ $(n = \mathrm{const} > 0)$.

Составить линеаризованные дифференциальные уравнения движения системы при малых отклонениях оси Oz от вертикали. Размерами груза *3* пренебречь.

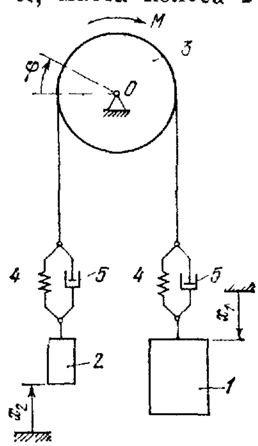
Ответ: $7Ml^2\ddot{\alpha} + 4n\dot{\alpha} + 4I_0\omega\dot{\beta} + (8ca^2 - 3Mgl)\alpha = 0$, $7Ml^2\ddot{\beta} + 4n\dot{\beta} - 4I_0\omega\dot{\alpha} + (8ca^2 - 3Mgl)\beta = 0$, где α и β — углы Крылова (см. задачу 6.3).

12.45. Колеса двухколесной тележки катятся со скольжением по горизонтальной плоскости. Радиусы колес R, масса колеса *1* равна m_1, масса колеса *2* равна m_2. К центру колеса *2* под углом α к горизонту приложена сила $\mathbf{F}$. Коэффициент трения скольжения f.

Составить дифференциальные уравнения движения тележки, рассматривая колеса как сплошные однородные диски. Массой стержня *3* пренебречь.



К задаче 12.45.



К задаче 12.46.

Ответ: $(m_1 + m_2)\ddot{x} = F(\cos\alpha + f\sin\alpha) - g(m_1 + m_2)f$, $R\ddot{\varphi} = 2gf$, $m_2R\ddot{\psi} = 2f(m_2g - F\sin\alpha)$ при $F > \dfrac{3gf(m_1 + m_2)}{\cos\alpha + f\sin\alpha}$.

12.46. В модели лифта грузы *1* и *2*, массы которых m_1 и m_2 соответственно, подвешены к концам троса, перекинутого через шкив *3*. Шкив вращается вокруг горизонтальной оси O под действием пары сил с моментом M. Радиус шкива r, его момент инерции относительно оси вращения I. Коэффициенты жесткости пружин *4* одинаковы и равны c, силы сопротивления демпферов *5* пропорциональны скоростям грузов по отношению к тросу (коэффициент пропорциональности μ). Трос по шкиву не скользит. Движение начинается из положения системы, когда пружины не деформированы.

Составить дифференциальные уравнения движения системы.

Ответ:

$$I\ddot{\varphi} + 2\mu r^2\dot{\varphi} - \mu r(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2cr^2\varphi - cr(x_1 + x_2) = M,$$

$$m_1\ddot{x}_1 + \mu(\dot{x}_1 - r\dot{\varphi}) + c(x_1 - r\varphi) = m_1 g,$$

$$m_2\ddot{x}_2 + \mu(\dot{x}_2 - r\dot{\varphi}) + c(x_2 - r\varphi) = -m_2 g.$$

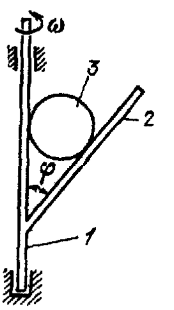
Глава 13

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР И УРАВНОВЕШИВАНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ВРАЩАЮЩИХСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНЫХ ОСЕЙ

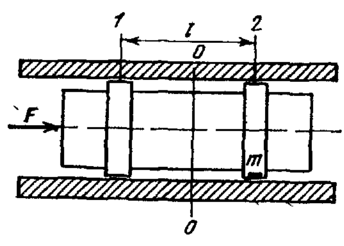
§ 1. Определение реакций опор

13.1. Вал *1* вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. К валу приварен под углом φ стержень *2*. Между ними находится однородный диск *3* радиуса r. Определить, при каком значении ω давление диска на вал будет равно нулю. Толщиной вала пренебречь.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}\operatorname{ctg}\varphi}$.



К задаче 13.1.



К задаче 13.2.

13.2. Тело цилиндрической формы, имеющее кольцевые выступы *1* и *2*, расстояние между которыми l, движется равномерно поступательно внутри горизонтальной трубы радиуса R, вращаясь относительно ее оси с постоянной угловой скоростью ω. Коэффициент трения скольжения f. Тело имеет неточность в изготовлении, которая показана на рисунке в виде дополнительной сосредоточенной массы m. Масса тела без учета массы m равна M. Плоскость OO, перпендикулярная оси трубы и проходящая посередине между выступами, является плоскостью симметрии тела (без учета массы m).

Определить величину силы, обеспечивающей равномерное поступательное движение тела, а также величину силы трения скольжения на выступе 2 в момент, когда масса m занимает нижнее положение. Считать реакции сосредоточенными силами, приложенными к выступам лишь снизу.

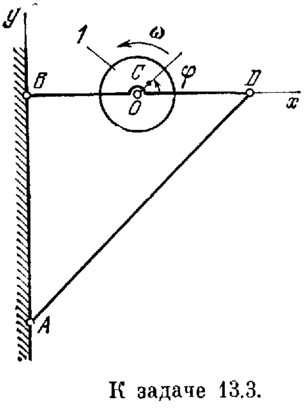
Ответ: $F = f[(M+m)g + mR\omega^2]$, $F_2 = f\left(\frac{M+2m}{2}g + mR\omega^2\right) + \frac{R}{l}f^2[(M+m)g + mR\omega^2]$.

13.3. В треугольнике ABD $AB = BD$, $\angle ABD = 90°$. Диск 1 массы m вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его геометрический центр O перпендикулярно его плоскости. Точка O находится на равных расстояниях от концов стержня BD. Центр масс диска C смещен по его радиусу относительно точки O на величину e.

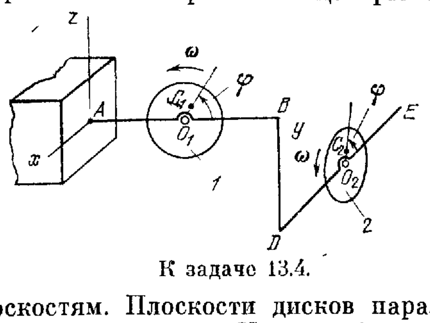
Определить проекции динамической реакции в шарнире B на оси Bx и By как функции угла φ. Толщиной диска пренебречь.

Ответ: $X_B^{\text{д}} = -\frac{me\omega^2}{2}(2\cos\varphi - \sin\varphi)$, $Y_B^{\text{д}} = -\frac{me\omega^2}{2}\sin\varphi$.

13.4. Коленчатый стержень $ABDE$ изогнут в точках B и D под прямыми углами и укреплен в заделке A так, что колено AB перпендикулярно плоскости Axz. Диски 1 и 2 вращаются с одинаковыми постоянными угловыми скоростями ω вокруг осей, проходящих через их геометрические центры O_1 и O_2 перпендикулярно их плоскостям. Плоскости дисков параллельны плоскостям Ayz и Axz соответственно. Центры O_1 и O_2



К задаче 13.3.



К задаче 13.4.

расположены так, что $O_1A = O_1B = O_2D$. Массы дисков одинаковы и равны m. Центры масс дисков C_1 и C_2 смещены относительно центров O_1 и O_2 на расстояния $O_1C_1 = e_1$ и $O_2C_2 = e_2$. В начальный момент времени отрезки O_1C_1 и O_2C_2 были отклонены от прямых AB и DE соответственно на равные углы φ. Вращение дискам было сообщено одновременно.

Пренебрегая толщиной дисков и полагая $AB = 2BD = a$, определить динамические реакции заделки как функции угла φ.

Ответ: $X_A^{д} = me_2\omega^2\cos\varphi$, $Y_A^{д} = -me_1\omega^2\cos\varphi$, $Z_A^{д} = -m(e_1 + e_2)\,\omega^2\sin\varphi$, $M_{Ax}^{д} = -\dfrac{m(e_1 + 2e_2)\,a\omega^2}{2}\sin\varphi$, $M_{Ay}^{д} = -\dfrac{me_2a\omega^2}{2}\times(\sin\varphi + \cos\varphi)$, $M_{Az}^{д} = -me_2a\omega^2\cos\varphi$.

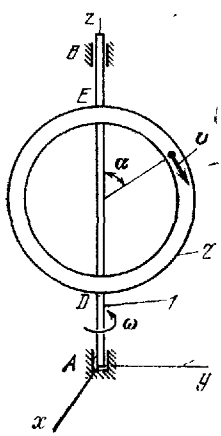
13.5. Вал *1* вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. С валом жестко скреплено однородное кольцо *2* радиуса r так, что его вертикальный диаметр совпадает с осью вращения вала и $AD = BE = r/2$. В кольце движется шарик массы m с постоянной относительной скоростью v.

Определить динамические реакции опор при $\alpha = 60°$, полагая, что плоскость кольца совпадает с плоскостью Ayz.

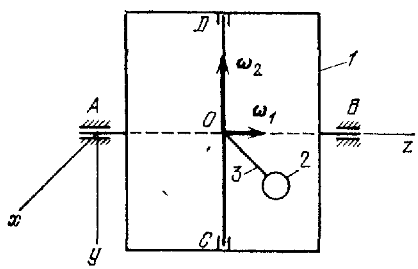
Ответ: $X_A^{д} = -\dfrac{m\omega v}{3}$, $X_B^{д} = -\dfrac{2m\omega v}{3}$, $Y_A^{д} = -\dfrac{m(2r^2\omega^2 + 3v^2)\sqrt{3}}{12r}$, $Y_B^{д} = -\dfrac{m(4r^2\omega^2 + 3v^2)\sqrt{3}}{12r}$.

13.6. В модели тренажера рамка *1* вращается вокруг горизонтальной оси AB с постоянной угловой скоростью ω_1. Тело *2* массы m, прикрепленное на конце стержня *3*, вращается с угловой скоростью $\omega_2 = 2\omega_1$ вокруг оси CD. Ось CD пересекает ось AB под прямым углом. Стержень составляет с осью CD угол 45°, длина стержня l, $AO = BO = 2l$.

Определить динамические реакции опор A и B в момент времени, когда плоскость рамки вертикальна, стержень расположен в этой плоскости, а тело находится в нижнем положении. Размерами тела пренебречь.



К задаче 13.5.



К задаче 13.6.

Ответ: $X_A^д = 0,\ X_B^д = 0,\ Y_A^д = \frac{1 - 10\sqrt{2}}{8}\, ml\omega_1^2,$

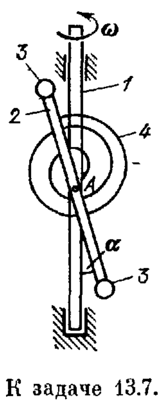
$$Y_B^д = -\frac{1 + 10\sqrt{2}}{8}\, ml\omega_1^2,\ Z_A^д = 0,\ Z_B^д = -2\sqrt{2}\, ml\omega_1^2.$$

13.7. В механизме центробежного маятника вал *1* вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. При этом однородный стержень *2* с грузами *3* на концах поворачивается вокруг своей оси симметрии A и деформирует пружину *4*. Длина стержня $2l$, масса его M. Масса каждого груза m, коэффициент жесткости пружины c. При недеформированном состоянии пружины стержень отклонен от вертикали на угол α_0.

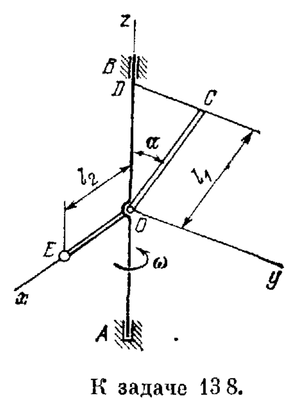
Определить угол наклона стержня к вертикали α. Грузы рассматривать как материальные точки. При вычислениях положить $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$.

Ответ: $\alpha = \dfrac{3c\alpha_0}{3c - (M + 6m)\, l^2\omega^2}$.

13.8. К вертикальному валу AB, вращающемуся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с, с помощью шарнира O и нити CD прикреплен однородный стержень OC под углом α к оси Oz.



К задаче 13.7.



К задаче 13.8.

Стержень расположен в плоскости yOz, длина его $l_1 = 30$ см, масса $m_1 = 10$ кг. Нить параллельна оси Oy. Кроме стержня, к валу прикреплен точечный груз E массы $m_2 = 2$ кг при помощи стержня длины $l_2 = 5$ см.

При $\alpha = 30°$ и $AO = OB = 60$ см определить: натяжение нити, полные реакции (динамические и статические) опор A и B и полные реакции в шарнире O. Массу стержня OE не учитывать.

Ответ: $T = 78{,}3$ Н, $X_A = -4{,}18$ Н, $X_B = -5{,}82$ Н, $Y_A = -20{,}55$ Н, $Y_B = -54{,}45$ Н, $Z_A = 117{,}6$ Н, $Y_O = 3{,}3$ Н, $Z_O = 98$ Н.

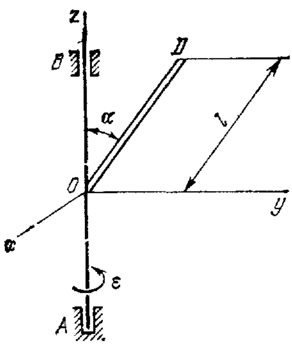
13.9. Однородный стержень OD длины l и массы m жестко прикреплен одним концом к вертикальному валу, который приводится во вращение из состояния покоя с постоянным угловым ускорением ε. Угол между стержнем и осью вращения равен α.

Определить динамические реакции подпятника A и подшипника B, если $AO = BO = l$.

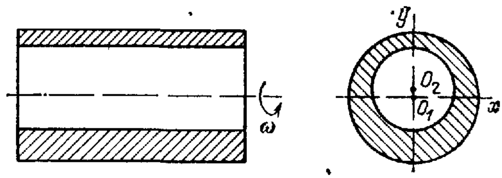
Ответ: $X_A^{д} = -\frac{ml\varepsilon}{4}\left(1-\frac{2}{3}\cos\alpha\right)\sin\alpha$, $X_B^{д} = -\frac{ml\varepsilon}{4}\left(1+\frac{2}{3}\cos\alpha\right)\times$ $\times\sin\alpha$, $Y_A^{д} = -\frac{ml}{4}(\varepsilon t)^2\left(1-\frac{2}{3}\cos\alpha\right)\sin\alpha$, $Y_B^{д} = -\frac{ml}{4}(\varepsilon t)^2\times$ $\times\left(1+\frac{2}{3}\cos\alpha\right)\sin\alpha$.

13.10. У трубы длины l оси наружной и внутренней поверхностей параллельно смещены на величину δ.

Центр нормального сечения внешней поверхности находится в точке O_1, центр нормального сечения внутренней поверхности — в точке O_2. Радиус внутренней поверхности r. Плотность материала трубы γ. Труба вращается вокруг горизонтальной оси симметрии внешней поверхности с постоянной угловой скоростью ω.



К задаче 13.9.



К задаче 13.10.

Доказать, что силы инерции трубы приводятся к равнодействующей и найти ее величину.

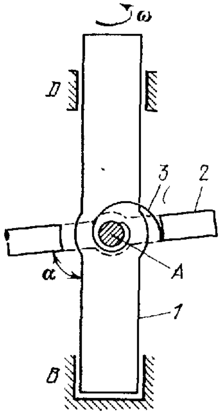
Ответ: $|\mathbf{R}| = \pi\gamma l\delta r^2\omega^2$.

13.11. В механизме центробежного маятника вал *1* вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Однородное кольцо *2* массы M поворачивается при этом вокруг оси A, совпадающей с его диаметром, и деформирует спиральную пружину *3*. Коэффициент жесткости пружины c. При недеформированном состоянии пружины плоскость кольца наклонена к вертикали под углом α_0. Внешний радиус кольца R, внутренний радиус $r = R/2$.

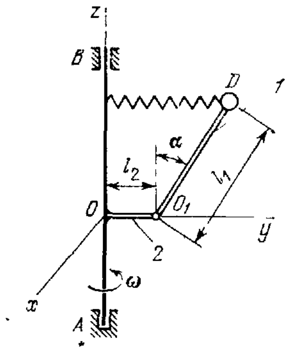
Определить приращение угла отклонения плоскости кольца $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$, считая $\Delta\alpha$ малым.

Ответ: $\Delta\alpha = \dfrac{5MR^2\omega^2\sin 2\alpha_0}{2\left(16c - 5MR^2\omega^2\cos 2\alpha_0\right)}$.

13.12. Однородный стержень *1* и точечный груз вращаются с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с вокруг вертикальной оси Oz. Стержень *1* крепится одним концом к валу с помощью пружины, другим — шарнирно к горизонтальному стержню *2*, жестко скрепленному с валом. Длина стержня *1* $l_1 = 30$ см, масса $M = 10$ кг, длина стержня *2* $l_2 = 5$ см. При вертикальном положении стержня *1* пружина не деформирована и ось ее горизонтальна, коэффициент жесткости пружины $c = 20$ Н/см. На конце стержня *1* находится точечный груз D массы $m = 1$ кг.



К задаче 13.11.

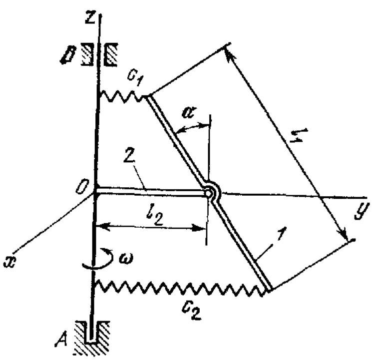


К задаче 13.12.

При $AO = OB = 60$ см определить: угол отклонения стержня α, полагая его малым, полные (статические и динамические) реакции подшипников и полные реакции в шарнире O_1. Массой стержня *2* пренебречь.

Ответ: $\alpha = 4{,}2°$; $X_A = X_B = 0$, $Y_A = -18{,}6$ Н, $Y_B = -49{,}5$ Н, $Z_A = 107{,}8$ Н, $Y_{O_1} = -24{,}3$ Н, $Z_{O_1} = 107{,}8$ Н.

13.13. Однородный стержень *1* крепится к вертикальному валу с помощью пружин и шарнирно к горизонтальному стержню *2*, жестко скрепленному с валом. Длина стержня $l_1 = 30$ см, масса $m = 10$ кг, длина стержня *2* $l_2 = 10$ см. Пружины не деформированы и оси их горизонтальны, когда стержень *1* отклонен от вертикали на угол $\alpha = 5°$, коэффициенты жесткости пружин $c_1 = 10$ Н/см и $c_2 = 20$ Н/см. Вал вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с.



К задаче 13.13.

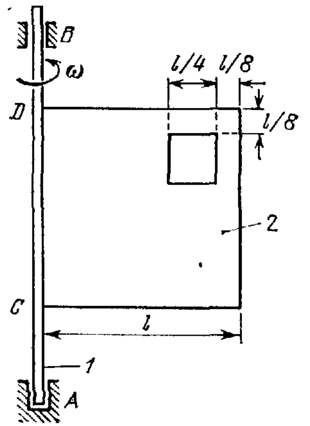
При $OA = OB = 60$ см определить: угол α отклонения стержня, полагая его малым; силы натяжения пружин $F_{пр}^{(1)}$ и $F_{пр}^{(2)}$; полные (статические и динамические) реакции опор A и B. Массой стержня 2 пренебречь.

Ответ: $\alpha = 9°$; $F^{(1)}_{\text{пр}} = 10{,}5$ Н, $F^{(2)}_{\text{пр}} = 21$ Н, $X_A = X_B = 0$, $Y_A = -204$ Н, $Y_B = -196$ Н, $Z_A = 98$ Н.

13.14. Вал 1 вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. С валом жестко связана тонкая однородная квадратная пластинка 2 массы M, имеющая квадратный вырез, размеры которого указаны на рисунке.

Определить динамические реакции в опорах вала, если $AC = BD = l/2$.

Ответ: $X^{\text{д}}_A = 0$, $X^{\text{д}}_B = 0$, $Y^{\text{д}}_A = -\frac{119}{480} Ml\omega^2$, $Y^{\text{д}}_B = -\frac{113}{480} Ml\omega^2$.



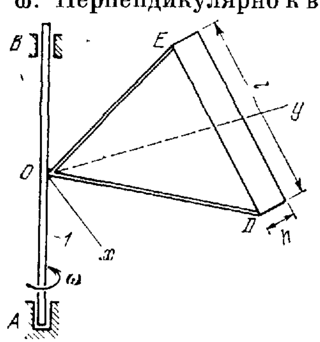
К задаче 13.14.

13.15. Вал 1 вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. К валу приварены в одной точке два стержня OD и OE длины l каждый. К противоположным концам стержней жестко прикреплен тонкий однородный прямоугольник массы M так, что его плоскость совпадает с плоскостью стержней. Продольная ось прямоугольника образует с вертикалью угол α. Ось симметрии конструкции Oy перпендикулярна оси вращения.

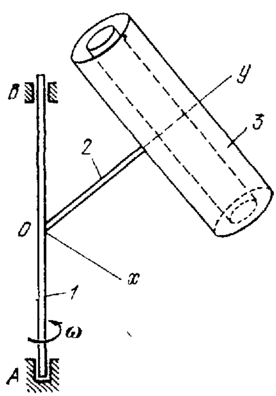
Определить динамические реакции в опорах вала, если длина прямоугольника l, ширина h, $OA = OB = l/2$. Массой стержней пренебречь.

Ответ: $X^{\text{д}}_B = -X^{\text{д}}_A = \frac{Ml\omega^2}{24}\sin 2\alpha$, $Y^{\text{д}}_A = Y^{\text{д}}_B = -\frac{M\omega^2}{4}\left(h + l\sqrt{3}\right)$.

13.16. Вал 1 вращается вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Перпендикулярно к валу при-



К задаче 13.15.



К задаче 13.16.

варен стержень 2 длины l, на противоположном конце которого жестко укреплена однородная толстостенная труба 3 массы M и длины $2l$. Внешний радиус трубы R, внутренний радиус $r = R/2$. Ось стержня перпендикулярна боковой поверхности трубы и делит ее образующую пополам. Ось трубы составляет с вертикалью угол α.

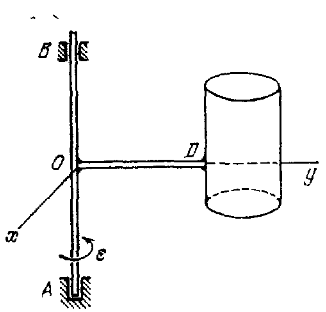
Определить динамические реакции в опорах вала, если $AO = OB = l$, $l = 3R$. Массой стержня пренебречь.

Ответ: $X_A^д = -\frac{43}{192} MR\omega^2 \sin 2\alpha$, $X_B^д = -X_A^д$, $Y_A^д = Y_B^д = -2MR\omega^2$.

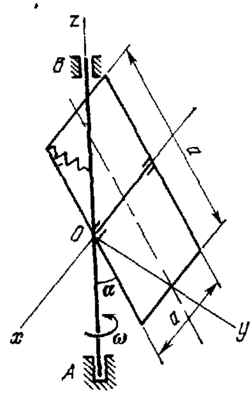
13.17. Сплошной однородный круговой цилиндр массы m кг, радиуса r и высоты h вращается вокруг вертикальной оси AB с постоянным угловым ускорением ε рад/с^2. Стержень OD, удерживающий цилиндр в вертикальном положении, перпендикулярен оси вращения и боковой поверхности цилиндра. Точка D отстоит от нижнего основания цилиндра на расстояние $h/3$.

Определить динамические реакции в опорах A и B в момент времени $t = 2$ с, если $OA = OB = OD = l$ м, $h = 2l/3$, $r = l/4$. Массой стержня OD пренебречь. Движение начинается из состояния покоя.

Ответ: $X_A^д = -\frac{5}{9} ml\varepsilon$ Н, $X_B^д = -\frac{25}{36} ml\varepsilon$ Н, $Y_A^д = aml\varepsilon^2$ Н, $Y_B^д = bml\varepsilon^2$ Н, $a = -20/9c^2$, $b = -25/9c^2$.



К задаче 13.17.



К задаче 13.18.

13.18. Однородная квадратная пластинка может вращаться вокруг горизонтальной оси, неизменно связанной с вертикальным валом, вращающимся с постоянной угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с. Сторона пластинки $a = 20$ см, масса $m = 3$ кг. Верхний конец пластинки прикреплен к валу с помощью пружины, коэффициент жесткости которой $c = 20$ Н/см. В начальный момент угол отклонения пластинки от вертикали $\alpha_0 = 5°$, пружина при этом не деформирована.

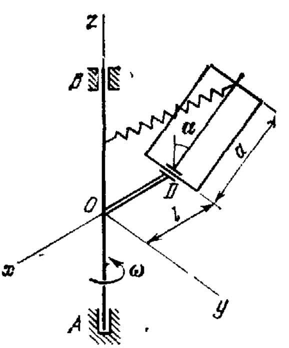
При $AO = 40$ см, $OB = 60$ см определить: угол отклонения пластинки, полагая его малым; натяжение пружины; полные (динамические и статические) реакции подпятника A и подшипника B.

Ответ: $\alpha = 6{,}25°$, $F_{пр} = \frac{ac}{2}(\alpha - \alpha_0) = 4{,}36$ Н; $X_A = 69$ Н, $X_B = 51$ Н, $Y_A = -0{,}436$ Н, $Y_B = 0{,}436$ Н, $Z_A = 29{,}4$ Н.

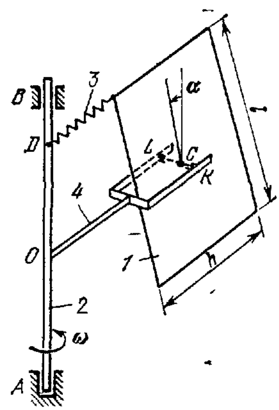
13.19. Однородная прямоугольная пластинка шарнирно прикреплена к горизонтальному стержню OD, приваренному к вертикальному валу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с. Ось шарнира горизонтальна и перпендикулярна стержню. Длина пластинки $a = 20$ см, масса $m = 3$ кг. Длина стержня OD $l = 5$ см. Верхний конец пластинки прикреплен к валу при помощи пружины, коэффициент жесткости которой $c = 20$ Н/см. В начальный момент пластинка находилась в вертикальной плоскости, пружина при этом была не деформирована.

При $AO = 40$ см, $OB = 60$ см определить: угол α отклонения пластинки, полагая его малым; натяжение пружины; полные (динамические и статические) реакции подпятника A и подшипника B. Массой стержня OD пренебречь.

Ответ: $\alpha = 5{,}63°$; $F_{пр} = 39{,}3$ Н, $X_A = 33{,}7$ Н, $X_B = 38$ Н, $Y_A = 0$, $Y_B = 0$, $Z_A = 29{,}4$ Н.



К задаче 13.19.



К задаче 13.20.

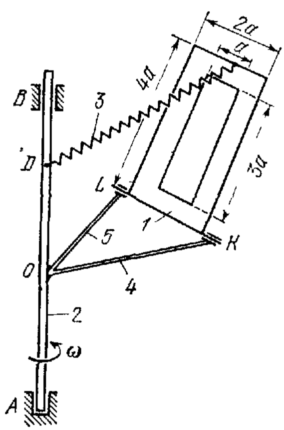
13.20. Прямоугольная однородная пластинка *1* массы M вращается вместе с валом *2* вокруг вертикальной оси AB с постоянной угловой скоростью ω. Одновременно она может поворачиваться вокруг горизонтальной оси KL, перпендикулярной ее плоскости и проходящей через ее центр. Пластинка соединена с валом пружиной *3*, коэффициент жесткости которой c. В начальный момент времени продольная ось пластинки составляла с вертикалью малый угол α_0. Пружина при этом была не деформирована и ее ось была параллельна горизонтальной прямой OC.

Определить угол α в произвольный момент времени, считая отклонение от начального положения малым. Определить также динамические реакции в опорах A и B, полагая $OB = OC = a$, $AO = h = \frac{3}{4}a$, $l = \frac{\sqrt{5}}{4}a$, $c = \frac{Ma^2\omega^2}{l^2}$, $\alpha_0 = \frac{1}{9}$ рад. Массой вилки 4 пренебречь.

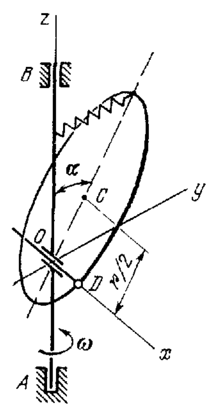
Ответ: $\alpha = \frac{1}{6}$ рад; $|R_A^д| = \frac{73}{126}Ma\omega^2$, $|R_B^д| = \frac{53}{126}Ma\omega^2$.

13.21. Прямоугольная однородная рамка 1 массы M вращается вместе с валом 2 вокруг вертикальной оси AB с постоянной угловой скоростью ω. Одновременно она может поворачиваться вокруг горизонтальной оси KL, лежащей в ее плоскости. Стержни 4 и 5, соединяющие вал с пластиной, находятся в горизонтальной плоскости и жестко прикреплены к валу. Расстояние между осями AB и KL равно $3a$.

Рамка соединена с валом пружиной 3, коэффициент жесткости которой c. При вертикальном положении рамки пружина не деформирована и ее ось горизонтальна.



К задаче 13.21.



К задаче 13.22.

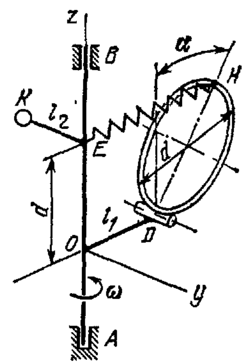
Определить величину суммы динамических реакций в подшипниках K и L, считая угол отклонения рамки от вертикали малым. Массами стержней 4 и 5, а также изменением направления оси пружины пренебречь. При вычислениях положить $\omega = \sqrt{g/a}$, $c = 4Mg/a$.

Ответ: $|R_K^д + R_L^д| \approx 1{,}51Mg$.

13.22. Однородный диск радиуса $r = 10$ см и массы $m_1 = 3$ кг шарнирно крепится к вертикальному валу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Верхний конец диска прикреплен к валу с помощью пружины, коэффициент жесткости которой $c = 10$ Н/см. В точке пересечения оси шарнира с краем диска прикреплен точечный груз D массы $m_2 = 0{,}4$ кг. В начальный момент времени диск отклонен от вертикали на угол $\alpha_0 = 10°$, пружина при этом не деформирована.

При $AO = OB = 50$ см определить: угол α отклонения диска, полагая его малым; натяжение пружины: полные (динамические и статические) реакции подпятника A и подшипника B.

Ответ: $\alpha = 11{,}5°$; $F_{пр} = 3{,}98$ Н; $X_A = -1{,}39$ Н, $X_B = -2{,}07$ Н, $Y_A = -0{,}91$ Н, $Y_B = -2{,}11$ Н, $Z_A = 33{,}32$ Н.

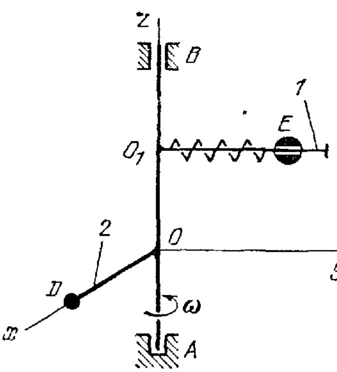


К задаче 13.23.

13.23. Однородное кольцо шарнирно крепится к горизонтальному стержню OD, приваренному к вертикальному валу и вращающемуся вместе с валом с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Ось шарнира в точке D горизонтальна и перпендикулярна стержню. Диаметр кольца $d = 30$ см, масса $m_1 = 3$ кг. Длина стержня OD $l_1 = 20$ см. Точка H кольца соединена с валом пружиной, коэффициент жесткости которой $c = 6$ Н/см. В точке E к валу приварен горизонтальный стержень под прямым углом к стержню OD. Длина этого стержня $l_2 = 25$ см, на его конце прикреплен точечный груз K массы $m_2 = 0{,}5$ кг. В начальный момент кольцо находилось в вертикальной плоскости, пружина при этом была не деформирована.

При $AO = 40$ см, $OB = 60$ см определить: угол α отклонения плоскости кольца, полагая его малым; натяжение пружины; полные (динамические и статические) реакции подпятника A и подшипника B. Массой стержней пренебречь.

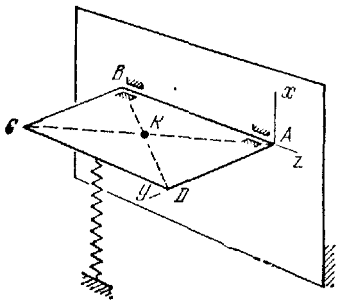
Ответ: $\alpha = 13{,}07°$; $F_{пр} = 41{,}05$ Н; $X_A = 23{,}96$ Н, $Y_A = 2{,}52$ Н, $Z_A = 34{,}3$ Н, $X_B = 46{,}3$ Н, $Y_B = 9{,}98$ Н.



К задаче 13.24.

13.24. Материальная точка E массы $m_1 = 2$ кг удерживается пружиной на горизонтальном стержне *1*, который приварен к вертикальному валу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Коэффициент жесткости пружины $c = 10$ Н/см, длина недеформированной пружины $l_0 = 20$ см. Материальная точка D массы $m_2 = 3$ кг прикреплена на конце горизонтального стержня 2, приваренного к валу под прямым углом к стержню 1.

Определить силу натяжения пружины и динамические реакции опор A и B при максимальном отклонении точки E от оси вращения, если $AO = OO_1 = O_1B = OD = 20$ см. Скорость точки E по отношению к стержню 1 в момент начала вращения вала положить равной нулю. Массой стержней пренебречь.



К задаче 13.25.

Ответ: $F_{пр} = 100$ Н; $X_A^д = -40$ Н, $X_B^д = -20$ Н, $Y_A^д = -\frac{100}{3}$ Н, $Y_B^д = -\frac{200}{3}$ Н.

13.25. Однородная прямоугольная полка $ABCD$ массы M прикреплена к вертикальной стене с помощью шарниров в точках A и B так, что может вращаться вокруг горизонтальной оси AB. Полка удерживается в горизонтальном положении равновесия пружиной, ось которой вертикальна и проходит через середину свободного края полки. В некоторый момент времени в центр полки кладется материальная точка K массы m.

Определить полные реакции шарниров в момент касания точки K с полкой, считая скорость точки K в этот момент равной нулю.

Ответ: $X_A = X_B = \frac{Mg}{4} + \frac{Mmg}{2(3m + 4M)}$, $Y_A = 0$, $Y_B = 0$.

§ 2. Уравновешивание тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

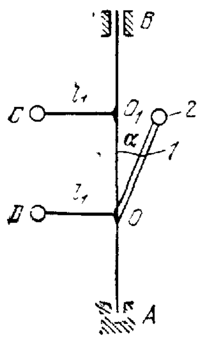
13.26. К вращающемуся с постоянной угловой скоростью вертикальному валу жестко прикреплен под углом $\alpha = 30°$ однородный стержень 1 длины l и массы m_1. На конце стержня прикреплена материальная точка 2 массы m_2.

При $l_1 = 2l/3$ и $OO_1 = l$ определить, каковы должны быть точечные массы в точках C и D, чтобы в опорах A и B не возникало динамических реакций.

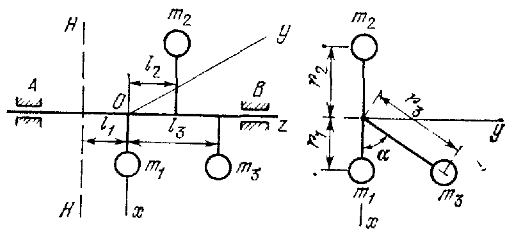
Ответ: $m_C = 0{,}217(m_1 + 3m_2)$, $m_D = 0{,}158m_1 + 0{,}101m_2$.

13.27. Три тела с массами m_1, m_2 и m_3 вращаются в параллельных плоскостях вокруг одной общей оси с постоянной угловой скоростью.

Определить, где следует поместить материальную точку массы m_4 в плоскости вращения массы m_3 и точку массы m_5 в плоскости $II - II$, чтобы при их совместном вращении с тремя исходными телами динамические реакции в опорах A и B были равны нулю. Плоскость $H-H$ перпендикулярна оси вращения. При вычислениях положить $m_1 = 8$ кг, $m_2 = m_3 = 10$ кг, $m_4 = 6$ кг, $m_5 = 12$ кг, $r_1 = 18$ см, $r_2 = 28$ см, $r_3 = 36$ см, $l_1 = l_2 = 16$ см, $l_3 = 36$ см, $\alpha = 60°$. Тела с массами m_1, m_2 и m_3 считать материальными точками.



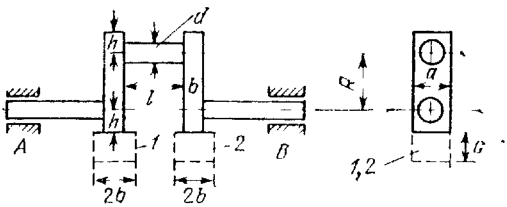
К задаче 13 26.



К задаче 13.27.

Ответ: $x_4 = -8{,}67$ см, $y_4 = -52$ см, $x_5 = 0{,}67$ см, $y_5 = 0$.

13.28. На рисунке изображено однородное колено вала, вращающегося вокруг оси AB с постоянной угловой скоростью. Для



К задаче 13.28.

его уравновешивания применяются две одинаковые массы *1* и *2* в форме параллелепипедов с двумя заданными сторонами a и $2b$.

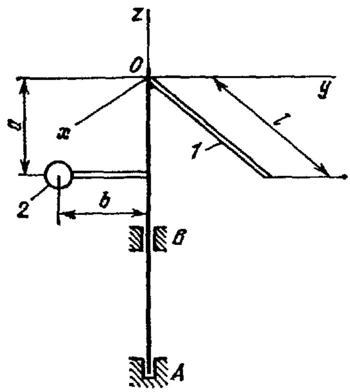
Определить третий размер этих параллелепипедов c, предполагая, что плотность материала колена и противовесов одинакова. При вычислениях полагать $a = 4$ см, $b = 3$ см, $l = 6$ см, $R = 6$ см, $h = 3$ см, $d = 3$ см.

Ответ: $c = 4{,}46$ см.

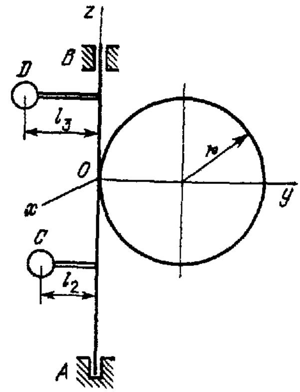
13.29. К вращающемуся с постоянной угловой скоростью вертикальному валу жестко прикреплен под углом α однородный стержень *1* длины l и массы M_1.

При заданной массе M_2 точечного груза *2* выбрать такие размеры a и b, чтобы в подпятнике A и подшипнике B не возникало динамических реакций.

Ответ: $a = \frac{2}{3} l \cos\alpha$, $b = \frac{M_1 l}{2M_2} \sin\alpha$.



К задаче 13.29.

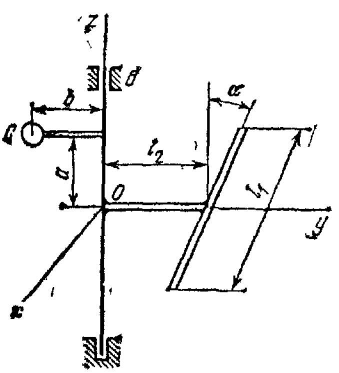


К задаче 13.30.

13.30. Вертикальный вал вращается с постоянной угловой скоростью. К валу в плоскости Oyz жестко прикреплены однородный тонкий круглый диск массы M_1 и радиуса r, а также точечные грузы C и D на равных расстояниях от оси Oy.

При заданных l_2 и l_3 выбрать такие массы грузов C и D, чтобы в подпятнике A и подшипнике B не возникало динамических реакций.

Ответ: $M_2 = \frac{r}{l_2}\frac{M_1}{2}$, $M_3 = \frac{r}{l_3}\frac{M_1}{2}$.



К задаче 13.31.

13.31. Вертикальный вал вращается с постоянной угловой скоростью. К валу жестко прикреплен горизонтальный стержень длины $l_2 = 5$ см. К этому стержню жестко под углом $\alpha = \pi/4$ к вертикали в плоскости Oyz прикреплен однородный стержень длины $l_1 = 10$ см и массы $M_1 = 50$ кг. Расстояния от точки прикрепления до концов этого стержня одинаковы.

При заданной массе точечного груза C $M_2 = 10$ кг выбрать такие размеры a и b, чтобы в подпятнике A и подшипнике B не возникало динамических реакций. Массой горизонтальных стержней пренебречь.

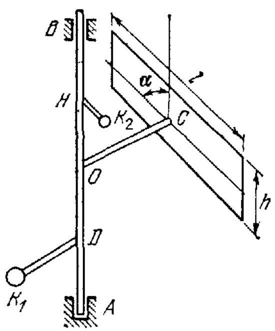
Ответ: $a = \frac{l_1^2}{24 l_2}\sin 2\alpha = 0{,}833$ см, $b = \frac{M_1}{M_2} l_2 = 25$ см.

13.32. Тонкая однородная прямоугольная пластинка длины l, ширины h и массы M вращается вокруг вертикальной оси AB с постоянной угловой скоростью. Стержень OC перпендикулярен оси вращения и плоскости пластинки. Он удерживает пластинку в положении, при котором ее продольная ось наклонена под углом α к вертикали. Точка C является центром пластинки, $OA = OB = l$, $OC = 2l/3$.

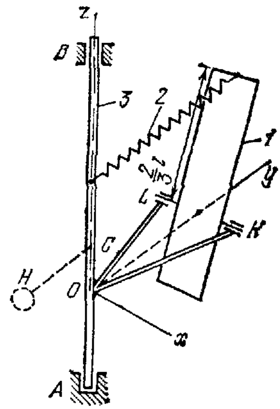
Для компенсации динамических реакций опоры B необходимо установить противовесы K_1 и K_2 так, что $DK_1 \parallel OC$, $HK_2 \perp OC$, $OD = OH = l/2$, $DK_1 = 2l$, $HK_2 = l/4$. Массы противовесов предполагаются сосредоточенными в точках.

Определить необходимые массы противовесов m_1 и m_2, полагая $h < l$. Массой стержней пренебречь.

Ответ: $m_1 = \frac{2}{3} M$, $m_2' = \frac{M}{9}\left(1 - \frac{h^2}{l^2}\right) \sin 2\alpha$.



К задаче 13.32.



К задаче 13.33.

13.33. Тонкая однородная прямоугольная пластинка *1* массы M вращается вокруг вертикальной оси AB с постоянной угловой скоростью ω. Одновременно она может поворачиваться вокруг горизонтальной оси KL, перпендикулярной ее продольной оси. Пружиной *2* пластинка связана с валом *3*. Длина пластинки l, расстояние между осями AB и KL равно $l/2$. Стержни OL и OK расположены в горизонтальной плоскости. Коэффициент жесткости пружины c, при вертикальном положении пластинки пружина не деформирована и ее ось перпендикулярна плоскости пластинки. Для того чтобы обеспечить отсутствие динамических реакций в опорах A и B, необходимо установить противовес заданной массы m.

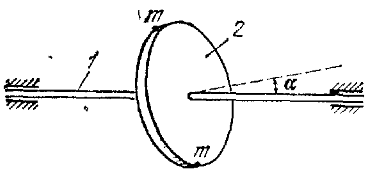
Определить координаты противовеса H относительно системы отсчета $Oxyz$, плоскость Oyz которой неизменно связана с плоскостью симметрии конструкции. Угол отклонения пластинки от вертикали считать малым, размерами противовеса и массой стержней пренебречь. При вычислениях полагать $\omega = \sqrt{g/l}$, $c = 2Mg/l$.

Ответ: $x_H = 0$, $y_H = -\frac{23}{44}\frac{M}{m}l$, $z_H = \frac{13}{69}l$.

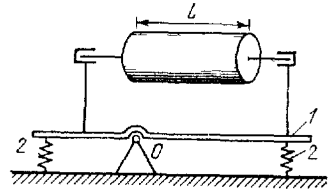
13.34. Вал *1* вращается вокруг неподвижной оси. Однородный круглый диск *2* радиуса $R=5$ см и толщины $h=2$ см насажен на вал с перекосом так, что ось вращения проходит через центр симметрии диска, а нормаль к торцам диска образует с этой осью угол $\alpha=15'$. Для уравновешивания диска могут быть использованы две одинаковые точечные массы m. Они должны быть укреплены на краях разных торцов диска в точках, лежащих на прямой, проходящей через его центр.

Определить величину уравновешивающих масс, если масса диска $M=1250$ г.

Ответ: $m\approx 3{,}2$ г.



К задаче 13.34.



К задаче 13.35.

13.35. На рисунке изображена простейшая балансировочная машина. Ротор, представляющий собой прямой круговой цилиндр радиуса r, помещен на станине *1*, которая может качаться на оси O и связана с основанием пружинами *2*. При вращении несбалансированного ротора возникают вынужденные колебания станины, по амплитуде и фазе которых можно судить о величине и расположении добавочных масс, необходимых для балансировки. Ротор поместили так, что его левый торец находится против оси O, продольная ось ротора и станина горизонтальны. Момент инерции станины с ротором относительно оси O равен I. Дополнительный момент сил упругости пружин, возникающий при повороте станины на угол φ, равен $c\varphi$, где $c=\text{const}>0$. Амплитуда установившихся колебаний станины при вращении ротора с постоянной угловой скоростью ω оказалась равной φ_0.

Определить величину добавочной массы, которую необходимо поместить для балансировки на правом торце ротора на расстоянии r от его оси вращения. Влиянием сил трения на амплитуду вынужденных колебаний пренебречь.

Ответ: $m=\dfrac{\varphi_0(c-I\omega^2)}{rL\omega^2}\quad (c>I\omega^2)$.

13.36. Известно, что динамические реакции опор вращающегося ротора равны нулю тогда и только тогда, когда его ось вращения является главной центральной осью инерции ротора. Динамическая балансировка ротора состоит в том, что в распределение его масс вносят такие коррективы, в результате которых достигается выполнение указанного условия.

Доказать, что балансировку ротора можно осуществить путем присоединения к нему лишь двух точечных масс, расположенных в двух любых заданных нормальных поперечных сечениях ротора на заданных расстояниях от его оси вращения.

Глава 14

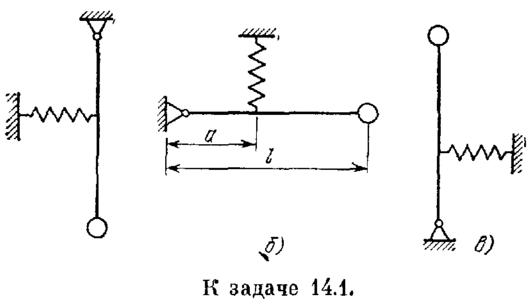
КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Свободные колебания систем с одной степенью свободы

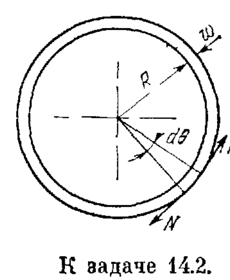
14.1. Математический маятник длины l подкреплен пружиной, отстоящей от оси вращения на расстоянии a. Масса груза равна m, коэффициент жесткости пружины c.

Найти и сравнить собственные частоты колебаний маятника относительно трех различных положений равновесия, показанных на рисунке.

Ответ: *а*) $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 + \frac{g}{l}}$, *б*) $\omega_0 = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{c}{m}}$, *в*) $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \frac{g}{l}}$.



К задаче 14.1.



К задаче 14.2.

14.2. Определить собственную частоту радиальных колебаний тонкого круглого кольца. Радиус кольца равен R, площадь поперечного сечения F, плотность материала ρ, модуль упругости 1-го рода E.

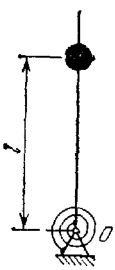
Указание. Упругая сила в поперечном сечении кольца при растяжении — сжатии равна $N = EF\frac{w}{R}$, где w — радиальная деформация кольца (положительные значения w и N соответствуют растяжению кольца),

Ответ: $\omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

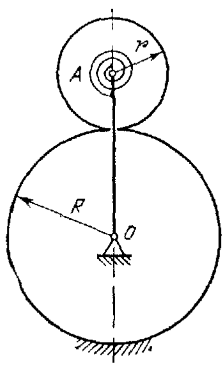
14.3. В вибрографах, предназначенных для записи низкочастотных горизонтальных колебаний, применяется маятник, связанный с основанием спиральной пружиной, которая при вертикальном положении маятника не деформирована. Регулировка собственного периода колебаний маятника осуществляется за счет изменения расстояния l от оси вращения O до центра масс точечного груза массы m.

Пренебрегая массой стержня, найти зависимость собственного периода T_0 колебаний от расстояния l и расстояние $l_{кр}$, при котором равновесие маятника в вертикальном положении становится неустойчивым. Коэффициент жесткости пружины равен c.

Ответ: $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}\cdot\dfrac{mgl}{c - mgl}}$, $l_{кр} = \dfrac{c}{mg}$.



К задаче 14.3.



К задаче 14.4.

14.4. В планетарной передаче подвижная шестерня, представляющая собой однородный диск радиуса r и массы m, обкатывается по неподвижной шестерне радиуса R. С кривошипом OA шестерня связана спиральной пружиной, коэффициент жесткости которой c; при вертикальном положении кривошипа пружина не деформирована.

Пренебрегая массой кривошипа, определить критическое значение $c_{кр}$ коэффициента жесткости пружины, при котором равновесие системы, соответствующее вертикальному положению кривошипа, становится неустойчивым, и найти собственную частоту колебаний системы, если $R = 2r$ и $c = 10c_{кр}$.

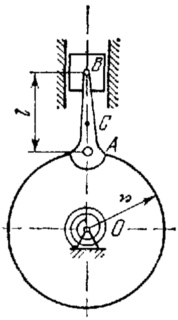
Ответ: $c_{кр} = \dfrac{3}{4}mgr$, $\omega_0 = \sqrt{2g/r}$.

14.5. Кривошипно-ползунный механизм состоит из маховика, представляющего собой однородный диск радиуса $r = 0{,}3$ м и массы $m_1 = 5$ кг, шатуна длины $l = r$ и массы $m_2 = 3$ кг и ползуна массы $m_3 = 4$ кг. Центр масс шатуна находится на расстоянии $AC = l/3$, радиус инерции шатуна относительно центральной оси $\rho_{Cz} = l/3\sqrt{2}$. Маховик укреплен на конце упругого вала (условно показан в виде спиральной пружины), коэффициент жесткости которого при кручении $c = 317{,}52$ Н · м/рад; при вертикальном положении шатуна вал не деформирован.

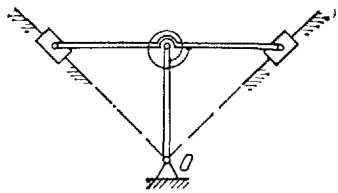
Определить, является ли равновесие в показанном на рисунке положении устойчивым, и найти собственную частоту колебаний системы.

Ответ: устойчиво, $\omega_0 = 28$ рад/с.

14.6. Эллипсограф состоит из кривошипа длины $l = 0{,}16$ м, линейки длины $2l$ и спиральной



К задаче 14.5.



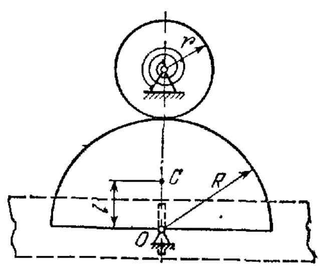
К задаче 14.6.

пружины, коэффициент жесткости которой равен $c = 19{,}6$ Н · м/рад. Кривошип и линейка представляют собой однородные стержни массы $m = 2$ кг и $2m$ соответственно. В положении равновесия кривошип вертикален и перпендикулярен линейке. При отклонении кривошипа от вертикали концы линейки движутся по взаимно перпендикулярным направляющим, наклоненным к вертикали под углом 45°.

Определить, является ли равновесие системы в показанном на рисунке положении устойчивым, и найти собственный период колебаний системы. Массой ползунов пренебречь.

Ответ: устойчиво, $T_0 = 0{,}293$ с.

14.7. Механизм управления заслонкой трубопровода состоит из зубчатого сектора, жестко связанного с заслонкой, шестерни и упругого приводного вала (условно показан в виде спиральной пружины). Вал не деформирован, когда центр масс C сектора находится на вертикали, проходящей через оси вращения сектора и шестерни. Сектор и шестерня являются однородными телами; масса сектора $m_1 = 8$ кг, радиус $R = 0{,}3$ м, масса шестерни $m_2 = 2$ кг, радиус $r = 0{,}1$ м, коэффициент жесткости вала при кручении $c = 11{,}76$ Н · м/рад, $l = OC = \frac{4}{3\pi}R$, массой заслонки можно пренебречь.



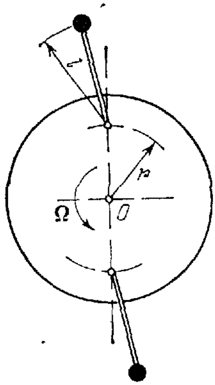
К задаче 14.7.

Определить амплитуду угловых колебаний сектора, если приводной вал, вращающийся с угловой скоростью 10 рад/с, был мгновенно заторможен при прохождении системой положения равновесия.

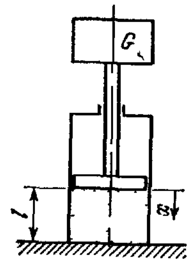
Ответ: $A = 0{,}228$ рад ($\sim 13°$).

14.8. Для гашения крутильных колебаний вращающихся роторов применяются маятники, ось которых располагается с эксцентриситетом r относительно оси ротора O.

Полагая, что движение математического маятника длины l происходит в горизонтальной плоскости, определить собственный период его колебаний в относительном движении при угловой скорости вращения ротора, равной Ω.



К задаче 14.8.



К задаче 14.9.

Ответ: $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega}\sqrt{\frac{l}{r}}$.

14.9. Пневматический амортизатор состоит из цилиндра и поршня со штоком. Свободный объем цилиндра ненагруженного амортизатора равен V_0, площадь поршня F, давление воздуха при заправке p_0. Под действием веса G амортизируемого груза поршень осаживается в положение статического равновесия.

Полагая процесс статической осадки изотермическим ($pV = \text{const}$), а процесс расширения — сжатия воздуха при колебаниях около положения равновесия адиабатическим ($p \cdot V^k = \text{const}$, $k = \text{const} > 0$), определить частоту малых ($x \ll l$) колебаний штока с амортизируемым грузом, если $G > p_0 F$.

Указание. Зависимость давления p воздуха от объема V при адиабатическом процессе $p/p_{\text{ст}} = (V/V_{\text{ст}})^k$, где $p_{\text{ст}}$, $V_{\text{ст}}$ — давление и объем воздуха при статическом равновесии поршня, следует разложить в ряд по степеням координаты x и удержать члены до первого порядка малости.

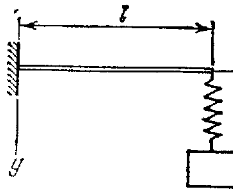
Ответ: $\omega_0 = \sqrt{k\frac{gG}{p_0 V_0}}$.

14.10. Груз массы m с помощью пружины прикреплен к концу упругой балки. Коэффициент жесткости пружины равен $c_{\text{п}}$, длина балки l, погонная жесткость при изгибе EJ_z (E — модуль упругости 1-го рода, J_z — осевой момент инерции площади поперечного сечения).

Пренебрегая массой пружины и балки, определить частоту свободных вертикальных колебаний груза.

Указание. Прогиб конца консольной балки при нагружении его вертикальной силы P подсчитывается по формуле $y = Pl/(3EJ_z)$.

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c_б \cdot c_п}{(c_б + c_п)\, m}}$, где $c_б = \dfrac{3EJ_z}{l}$.



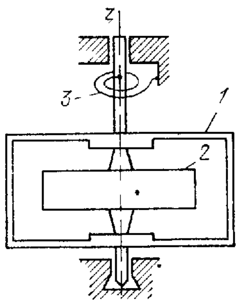
К задаче 14.10.

14.11. В условиях предыдущей задачи найти методом Рэлея приближенное значение низшей собственной частоты системы с учетом масс пружины $m_п$ и балки $m_б$, если $c_п = c_б = c$.

Указания. 1) Уравнение изогнутой оси балки при колебаниях принять в виде $y = \dfrac{\lambda_0}{4}\left(\dfrac{x}{l}\right)^2\left(3 - \dfrac{x^2}{l^2}\right)$, где λ_0 — статическое смещение груза;

2) по методу Рэлея частота свободных гармонических колебаний системы определяется из закона сохранения полной механической энергии $T_{max} = П_{max}$, при этом в T_{max} учитывается кинетическая энергия деформируемых элементов. Распределение скоростей точек по их длине принимается соответствующим распределению статических смещений от недеформированного состояния.

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{2\left(m + \dfrac{7}{12} m_п + \dfrac{33}{580} m_б\right)}}$.



К задаче 14.12.

14.12. Основной частью прибора, используемого для измерения моментов инерции деталей, является колебательная система, состоящая из легкой рамки *1*, в которой закрепляется деталь *2*, и спиральной пружины *3*. Последовательно замеряют периоды колебаний: T_1 — одной рамки, T_2 — рамки с эталоном, момент инерции $J_э$ которого известен, и T_3 — рамки с деталью.

Найти с помощью перечисленных данных момент инерции детали относительно оси, проходящей через опоры рамки.

Ответ: $J = \dfrac{T_3^2 - T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} J_э$.

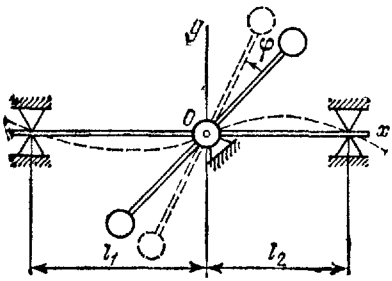
14.13. Колебательная система спускового регулятора часового механизма (на 30—60 с) состоит из двухкрылого баланса с моментом инерции I_0 и плоской пружины с погонной жесткостью при изгибе EJ_z (E — модуль упругости 1-го рода материала пружины, J_z — осевой момент инерции площади поперечного сечения). Регулировка периода колебаний регулятора осуществляется путем изменения рабочей длины пружины, при этом длина плеча l_1 остается постоянной и равной 10,5 мм, а длина l_2 может изменяться от 10,5 до 13,5 мм.

Пренебрегая трением в опорах, определить, в каких пределах обеспечивается регулировка периода, если при $l_1 = l_2 = 10{,}5$ мм, $T_0 = 0{,}0074$ с.

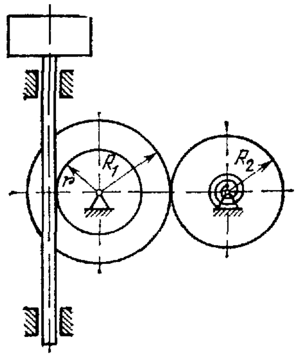
Указание. Восстанавливающий момент плоской пружины связан с углом φ поворота двухкрылого балаиса формулой $M = 3EJ_z\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)\varphi$.

Ответ: $T_0 = 0{,}0074$—$0{,}0078$ с.

14.14. Груз массы M укреплен на конце зубчатой рейки массы m, приводимой в движение системой зубчатых



К задаче 14.13.



К задаче 14.14.

колес. Моменты инерции колес равны J_1 и J_2, радиусы r, R_1, R_2, коэффициент жесткости приводного вала (условно показан в виде спиральной пружины) c.

Определить собственную частоту колебаний системы.

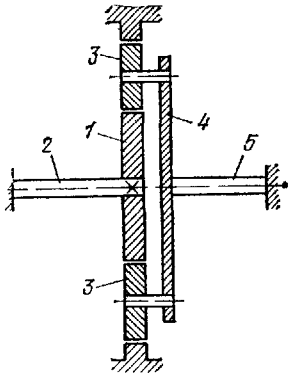
Ответ: $\omega_0 = \frac{R_1}{R_2}\sqrt{\frac{c}{(M+m)\,r^2 + J_1 + J_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}}$.

14.15. Планетарный редуктор состоит из центрального колеса *1* радиуса r_1, укрепленного на конце входного вала *2*, двух шестерен *3* радиуса r_2, обкатывающихся по внутренней поверхности неподвижной шестерни, и водила *4*, связанного с выходным валом *5*. Моменты инерции центрального колеса и водила равны J_1 и J_2, массы шестерен, представляющих собой однородные диски, m, коэффициенты жесткости при кручении входного и выходного валов c_1 и c_2.

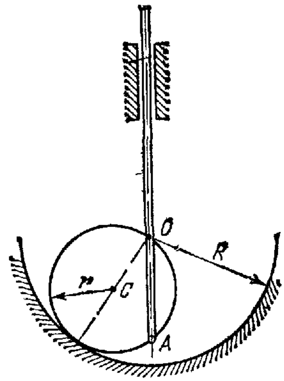
Полагая концы валов жестко закрепленными, определить собственную частоту колебаний системы.

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 + i_{12}^2 c_2}{J_1 + i_{12}^2 J_2 + 6 i_{13}^2 J_3}}$, где $i_{12} = \frac{r_1}{2(r_1 + r_2)}$, $i_{13} = \frac{r_1}{2r_2}$, $J_3 = \frac{mr_2^2}{2}$.

14.16. В гипоциклическом механизме подвижная шестерня, представляющая собой однородный диск радиуса r и массы m, обкатывается по внутренней поверхности неподвижного колеса радиуса $R=2r$. С подвижной шестерней шарниром A связан прямой стержень массы M, движущийся в вертикальных направляющих.



К задаче 14 15.

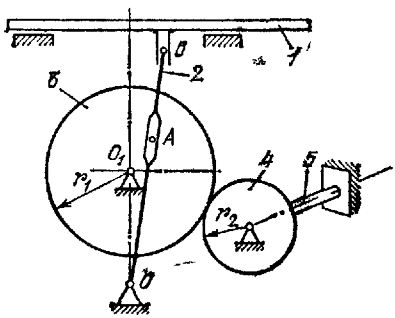


К задаче 14 16.

Определить собственную частоту колебаний системы, если $M=2{,}5m$.

Ответ: $\omega_0=2\sqrt{g/r}$.

14.17. Стол *1* продольно-строгального станка приводится в движение кривошипно-кулисным механизмом, состоящим из кулисы *2*, маховика *3*, приводной шестерни *4* и вала *5*. Расстояние между осями вращения маховика и кулисы $OO_1=L$, эксцентриситет приводного пальца $O_1A=e$, передаточное отношение $r_1/r_2=i$, длина кулисы $OB=R$. Масса стола равна m, момент инерции маховика J, коэффициент жесткости при кручении приводного вала c.



К задаче 14.17.

Пренебрегая массами кулисы и приводной шестерни с валом, определить собственную частоту колебаний стола в нейтральном положении (приводной палец находится в крайнем верхнем положении).

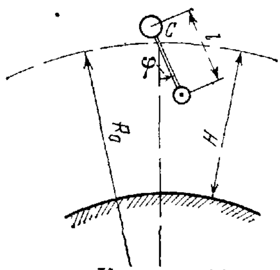
Ответ: $$\omega_0=\sqrt{\frac{ci^2}{J+mR^2\left(\frac{e}{L+e}\right)^2}}.$$

14.18. В тех случаях, когда требуется обеспечить ориентацию спутника на орбите в течение длительного времени, но с невысокой точностью применяется гравитационный метод ориентации: после выведения на орбиту из корпуса спутника на достаточно длинной штанге (16—20 м) выдвигается груз, и спутник с течением времени устанавливается так, что штанга располагается по прямой, направленной к центру Земли.

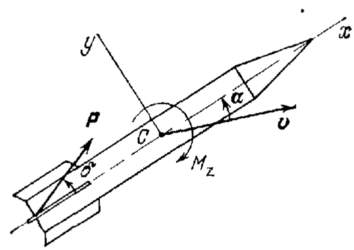
Полагая корпус спутника и груз материальными точками, соединенными жестким стержнем, определить период малых колебаний спутника, центр масс которого обращается по круговой орбите высоты $H = 1000$ км.

Указание. При вычислении восстанавливающего момента пренебречь членами второй и более высоких степеней относительно l/R_0, где l — длина штанги, R_0 — радиус орбиты.

Ответ: $T = 60{,}7$ мин.



К задаче 14.18.



К задаче 14.19.

14.19. При плоском движении ракеты распределенные по корпусу аэродинамические силы приводят к равнодействующей, приложенной в центре давления. Момент от аэродинамических сил относительно поперечной оси Cz, проходящей через центр масс ракеты, при малых углах атаки α приближенно равен $M_z = m_z^\alpha S l \rho v^2 \alpha$, где m_z^α — аэродинамический коэффициент, l и S длина и площадь миделева сечения ракеты, ρ — плотность воздуха, v — скорость полета. Автомат стабилизации управляет поворотными двигателями по закону $\delta = k_1\alpha + k_2\dot{\alpha}$, где δ — угол отклонения поворотного двигателя от оси ракеты. При малых углах δ поперечная управляющая сила от поворотного двигателя $Y_p = P \cdot \delta$.

Определить частоту угловых колебаний ракеты, если ее момент инерции относительно центральной поперечной оси равен J_z, а расстояние от центра масс ракеты C до оси вращения поворотного двигателя l.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{m_z^\alpha S l \rho v^2 + k_1 P l}{J_z} - \left(\dfrac{k_2 P l}{2J_z}\right)^2}$.

14.20. При прохождении стола продольно-строгального станка, рассмотренного в задаче 14.17, через нейтральное положение приводной вал был мгновенно остановлен тормозной муфтой.

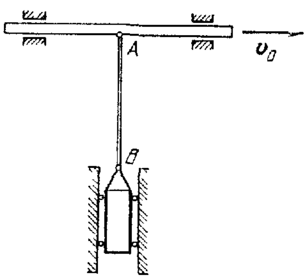
Определить максимальную величину угла закручивания вала, если скорость стола в момент остановки вала равнялась v.

Ответ: $\varphi_{max} = i\frac{L+e}{eR}\cdot\frac{v}{\omega_0}$.

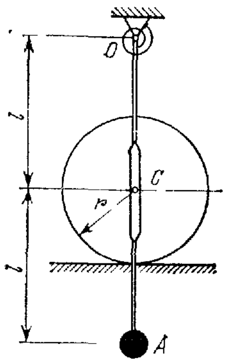
14.21. Шток массы $m_1 = 10$ кг связан тягой $AB = 0{,}49$ м с ползуном массы $m_2 = 50$ кг, движущимся в вертикальных направляющих. Вследствие удара по торцу шток, находившийся в равновесии, приобрел скорость $v_0 = 0{,}5$ м/с.

Пренебрегая массой тяги, определить период и амплитуду колебаний штока.

Ответ: $T_0 = 0{,}628$ с, $A = 5$ см.



К задаче 14.21.



К задаче 14.22.

14.22. Однородный диск радиуса $r = l/2 = 0{,}049$ м и массы $m_1 = 1{,}02$ кг, катясь без скольжения, поворачивает кулису $OA = 2l$, несущую на конце груз массы $m_2 = 1{,}53$ кг. При вертикальном положении кулисы спиральная пружина, коэффициент жесткости которой $c = 26{,}46$ Н · м/рад, не деформирована. В положении равновесия оси C катка, находящегося в покое, сообщили в горизонтальном направлении ударный импульс $S = 1{,}5$ Н · с.

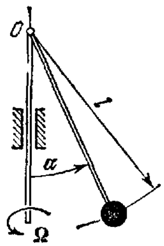
Полагая груз материальной точкой и пренебрегая массой кулисы, найти период и амплитуду колебаний оси диска.

Ответ: $T_0 = 0{,}314$ с, $A = 0{,}98$ см.

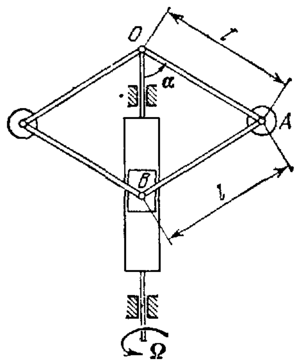
14.23. Стержень длины l с грузом массы m на конце связан цилиндрическим шарниром O с вертикальным валом. Вал вращается с угловой скоростью $\Omega = \sqrt{g/l}$.

Полагая груз материальной точкой и пренебрегая массой стержня, найти угол α_0, соответствующий положению устойчивого относительного равновесия, и квадрат частоты малых колебаний стержня около этого положения.

Ответ: $\alpha_0 = \arccos\frac{g}{l\Omega^2}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{l}\cos\alpha_0 - \Omega^2\cos 2\alpha_0 = \Omega^2 - \left(\frac{g}{l\Omega}\right)^2$.



К задаче 14.23.



К задаче 14.24.

14.24. Центробежный регулятор состоит из четырех соединенных шарнирами стержней длины l каждый, двух грузов массы m каждый и муфты массы M. Регулятор вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\Omega > \sqrt{\frac{M+m}{M}\frac{g}{l}}$.

Полагая грузы материальными точками и пренебрегая массой стержней, найти квадрат частоты малых колебаний регулятора около положения устойчивого относительного равновесия.

Ответ: $\omega_0^2 = \dfrac{g(M+m)\cos\alpha_0 - ml\Omega^2\cos 2\alpha_0}{ml + 2Ml\sin^2\alpha_0}$, где $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{M+m}{m}\frac{g}{l\Omega^2}\right)$.

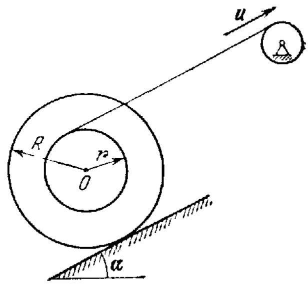
14.25. Угловая скорость вращения вала центробежного регулятора, рассмотренного в предыдущей задаче, мгновенно изменилась от значения $\Omega_1 = \sqrt{5g/l}$ до значения $\Omega_2 = \sqrt{6g/l}$.

Определить угловые колебания стержней регулятора в относительном движении, если $M = 2m$.

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{3} - 0{,}12\cos(0{,}433\Omega_2 t)$.

14.26. Катушка для кабеля катится вверх по плоскости, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30°$, под действием двух канатов, намотанных на ступень радиуса r. Канаты расположены симметрично относительно срединной плоскости катушки и вытягиваются с помощью лебедки с постоянной скоростью $u = 0{,}35$ м/с. В момент мгновенной остановки вращения вала лебедки удлинение ветвей канатов между валом и катушкой равно $\lambda = 2{,}5$ см.

Полагая, что качение по плоскости ободов радиуса R происходит без проскальзывания, определить максимальную величину удлинения канатов при колебаниях катушки, если ее радиус инерции относительно оси $\rho_0 = \sqrt{R \cdot r}$. Зависимость силы T натяжения канатов от деформации λ принять линейной $T/T_{ст} = \lambda/\lambda_{ст}$, где $T_{ст}$, $\lambda_{ст}$ — статические значения силы натяжения и деформации.



К задаче 14.26.

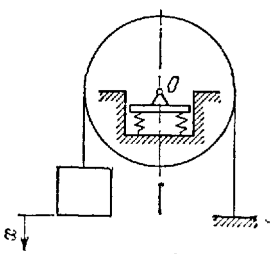
Ответ: $\lambda_{max} = 5{,}0$ см.

14.27. В момент остановки вала лебедки (см. задачу 14.26) произошел обрыв одного из канатов.

Определить максимальную величину удлинения оставшегося каната при условии, что движение катушки остается плоским.

Ответ: $\lambda_{max} = 9{,}33$ см.

14.28. Ленточный тормоз состоит из груза массы $m = 2$ кг, подвешенного на конце гибкой нерастяжимой ленты, охватывающей тормозной барабан массы $M = 8$ кг. Ось барабана установлена на амортизаторах с суммарной жесткостью $c = 18$ кН/м. В начальном положении система находится в покое, а груз поднят так, что лента прилегает к поверхности барабана, но не напряжена.



К задаче 14.28.

Полагая барабан однородным цилиндром, найти вертикальные колебания груза, возникающие при его освобождении, $g \approx 10$ м/с^2.

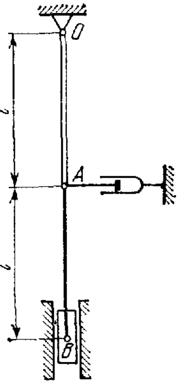
Ответ: $x = \frac{4}{9} \cos 30t$ см.

14.29. В условиях предыдущей задачи определить, при каком минимальном («критическом») значении $\mu_{кр}$ коэффициента сопротивления демпфера, создающего силу $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}_0$, где $\mathbf{v}_0$ — скорость оси барабана, $\mu = \mathrm{const} > 0$, движение груза будет апериодическим. Найти движение груза, если $\mu = \mu_{кр}$.

Ответ: $\mu_{кр} = 1{,}2 \frac{кН \cdot с}{м}$, $x = \frac{4}{9}(1 + 30t)\, e^{-30t}$ см.

14.30. При каком значении коэффициента μ сопротивления демпфера, создающего силу, пропорциональную скорости муфты ($\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}_B$), логарифмический декремент затухающих колебаний центробежного регулятора (см. задачи 14.24 и 14.25) относительно положения, соответствующего $\alpha_0 = \pi/3$, будет равен $\delta = \pi/\sqrt{2}$.

Ответ: $\mu = \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{P}{\sqrt{gl}}$.



К задаче 14.31.

14.31. Кривошипно-ползунный механизм расположен в вертикальной плоскости и состоит из кривошипа, шатуна, ползуна и демпфера. Масса кривошипа равна $m_1 = 9{,}8$ кг, масса ползуна $m_2 = 10$ кг, длины кривошипа и шатуна $OA = AB = l = 0{,}6$ м, коэффициент сопротивления демпфера $\mu = 9{,}8$ Н · с/м.

Полагая кривошип однородным стержнем и пренебрегая массой шатуна, найти частоты и логарифмические декременты свободных колебаний кривошипа с учетом демпфера и без него.

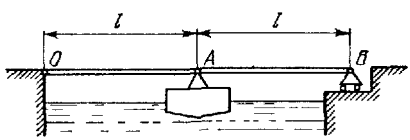
Ответ: $T = 0{,}568$ с, $\delta = 0{,}852$; $T_0 = 0{,}563$ с, $\delta_0 = 0$.

14.32. В результате обработки осциллограммы свободных затухающих колебаний системы найдены время $t_{1-8} = 1{,}16$ с и последовательные амплитуды первых восьми колебаний

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_i, мм	45,1	35,8	28,2	22,0	17,0	13,4	10,6	8,3	6,6

Считая сопротивление, обусловливающее затухание колебаний системы, линейным, найти собственную частоту ω_0 и добротность системы (ω_0 — частота свободных колебаний системы без трения).

Ответ: $\omega_0 = 43{,}36$ рад/с, $Q = 13{,}1$.



К задаче 14.33.

14.33. Наплавной мост состоит из двух панелей, стык которых поддерживается понтоном. Панели представляют собой однородные пластины длины l и массы m. Масса понтона совместно с массой присоединенной воды равна M, площадь горизонтального сечения F. Горизонтальное расположение панелей соответствует равновесию системы; при погружении понтона наряду с выталкивающей (архимедовой) возникает сила сопротивления $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}_A$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}_A$ — скорость понтона.

Полагая, что понтон при движении не имеет крена, определить, при каких значениях коэффициента μ свободное движение системы будет иметь колебательный характер.

Ответ: $\mu < \mu_{кр} = 2\sqrt{g\rho F\left(M + \frac{2}{3}m\right)}$, где ρ — плотность воды.

14.34. Груз массы $2M$, лежащий по середине панели наплавного моста, рассмотренного в предыдущей задаче, сбрасывают в воду.

Найти уравнение вертикальных колебаний понтона, если движение началось из состояния покоя и $\mu = 0{,}6\mu_{кр}$.

Ответ: $y = \frac{Me^{-nt}}{\rho F}\left(\cos\omega t + \frac{3}{4}\sin\omega t\right)$, где $\omega = 0{,}8\sqrt{\frac{3g\rho F}{3M + 2m}}$, $n = 3\omega/4$.

14.35. Полагая, что отклонения от положения равновесия штока пневматического амортизатора (см. задачу 14.9) не являются малыми, составить дифференциальное уравнение его колебаний с точностью до членов третьего порядка малости относительно безразмерной координаты $\xi = x/l$.

Ответ: $\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = -\frac{k+1}{2}\omega_0^2\left(\xi^2 + \frac{k+2}{3}\xi^3\right)$.

14.36. Шток связан тягой с ползуном, движущимся в вертикальных направляющих (см. рис. к задаче 14.21). Длина тяги равна l, массы штока и ползуна равны.

Полагая, что отклонения штока от положения равновесия не являются малыми, составить дифференциальное уравнение его колебаний с точностью до членов третьего порядка малости относительно безразмерной координаты $\xi = x/l$ и найти зависимость частоты колебаний штока от амплитуды A безразмерной координаты ξ.

Указание Применить один из приближенных методов решения нелинейных уравнений.

Ответ: $\ddot{\xi} + \frac{g}{l}\xi = \frac{g}{2l}\xi^3 - \xi\cdot\dot{\xi}^2$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 - \frac{A^2}{16}\right)$.

14.37. При отклонении от положения равновесия баланса спускового регулятора, рассмотренного в задаче 14.13, пружина изгибается и концы ее проскальзывают в опорах. К упругому моменту пружины добавляется момент от сил трения в опорах, зависящий от коэффициента трения f, угла наклона θ концов пружины и направления угловой скорости вращения баланса.

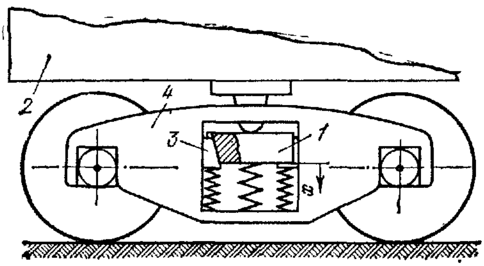
Полагая $l_1 = l_2 = l$ и учитывая, что $\theta = \varphi/2$, определить период и декремент свободных колебаний баланса. Применить метод осреднения.

Ответ: $T = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 l}{3EJ_z}}$, $\eta = \frac{A_k}{A_{k+1}} \approx 1 + \frac{2f}{3}A_k$.

14.38. Система амортизации ходовой тележки грузового вагона состоит из надрессорной балки *1*, на которую опирается кузов *2* вагона, и комплекта (5—7 шт.) винтовых пружин. Две пружины комплекта подпирают клинья *3*, выполняющие функции демпфера сухого трения. Клинья размещены в боковых пазах надрессорной балки и скользят по вертикальным направляющим окна рамы *4* тележки. Угол наклона плоскости клина к вертикали равен α, коэффициент трения клина по направляющим f, количество пружины в комплекте n, нагрузка на один комплект P, статическая деформация пружин $\lambda_{ст} = P/(nc)$, где c — коэффициент жесткости одной пружины.

Пренебрегая членами порядка f^2, найти зависимость восстанавливающей силы R системы амортизации от безразмерной координаты $\xi = x/\lambda_{ст}$ (x — отклонение надрессорной балки от положения статического равновесия).

Ответ: $\frac{R}{P} = -\left[\xi + \operatorname{sign}\dot{\xi}\cdot\frac{2f}{n}\operatorname{ctg}\alpha\,(1+\xi)\right]$.



К задаче 14.38.

14.39. Масса надрессорной части четырехосного вагона равна 20 т, статическая деформация каждого из четырех комплектов пружин $\lambda_{ст} = 2$ см. На платформу вагона без начальной скорости опускают груз массы 40 т так, что амортизаторы нагружаются одинаково.

Воспользовавшись зависимостью, найденной в предыдущей задаче, определить максимальную величину деформации λ_{max} сжатия пружин и период T колебаний вагона, если $\beta = \frac{2f}{n}\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}2$. Учесть величины порядка до β^2.

Ответ: $\lambda_{max} = 9$ см, $T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{ст}}{g}}\left(1 - \frac{3}{8}\beta^2\right) = 0{,}484$с.

14.40. В условиях предыдущей задачи найти период и закон убывания амплитуд колебаний вагона одним из приближенных методов (осреднения или гармонической линеаризации).

Ответ: $T = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{ст}}{g}}$, $A_{k+1} = A_k - 4\beta\lambda_{ст}$.

§ 2. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы

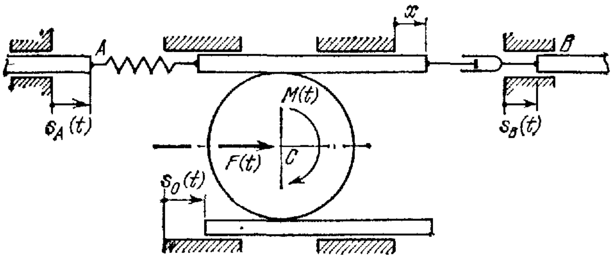
14.41. Зубчатое колесо, представляющее собой однородный диск радиуса r и массы m, находится в зацеплении с двумя рейками, движущимися по горизонтальным направляющим. Верхняя рейка пружиной связана со штоком A и через демпфер — со штоком B. Коэффициент жесткости пружины c, коэффициент сопротивления в демпфере μ.

Приняв за обобщенную координату отклонение x верхней рейки от положения равновесия, найти обобщенную возмущающую силу $Q(t)$ для следующих случаев:

а) на зубчатое колесо действует сила $F(t) = F_0 \sin pt$ и пара сил с моментом $M(t) = M_0 \sin pt$; нижняя рейка и штоки неподвижны;

б) штоки A и B совершают колебания по закону $s_A(t) = s_A \sin pt$, $s_B(t) = s_B \sin pt$; нижняя рейка неподвижна;

в) нижняя рейка совершает колебания по закону $s_0(t) = s_0 \sin pt$; штоки неподвижны.

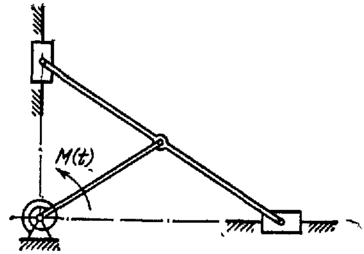


К задаче 14.41.

Положительным значениям F, M, s_A, s_B, s_0 соответствуют направления, указанные на рисунке стрелками.

Ответ: а) $Q(t) = \frac{1}{2}\left(F_0 + \frac{M_0}{r}\right)\sin pt$, б) $Q(t) = cs_A \sin pt + \mu p s_B \cos pt$,в) $Q(t) = \frac{m}{8} p^2 s_0 \sin pt$.

14.42. Механизм эллипсографа расположен в горизонтальной плоскости и состоит из кривошипа длины $l = 0{,}14$ м, линейки длины $2l$, ползунов и спиральной пружины. Кривошип и линейка представляют собой однородные стержни массы $m = 4$ кг и $2m$ соответственно. Коэффициент жесткости пружины $c = 147$ Н · м/рад; пружина не деформирована, когда кривошип перпендикулярен линейке.



К задаче 14.42.

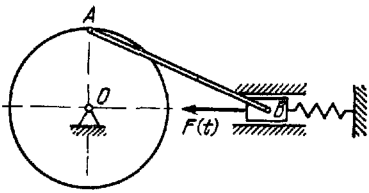
Пренебрегая массой ползунов, найти амплитуду вынужденных колебаний кривошипа, возбуждаемых приложенной к нему парой сил с моментом $M(t) = M_0 \sin pt$, где $M_0 = 5{,}88$ Н · м, $p = 20$ с$^{-1}$.

Ответ: $D = 1/9$ рад ($6°22'$).

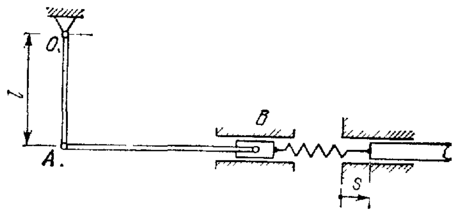
14.43. Маховик, представляющий собой однородный диск радиуса $r = 0{,}2$ м и массы $m_1 = 8$ кг, связан посредством шатуна AB массы $m_2 = 10$ кг с ползуном массы $m_3 = 2$ кг. Пружина, коэффициент жесткости которой $c = 3845$ Н/м, не деформирована, и система находится в равновесии, когда шарнир A располагается на одной вертикали с осью O маховика.

Найти амплитуду вынужденных колебаний ползуна B, возбуждаемых приложенной к нему горизонтальной силой $F(t) = F_0 \sin pt$, где $F_0 = 35$ Н, $p = 20$ рад/с.

Ответ: $D = 12{,}5$ мм.



К задаче 14.43.

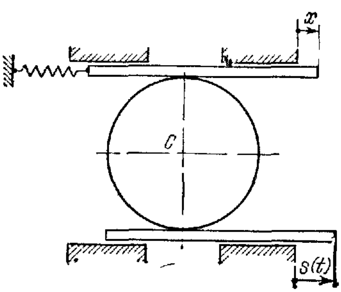


К задаче 14.44.

14.44. Кривошипно-ползунный механизм состоит из кривошипа OA длины $l = 0{,}1$ м, шатуна AB, ползуна и пружины. Правый конец пружины прикреплен к штоку, перемещение которого $s(t) = s_0 \sin pt$, где $s_0 = 2$ см, $p = 6$ рад/с. Кривошип и шатун представляют собой однородные стержни массы $m_1 = m_2 = 0{,}75$ кг, масса ползуна $m_3 = 1{,}0$ кг, коэффициент жесткости пружины $c = 126{,}5$ Н/м. При вертикальном положении кривошипа и $s = 0$ пружина не деформирована.

Определить амплитуду вынужденных колебаний кривошипа.

Ответ: $D = 0{,}2$ рад ($\sim 11{,}5°$).



К задаче 14.45.

14.45. Зубчатое колесо, представляющее собой однородный диск массы $m = 1{,}6$ кг, находится в зацеплении с двумя зубчатыми рейками, движущимися по горизонтальным направляющим. Верхняя рейка массы $M = 0{,}4$ кг связана с основанием пружиной, коэффициент жесткости которой $c = 0{,}4$ кН/м. Нижняя рейка движется по закону $s(t) = s_0 \sin pt$, где $s_0 = 6$ см, $p = 2\omega_0$, ω_0 — собственная частота системы.

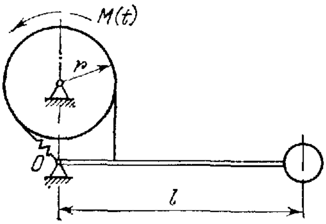
Найти закон движения $x = x(t)$ верхней рейки, если система в начальный момент времени находилась в положении равновесия и покоилась.

Ответ: $x = 1{,}6(2 \sin 20t - \sin 40t)$ см.

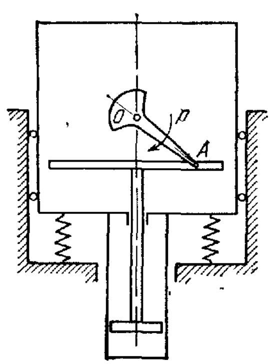
14.46. В ленточном тормозе один конец ленты, охватывающей тормозной барабан, посредством пружины соединен с шарниром O, а другой — с тормозным рычагом. Горизонтальное положение рычага соответствует равновесию системы. Момент инерции барабана $J_0 = 0{,}36$ кг · м^2, радиус барабана $r = 0{,}15$ м, длина рычага $l = 0{,}6$ м, масса груза $m = 1$ кг, коэффициент жесткости пружины $c = 6{,}4$ кН/м. К барабану приложена пара сил с моментом $M(t) = M_0 \sin pt$, где $M_0 = 2{,}94$ Н · м.

Полагая, что лента не проскальзывает относительно барабана, и пренебрегая массой рычага, определить, при какой частоте вынужденных колебаний сила натяжения ленты будет больше нуля (т. е. не будет нарушаться плотный контакт ленты с барабаном).

Ответ: при $p < 10$ рад/с и $p > 17{,}3$ рад/с.



К задаче 14.46.



К задаче 14.47.

14.47. Поршневой насос установлен на амортизаторах с суммарной жесткостью c. Масса корпуса насоса вместе с ротором OA равна M, масса кулисы со штоком и поршнем m, эксцентриситет приводного пальца ротора $OA = r$. В режиме холостого хода (без воды) уравновешенный ротор насоса вращается равномерно с угловой скоростью p.

Определить максимальную величину динамического давления амортизаторов на фундамент в режиме вынужденных колебаний насоса.

Ответ: $F_{\max} = \dfrac{mrp^2}{\left|1 - \dfrac{p^2}{\omega_0^2}\right|}$, где $\omega_0^2 = \dfrac{c}{M+m}$.

14.48. При какой жесткости c амортизаторов максимальная величина динамического давления на фундамент насоса, рассмотренного в предыдущей задаче, будет в 10 раз меньше давления, передаваемого от неамортизированного насоса.

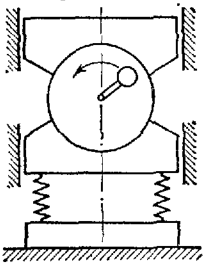
Ответ: при $c < (M+m)p^2/11$.

14.49. Виброграф, рассмотренный в задаче 14.3, имеет собственный период $T_0 = 2$ с. Виброграф установлен на основании, перемещение которого в горизонтальном направлении $s(t) =$

$= s_0 \sin pt$ (s_0 — амплитуда, p — частота колебаний основания). В приборе регистрируется относительное отклонение $x \approx l\varphi$ груза от вертикали.

Определить, при какой частоте p амплитуда регистрируемых вынужденных колебаний груза будет отличаться от амплитуды колебаний основания не более чем на 10%.

Ответ: при $p > 1{,}67$ Гц.



К задаче 14.50.

14.50. Стол вибростенда с центробежным приводом соединен амортизаторами с опорной плитой, не прикрепленной к фундаменту. Суммарная жесткость амортизаторов c, масса стола вместе с ротором m_1, масса опорной плиты m_2, дебаланс ротора центробежного привода mr.

Определить, при каких значениях угловой скорости p вращения ротора опорная плита в режиме вынужденных колебаний не будет отделяться от фундамента.

Ответ: при $p \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{m_1}{c} + \dfrac{m}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{r}{g}}}$,

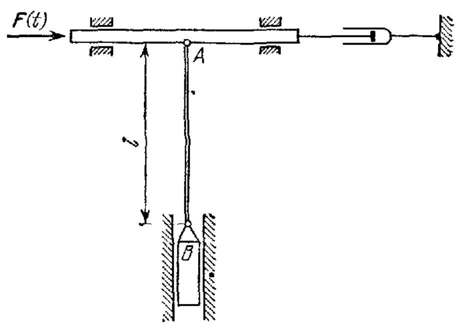
при $p \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{m_1}{c} - \dfrac{m}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{r}{g}}}$.

Примечание. Верхняя граница p существует, если $c \geqslant \dfrac{m_1(m_1+m_2)g}{mr}$.

14.51. Система состоит из штока массы $m_1 = 4$ кг, тяги AB длины $l = 0{,}5$ м, ползуна массы $m_2 = 10$ кг и демпфера с коэффициентом сопротивления $\mu = 14$ Н·с/м. Прямолинейные направляющие штока и ползуна взаимно перпендикулярны и расположены в одной вертикальной плоскости.

Найти амплитуду установившихся вынужденных колебаний штока, возбуждаемых горизонтальной силой $F(t) = F_0 \sin pt$, где $F_0 = 3{,}92$ Н, $p = 7$ рад/с.

Ответ: $D = 4$ см.



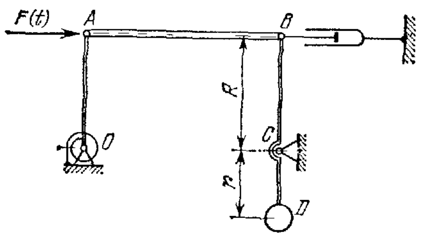
К задаче 14.51.

14.52. Вибрационный стол массы M установлен на кривошипах OA и BC одинаковой длины R. На конце стержня CD, являяющегося продолжением кривошипа BC, на расстоянии r от оси укреплен точечный груз массы m, причем $mr = MR$. Кривошип OA связан с основанием спиральной пружиной, коэффициент жесткости которой равен c; пружина не деформирована при вертикальном положении кривошипа. Коэффициент сопротивления μ гидравлического демпфера составляет 0,2 от значения, соответствующего апериодическому режиму свободного движения стола.

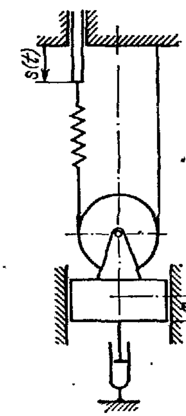
Пренебрегая массой кривошипов, определить, при каком значении частоты p возмущающей силы $F(t) = F_0 \sin pt$, действующей на стол, амплитуда его вынужденных колебаний будет иметь максимальное значение, и найти это значение.

Ответ: при $p = 0{,}959 \sqrt{\dfrac{c}{Rr(M+m)}}$ $D_{\max} = 2{,}55 \dfrac{F_0 R^2}{c}$.

14.53. Система состоит из груза, движущегося в вертикальных направляющих, блока, представляющего собой однородный диск, нерастяжимого гибкого троса, связанного пружиной с подвижным штоком, и гидравлического демпфера. Масса груза $m_1 = 6$ кг, масса блока $m_2 = 4$ кг, коэффициент жесткости пружины $c = 4{,}8$ кН/м, коэффициент сопротивления



К задаче 14.52.



К задаче 14.53.

в демпфере $\mu = 0{,}48$ кН · с/м. Шток совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой $s_0 = 4$ мм.

Полагая, что трос не проскальзывает относительно блока, найти частоту и амплитуду установившихся вынужденных колебаний груза при резонансе.

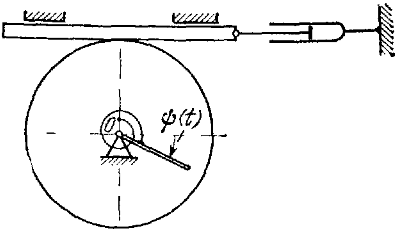
Ответ: $p = \omega_0 = 40$ с$^{-1}$, $D_{рез} = 2{,}0$ мм.

14.54. Зубчатая рейка массы $m = 19{,}6$ кг находится в зацеплении с шестерней, радиус которой $R = 0{,}3$ м и момент инерции $I_0 = 0{,}441$ кг · м^2. Шестерня спиральной пружиной связана с рычагом, совершающим угловые колебания по закону $\psi(t) = \psi_0 \sin pt$, где $\psi_0 = 0{,}0282$ рад, $p = 15$ рад/с. Коэффициент жесткости пружины $c = 372{,}4$ Н · м/рад, коэффициент сопротивления демпфера, связывающего рейку со стеной, $\mu = 73{,}5$ Н · с/м.

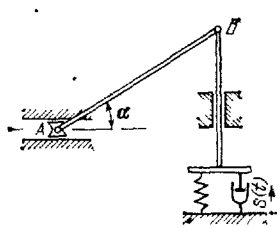
Определить амплитуду и угол сдвига фаз вынужденных колебаний рейки.

Ответ: $D = 2{,}0$ см, $\varepsilon = 2{,}46$ рад ($\sim 141°$).

14.55. Рычажная передача состоит из педали AB массы $m_1 = 0{,}45$ кг, штока массы $m_2 = 0{,}8$ кг, пружины, коэффициент жесткости которой $c = 1{,}6$ кН/м, и демпфера. Опорное основание пружины и демпфера совершает вертикальные колебания по закону $s(t) = s_0 \sin pt$, где s_0 — амплитуда перемещения, p — частота колебаний основания. При угле наклона педали к горизонту $\alpha = 30°$ и $s = 0$ система находится в равновесии.



К задаче 14.54.



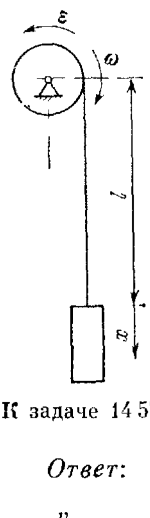
К задаче 14.55.

Считая педаль однородным стержнем, определить, при какой частоте возбуждения p амплитуда вынужденных колебаний штока будет меньше s_0.

Ответ: при $p > 40\sqrt{2}$ рад/с.

14.56. В условиях предыдущей задачи найти сдвиг фаз вынужденных колебаний штока и колебаний основания при частоте $p = 40\sqrt{2}$ рад/с, если коэффициент сопротивления в демпфере $\mu = 20\sqrt{2}$ Н · с/м.

Ответ: $\beta = \pi/2$.



К задаче 14 57.

14.57. Кабина лифта массы m опускается в шахту с постоянной скоростью v. Коэффициент податливости (удлинение от единичной силы) единицы длины троса равен δ_1 Н$^{-1}$. В некоторый момент времени, когда длина троса равна l, тормозная система начинает тормозить барабан лебедки, обеспечивая его равномерное замедление в течение времени τ.

Пренебрегая изменением жесткости троса, обусловленным увеличением его длины при торможении (т. е. полагая $v\tau/2 \ll l$), найти перемещение кабины относительно положения, соответствующего моменту начала торможения ($t = 0$).

Ответ: $x = vt\left(1 - \dfrac{t}{2\tau}\right) + \dfrac{v}{\omega_0^2\tau}(1 - \cos\omega_0 t)$ при $t \leqslant \tau$, $x = \dfrac{v\tau}{2} + \dfrac{v}{\omega_0^2\tau}[\cos\omega_0(t-\tau) - \cos\omega_0 t]$ при $t > \tau$, где $\omega_0^2 = \dfrac{1}{m\delta_1 l}$.

14.58. В условиях предыдущей задачи найти силу натяжения S троса в конце торможения ($t=\tau$), если замедление барабана лебедки происходило по линейному закону $\varepsilon = \alpha t$ и время торможения составило половину собственного периода колебаний кабины $\tau = T_0/2 = \pi/\omega_0$ с.

Ответ: $S(\tau) = mg\left(1 + \dfrac{2v}{\pi\sqrt{g\lambda}}\right)$, где $\lambda = mg\delta_1 l$ — статическая деформация троса.

14.59. Перемещение основания вибрографа, рассмотренного в задаче 14.3, происходит по закону

$$s(t) = \frac{s_0}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{при} \quad t \leqslant T,$$
$$s(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > T,$$

где $s_0 = 4$ см. В начальный момент времени маятник вибрографа находился в покое в положении равновесия.

Найти уравнение относительного горизонтального отклонения груза $x \approx l\varphi$, если длительность движения основания равна собственному периоду вибрографа $T = T_0 = 2$ с. Направления положительного отсчета координат x и s принять одинаковыми.

Ответ: $x = -\pi t \sin \pi t$ при $t \leqslant T$, $x = -2\pi \sin \pi t$ при $t > T$.

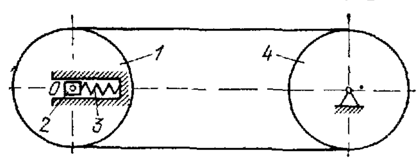
14.60. По наплавному мосту, рассмотренному в задачах 14.33 и 14.34, следует колонна автомобилей одинакового веса P с интервалами друг от друга, равными $2l$. Скорость v автомобилей такова, что время T движения по мосту каждого из них равно собственному периоду T_0 колебаний моста.

Полагая автомобили материальными точками и пренебрегая зависимостью от времени коэффициента инерции системы, найти вынужденные колебания понтона, возбуждаемые действием периодической возмущающей силы (от веса P). Ограничиться при этом двумя первыми гармониками в разложении возмущающей силы в ряд Фурье.

Ответ: $y = \dfrac{P}{2g\rho F}\left[1 - 0{,}675 \sin 2\pi\dfrac{t}{T} - 0{,}092\cos\left(6\pi\dfrac{t}{T} - 2{,}72\right)\right]$.

§ 3. Системы с двумя и тремя степенями свободы

14.61. Натяжная станция ленточного конвейера состоит из барабана *1*, ось O которого укреплена в ползуне *2*, и натяжного винта *3*. Коэффициент жесткости натяжного винта c, расстояние между осями натяжного *1* и приводного *4* барабанов l, коэффициент податливости (удлинение от единичной силы) единицы длины ленты δ_1.



К задаче 14.61.

Считая барабаны конвейера однородными цилиндрами массы m, определить собственные частоты колебаний системы, если приводной барабан заторможен.

Ответ: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2 + c\delta_1 l}{m\delta_1 l}}$, $\omega_2 = \dfrac{2}{\sqrt{m\delta_1 l}}$.

14.62. В условиях предыдущей задачи определить собственные частоты колебаний конвейера, если приводной барабан расторможен.

Ответ: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{2 + c\delta_1 l}{m\delta_1 l}}$, $\omega_3 = \dfrac{2{,}83}{\sqrt{m\delta_1 l}}$.

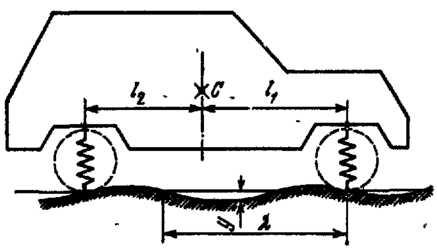
14.63. Масса кузова автомобиля равна M, радиус инерции кузова относительно центральной оси, перпендикулярной продольной вертикальной плоскости ρ, расстояния от осей колес до поперечной центральной плоскости l_1 и l_2, эквивалентные коэффициенты жесткости рессор и пневматиков переднего и заднего шасси c_1 и c_2.

Пренебрегая массами шасси, установить, при каких соотношениях параметров автомобиля:

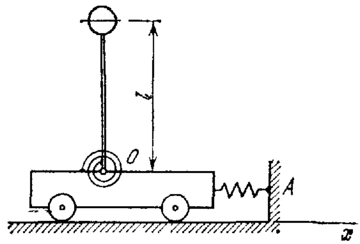
1) вертикальные поступательные колебания («подпрыгивание») кузова и его угловые колебания в продольной плоскости («галопирование») будут не связаны;

2) частоты этих колебаний будут одинаковы.

Ответ: 1) $c_1 l_1 = c_2 l_2$; 2) $c_1 l_1 = c_2 l_2$ и $\rho = \sqrt{l_1 l_2}$.



К задаче 14.63.



К задаче 14.64.

14.64. Тележка массы M с маятниковым гасителем колебаний связана с основанием пружиной, коэффициент жесткости которой равен c_1. Маятник гасителя представляет собой стержень длины $l = 20$ см с грузом массы m на конце. Маятник связан с тележкой спиральной пружиной, коэффициент жесткости которой равен c_2; при вертикальном положении маятника пружина не деформирована.

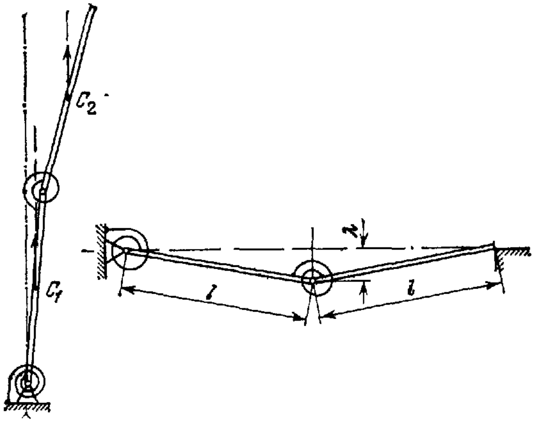
Определить парциальные и собственные частоты системы, если $M = 8m$, $c_2 = 5mgl$, $c_1 = 36mg/l$.

Ответ: $n_1 = n_2 = 14$ рад/с, $\omega_1 = 7\sqrt{3}$ рад/с, $\omega_2 = 7\sqrt{6}$ рад/с.

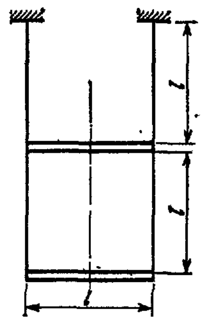
14.65. При частотных испытаниях двухпанельное крыло солнечной батареи установили вертикально. Для того чтобы обеспечить соответствие условий испытаний и работы на орбите (при невесомости), к центрам масс панелей присоединили эластичные шнуры и натянули их так, чтобы силы натяжения уравновесили силы тяжести панелей. Коэффициенты угловой жесткости узла крепления крыла и стыка панелей таковы, что при горизонтальном расположении концов крыла статический прогиб стыка $\lambda_{ст} = l/10 = 20$ см, где l — длина панели.

Считая панели однородными жесткими пластинами, определить собственные частоты колебаний крыла.

Ответ: $\omega_1 = 1{,}83$ рад/с, $\omega_2 = 12{,}16$ рад/с.



К задаче 14.65.



К задаче 14.66.

14.66. Два стержня одинаковой массы и длины l соединены двумя нерастяжимыми нитями длины l и с помощью двух нитей такой же длины подвешены к потолку.

Найти собственные частоты и коэффициенты форм колебаний для абсолютных углов поворота, если:

1) стержни движутся поступательно параллельно вертикальной продольной плоскости;

2) стержни вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их середины.

Ответ:

	$\omega_1\sqrt{l/g}$	$\omega_2\sqrt{l/g}$	η_1	η_2
1)	0,765	1,848	1,41	−1,41
2)	1,326	3,200	2,41	−0,41

14.67. Стержням, рассмотренным в предыдущей задаче, задаются начальные отклонения от положения равновесия в вертикальной продольной плоскости; начальные скорости равны нулю.

Найти движение стержней для следующих вариантов задания начальных условий: 1) $\varphi_{10}=\varphi_0$, $\varphi_{20}=0$; 2) $\varphi_{10}=\varphi_0$, $\varphi_{20}=\varphi_0\sqrt{2}$; 3) $\varphi_{10}=\varphi_0$, $\varphi_{20}=-\varphi_0\sqrt{2}$, где φ_{10} и φ_{20} — начальные значения углов отклонения от вертикали верхней и нижней нитей.

Ответ: 1) $\varphi_1=\frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)$, $\varphi_2=\frac{\varphi_0\sqrt{2}}{2}(\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t)$; 2) $\varphi_1=\varphi_0\cos\omega_1 t$, $\varphi_2=\varphi_0\sqrt{2}\cos\omega_1 t$; 3) $\varphi_1=\varphi_0\cos\omega_2 t$, $\varphi_2=-\varphi_0\sqrt{2}\cos\omega_2 t$.

14.68. В момент сцепки двух вагонов одинаковой массы m один из них находился в покое, а другой имел скорость v_0. Коэффициент жесткости сцепки равен c.

Пренебрегая трением, найти максимальную величину упругой силы, действующей в сцепке вагонов.

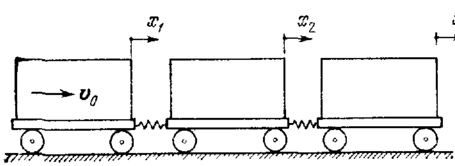
Ответ: $R_{max}=\frac{v_0}{2}\sqrt{2cm}$.

14.69. В момент сцепки трех вагонов одинаковой массы m два из них находились в покое, а один имел скорость v_0. Коэффициент жесткости сцепок равен c.

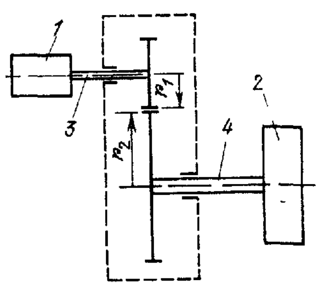
Пренебрегая трением, найти максимальную величину ускорения среднего вагона.

Ответ: $a_{max}=v_0\sqrt{\frac{c}{3m}}$.

14.70. Электродвигатель, ротор *1* которого имеет момент инерции J_1, через одноступенчатый редуктор передает вращение маховику *2*, момент инерции которого равен J_2. Передаточное отношение редуктора $i=r_1/r_2=1/3$, коэффициенты жесткости при кручении входного *3* и выходного *4* валов равны c_1 и c_2 соответственно.



К задаче 14.69.

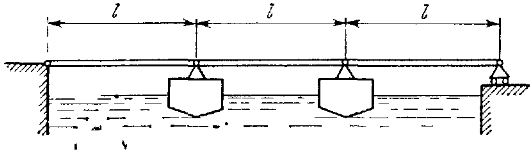


К задаче 14.70.

Пренебрегая массой валов и шестерен редуктора, определить собственную частоту колебаний системы, если $ic_2=c_1=c$, $i^2J_2=J_1=J$.

Ответ: $\omega=\sqrt{\frac{c}{2J}}$.

14.71. Наплавной мост состоит из трех панелей длины l каждая, стыки которых поддерживаются понтонами. Масса панели равна m, масса понтона с учетом массы присоединенной воды M, площадь горизонтального сечения понтона F, плотность воды ρ. Панели представляют собой однородные жесткие пластины, в положении равновесия они горизонтальны.



К задаче 14.71.

Считая движение понтонов при погружении поступательным, найти собственные частоты и коэффициенты форм колебаний моста.

Ответ: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{\rho g F}{M + \frac{5}{6}m}}$, $\eta_1 = 1$; $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{\rho g F}{M + \frac{1}{2}m}}$, $\eta_2 = -1$.

14.72. Груз массы $2M$, находящийся на стыке 1-й и 2-й панелей, падает с моста, рассмотренного в предыдущей задаче.

1) Найти вертикальные колебания стыков панелей, приняв за положительное направление отсчета координат y_1 и y_2 вниз.

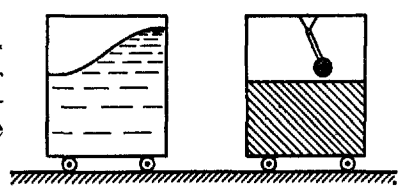
2) Какие колебания совершают стыки, если груз падает с середины второй панели?

Ответ: 1) $y_1 = \dfrac{M}{\rho F}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$, $y_2 = \dfrac{M}{\rho F}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$; 2) $y_1 = \dfrac{M}{\rho F}\cos\omega_1 t = y_2$.

14.73. Рассматривая колебания баков, частично заполненных жидкостью, используют механический аналог системы: часть жидкости заменяют математическим маятником массы m и длины l, остальную часть считают затвердевшей.

Определить собственную частоту плоских поперечных колебаний бака в горизонтальном направлении, если его масса вместе со всей жидкостью равна M.

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{M}{M-m}\dfrac{g}{l}}$.



К задаче 14.73.

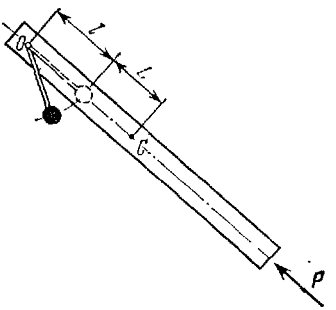
14.74. Для описания движения ракеты с учетом колебаний жидкости в баках принимают маятниковую модель, состоящую из жесткого стержня и системы математических маятников с точками подвеса на продольной оси стержня (для каждого бака своя система маятников).

Определить квадрат частоты малых поперечных колебаний стержня с одним маятником при плоском движении вне поля земного тяготения под действием следящей (направленной все время по оси стержня) силы P, если дано: m, l — масса и длина маятника, M, J — масса и момент инерции стержня с маятником, располагающимся по оси стержня, относительно поперечной оси, проходящей через центр масс C системы, $L = OC - l$.

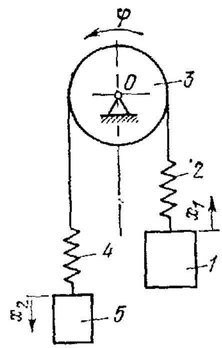
Изменением положения центра масс и момента инерции системы при малых отклонениях маятника пренебречь.

Ответ: $\omega^2 = \dfrac{P}{Ml}\cdot\dfrac{1+\dfrac{mlL}{J}}{1-\dfrac{m}{M}-\dfrac{mL^2}{J}}$.

14.75. Кабина 1 лифта соединена пружинным амортизатором 2 с концом нерастяжимого троса, намотанного на барабан 3



К задаче 14.74.



К задаче 14.75.

лебедки. Другой конец этого троса амортизатором 4 соединен с противовесом 5. Массы кабины и противовеса, а также коэффициенты жесткости амортизаторов равны: $m_1 = m_2 = m$, $c_1 = c_2 = c$. Радиус барабана лебедки равен r, приведенный к валу барабана момент инерции привода лебедки $J_0 = \frac{1}{2}mr^2$.

Определить собственные частоты системы:

Ответ: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{c/m}$, $\omega_3 = \sqrt{5c/m}$.

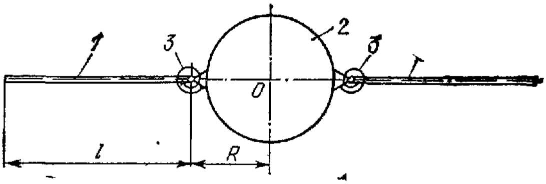
14.76. В условиях предыдущей задачи найти коэффициенты форм колебаний $\eta_2 = r\varphi/x_1$, и $\eta_3 = x_2/x_1$.

Ответ:

	ω_1	ω_2	ω_3
η_2	1	0	−4
η_3	1	−1	1

14.77. Крылья *1* солнечной батареи крепятся к корпусу *2* спутника с помощью узлов *3*. Момент инерции корпуса относительно центральной продольной оси равен J_0, расстояние от оси до узлов крепления крыльев R, длина крыльев l, масса каждого крыла m.

Коэффициент угловой жесткости c узла крепления таков, что статический угол отклонения крыла от горизонтали в наземных условиях составляет $\varphi_{ст} = 0{,}1$ рад

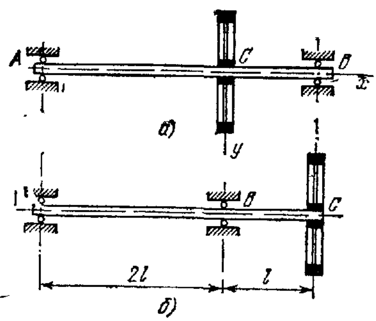


К задаче 14.77.

Считая крылья однородными жесткими пластинами, найти частоты угловых колебаний спутника на орбите, если $l = 6R = 3$ м, $J_0 = 16mR^2$. При невесомости статическому равновесию крыльев соответствует их расположение в центральной продольной плоскости спутника.

Ответ: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 7{,}0$ рад/с, $\omega_3 = 12{,}67$ рад/с.

14.78. Тонкий шкив укреплен на однородном невращающемся валу с жесткостью на изгиб EJ (E — модуль упругости 1-го рода материала вала, J — момент инерции площади поперечного сечения относительно оси, перпендикулярной оси вала). Масса шкива равна m, момент инерции относительно центральной оси, перпендикулярной оси вала, $I_{Cz} = ml^2/2$.



К задаче 14.78.

Пренебрегая массой вала, определить собственные частоты колебаний шкива для вариантов его закрепления на валу, показанных на рисунке.

Указание. При составлении дифференциальных уравнений относительно перемещения y_C и угла φ поворота шкива следует применить принцип Даламбера, вычислив предварительно коэффициенты влияния δ_{ij} — прогибы и углы поворота поперечного сечения C вала от единичной поперечной силы и изгибающего момента.

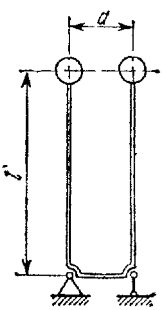
Ответ: *а*) $\omega_1 = 1{,}39\sqrt{\dfrac{EJ}{ml^3}}$, $\omega_2 = 3{,}23\sqrt{\dfrac{EJ}{ml^3}}$; *б*) $\omega_1 = 0{,}76\sqrt{\dfrac{EJ}{ml^3}}$, $\omega_2 = 3{,}38\sqrt{\dfrac{EJ}{ml^3}}$.

14.79. Вилочный камертон состоит из двух грузов, укрепленных на концах П-образного шарнирно опертого стержня. Массы грузов равны m, жесткость стержня при изгибе в плоскости рисунка EJ.

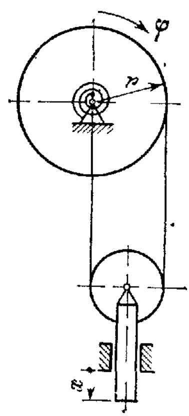
Считая грузы материальными точками и пренебрегая массой стержня, найти зависимость отношения собственных частот от размеров l и a камертона.

Ответ: $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}=\sqrt{\dfrac{2l+3a}{2l+a}}$.

14.80. Груз массы m прикреплен к оси подвижного блока, который подвешен на тросе, огибающем блок и намотанном на



К задаче 14.79.



К задаче 14.80.

барабан радиуса r. Момент инерции барабана равен J_0, коэффициенты жесткости ветвей троса c_1, коэффициент жесткости при кручении приводного вала барабана c_2 (вал условно показан в виде спиральной пружины).

Пренебрегая массой блока, найти собственные частоты и коэффициенты $\eta=r\varphi/x$ форм колебаний системы, если $J_0=\dfrac{1}{4}mr^2$, $c_2=c_1r^2$.

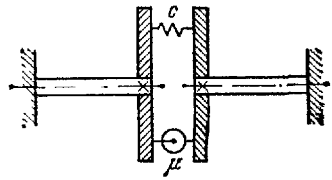
Ответ: $\omega_1=1{,}082\sqrt{\dfrac{c_1}{m}}$, $\eta_1=0{,}828$, $\omega_2=2{,}613\sqrt{\dfrac{c_1}{m}}$, $\eta_2=-4{,}828$.

14.81. В системе, рассмотренной в предыдущей задаче, при деформации троса наряду с упругой возникает сила сопротивления, пропорциональная скорости деформации $F_c=\mu_1 d\lambda/dt$, а при закручивании вала возникает момент $M_c=-\mu_2\dfrac{d\varphi}{dt}$, где $\mu_1=\mathrm{const}>0$, $\mu_2=\mathrm{const}>0$.

Установить, будут ли связаны нормальные координаты θ_1 и θ_2, если: 1) $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = 0$; 2) $\frac{\mu_1}{c_1} = \frac{\mu_2}{c_2} = d = \text{const}$.

Ответ: 1) связаны, 2) не связаны.

14.82. Два вала, жестко закрепленные на концах, соединены упругой муфтой. Моменты инерции корпусов полумуфт и коэффициенты жесткости при кручении валов одинаковы и равны соответственно J и c_1. При повороте корпусов полумуфт друг относительно друга возникает момент $M_c = -(c\varphi + \mu\dot{\varphi})$, где коэффициент жесткости муфты $c = \text{const} > 0$, $\mu = \text{const} > 0$, φ — относительный угол поворота полумуфт.



К задаче 14.82.

Найти частоты и логарифмические декременты главных колебаний системы, если $c = 0{,}5c_1$, $\mu = \sqrt{c_1 J}$.

Указание. Перейти к главным (нормальным) координатам системы $\theta_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, $\theta_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$, где φ_1 и φ_2 — углы поворота полумуфт.

Ответ: $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{c_1/J}$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 2\pi$.

14.83. При погружении понтонов наплавного моста, рассмотренного в задаче 14.71, наряду с выталкивающей возникает сила сопротивления, пропорциональная скорости понтона.

Определить, при каком значении коэффициента сопротивления μ оба главных движения моста будут иметь колебательный характер. Найти частоты главных колебаний, если $M = m/6$, $\mu = \sqrt{\rho g F m}$.

Указание. Перейти к главным координатам $\theta_1 = (y_1 + y_2)/2$, $\theta_2 = (y_1 - y_2)/2$.

Ответ: $\mu < 2\sqrt{\rho g F\left(M + \frac{5}{6}m\right)}$, $\omega_1 = 0{,}866\sqrt{\frac{\rho g F}{m}}$, $\omega_2 = 0{,}968\sqrt{\frac{\rho g F}{m}}$.

14.84. Правый конец A пружины, прикрепленной к тележке, рассмотренной в задаче 14.64, совершает горизонтальные колебания по закону $x_A = A \sin pt$, где $p = 14$ рад/с.

Найти вынужденные колебания тележки и маятника, а также определить горизонтальную проекцию реакции стержня в шарнире O.

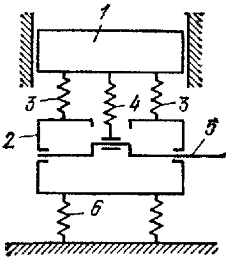
Ответ: $x(t) = 0$, $\varphi(t) = -9\frac{A}{l}\sin pt$, $X_O = -c_1 A \sin pt$.

14.85. Стол *1* вибрационного стенда (тип ВУ-15) двумя пружинами *3* связан с «реактивным» телом *2* и пружиной *4* — с эксцентричным валом *5*. Суммарный коэффициент жесткости пружин *3* равен c_1, коэффициент жесткости пружины *4* равен c_0, суммарный коэффициент жесткости амортизаторов 6 реактивного тела c_2. Масса стола m_1, масса реактивного тела m_2, эксцентриситет приводного вала e, угловая скорость вращения вала p.

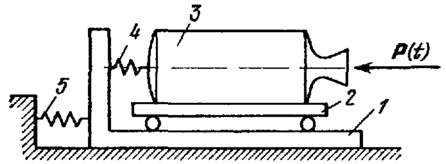
Найти зависимость амплитуды установившихся вынужденных колебаний стола от частоты p, если $2c_0 = c_1 = c_2/12 = c$, $m_1 = m_2/9 = m$.

Ответ: $D = \frac{e}{2} \frac{1}{2 - \frac{mp^2}{c}}$.

14.86. Для измерения силы тяги реактивных двигателей служит стенд, состоящий из основания 1, салазок 2 для крепления двигателя 3 и динамометра 4. Коэффициент жесткости узлов крепления 5 основания в огневой яме равен c. О величине силы



К задаче 14 85.



К задаче 14 86.

тяги $P(t)$ судят по деформации динамометра, коэффициент жесткости $c_д$ которого известен. В установившемся режиме работы двигателя сила тяги меняется по закону $P(t) = P_0(1 + \varepsilon \sin pt)$, где P_0 — среднее значение силы, ε — относительная амплитуда, p — частота вибрационной составляющей силы.

Определить, при какой частоте p относительная амплитуда вибрационной составляющей силы, регистрируемой динамометром, будет такой же, как у силы тяги. Масса основания стенда M, масса салазок вместе с двигателем m; изменением массы двигателя вследствие сгорания топлива пренебречь.

Ответ: $p = \sqrt{\frac{c + c_д}{M}}$.

14.87. Точки подвеса стержней, рассмотренных в задаче 14.66, совершают колебания в горизонтальном направлении по закону $s(t) = s_0 \sin pt$.

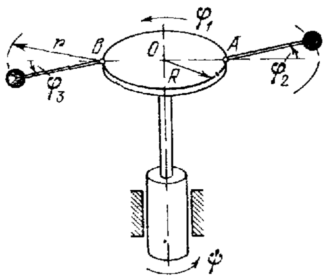
Найти отклонение от вертикальной прямой, проходящей через точку подвеса, конца нижнего стержня в установившемся режиме колебаний с частотой $p = 2\sqrt{g/l}$.

Ответ: $x_в = 0$.

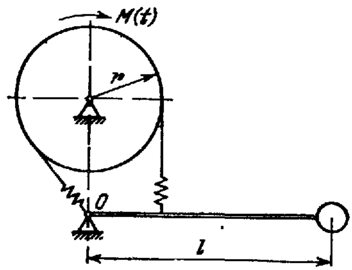
14.88. Ротор, закрепленный на конце вертикального упругого вала, связан с двумя одинаковыми математическими маятниками. Нижний конец вала вращается по закону $\psi = \omega t + A \sin pt$, где A — амплитуда, p — частота угловых колебаний относительно режима равномерного вращения с угловой скоростью ω. Коэффициент жесткости вала при кручении равен c, момент инерции ротора J, радиус ротора R, длины и массы маятников равны r и m.

Пренебрегая массой упругого вала, определить, при какой частоте p будет наблюдаться эффект динамического гашения вынужденных колебаний ротора (амплитуда колебаний ротора $D_1 = 0$). Какие значения при этом будут иметь амплитуды D_2 и D_3 колебаний маятников?

Ответ: при $p = \omega\sqrt{\frac{R}{r}}$ $D_1 = 0$, $D_2 = D_3 = \frac{cA}{2mR(R+r)\omega^2}$.



К задаче 14.88.



К задаче 14.89.

14.89. В ленточном тормозе концы ленты, охватывающей тормозной барабан, посредством пружин соединены с неподвижным шарниром O и тормозным рычагом. Момент инерции вала с тормозным барабаном $J = 0{,}36$ кг $\cdot$ м^2, радиус барабана $r = 0{,}15$ м, коэффициенты жесткости пружин $c = 3{,}2$ кН/м, длина рычага $l = 4r = 0{,}6$ м, масса груза $m = 1$ кг. В положении равновесия тормозной рычаг горизонтален.

Считая, что лента не проскальзывает относительно барабана, и пренебрегая массой рычага, определить амплитуду угловых колебаний рычага, возбуждаемых моментом $M = 6\sin 20t$ Н $\cdot$ м пары сил, приложенных к барабану.

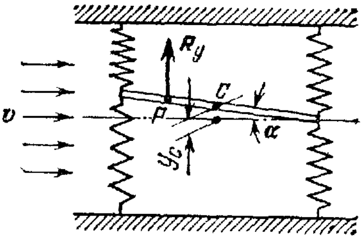
Ответ: $D = \frac{1}{12}$ рад ($\sim 4{,}8°$).

14.90. В первом приближении профиль дороги можно аппроксимировать зависимостью $y = h\sin(2\pi x/\lambda)$, где h — амплитуда, λ — длина волны неровности.

Для автомобиля, характеристики которого удовлетворяют условию задачи 14.63, движущегося по дороге прямолинейно с постоянной скоростью, определить, при каких значениях λ не будут возбуждаться угловые колебания кузова?

Ответ: $\lambda = \frac{l_1 + l_2}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

14.91. Представление о флаттере крыла — автоколебаниях крыла в потоке воздуха — можно получить из анализа следующей простейшей модели. Однородная прямоугольная пластинка, закрепленная на пружинах, имеет две степени свободы и в положении равновесия горизонтальна. Масса пластинки равна m, ширина b, площадь F, коэффициенты жесткости пружин одинаковы и равны c. При обдувании пластинки потоком воздуха возникают аэродинамические силы, которые приводятся к равнодействующей, проходящей через так называемый «центр давления» P. Приближенно вертикальную составляющую равнодействующей («подъемную силу») можно принять равной $R_y = \pi\rho F v^2 \alpha$, а расстояние $CP = b/4$, где ρ — плотность воздуха, v — скорость потока, α — угол отклонения пластинки от горизонтали (угол атаки).



К задаче 14.91.

Определить, при каком значении скорости v потока пластинка будет совершать нарастающие колебания?

Ответ: $v = 2\sqrt{\dfrac{cb}{3\pi\rho F}}$.

Глава 15

ТЕОРИЯ ГИРОСКОПОВ

В большинстве задач настоящей главы имеется в виду решение в рамках прецессионной теории гироскопов. Эта приближенная теория основывается на допущении, что в случае быстро вращающегося гироскопа можно пренебрегать экваториальной составляющей его кинетического момента. Таким образом, в прецессионной теории кинетический момент гироскопа при любом его движении принимают равным вектору $\mathbf{H} = J\boldsymbol{\omega}$, где J — момент инерции гироскопа относительно его оси симметрии, $\boldsymbol{\omega}$ — направленная вдоль этой оси составляющая абсолютной угловой скорости гироскопа (собственная угловая скорость гироскопа). Вектор $\mathbf{H}$ называют *собственным кинетическим моментом* гироскопа.

При рассмотрении в рамках прецессионной теории системы, состоящей из гироскопов и других тел, пренебрегают кинетическими моментами всех тел, кроме гироскопов, и кинетический момент системы принимают равным сумме собственных кинетических моментов гироскопов.

В случае, когда имеется в виду решение задачи с учетом масс всех тел, составляющих систему, и экваториальной составляющей кинетического момента гироскопа, это следует из условия задачи.

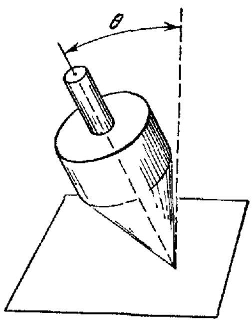
§ 1. Закон прецессии. Гироскопический момент

15.1. Волчок прецессирует, будучи установлен на шероховатую горизонтальную поверхность.

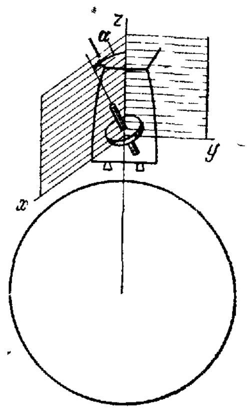
Дано: полярный момент инерции волчка $J = 9000$ г $\cdot$ см^2, угловая скорость его собственного вращения $\omega = 209$ рад/с, масса волчка $m = 900$ г, расстояние от точки опоры волчка до его центра масс $l = 6$ см, угол наклона оси $\theta = 30°$.

Каков должен быть коэффициент трения f между этой поверхностью и ножкой волчка, чтобы волчок не скользил по поверхности?

Ответ: $f \geqslant 0{,}024$.



К задаче 15.1.



К задаче 15.2.

15.2. Спутник движется по круговой орбите (такова траектория его центра масс) так, что ось z все время проходит через центр Земли, а период обращения равен 84,4 мин. На спутнике имеется мотор, ось ротора которого расположена в плоскости Oxz, перпендикулярной плоскости орбиты Oyz и наклонена под углом $\alpha = 60°$ к оси z. Ротор делает 3000 оборотов в минуту, его полярный момент инерции $J = 1$ кг $\cdot$ м^2.

Определить модуль и направление момента, который должны развивать реактивные двигатели спутника, чтобы гироскопический момент ротора не нарушал заданную ориентацию спутника.

Ответ: момент **M** должен быть параллелен вектору скорости центра масс спутника, $|\mathbf{M}| = 0{,}196$ Н $\cdot$ м.

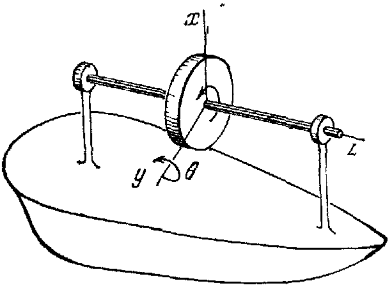
15.3. Корабль совершает циркуляцию и одновременно испытывает килевую качку. При этом на корабль действует гироскопический момент ротора корабельной турбины. (Циркуляция — движение корабля по окружности, килевая качка — качания корабля вокруг поперечной оси.)

Найти проекции L_x, L_y, L_z указанного момента на оси x, y, z (см. рисунок), если ось ротора параллельна продольной оси корабля.

Дано: скорость корабля v, радиус циркуляции R, полярный J и экваториальный A моменты инерции ротора, его собственная угловая скорость ω, закон качки $\theta = \theta_0 \sin pt$, где θ — угол качки, θ_0 и p — постоянные величины.

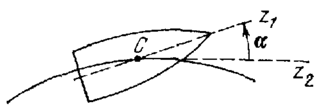
Вычислить проекции момента при: $v = 43$ км/ч, $R = 0{,}6$ км, $J = 2{,}88 \cdot 10^3$ кг $\cdot$ м^2, $\omega = 167$ рад/с, $A = 1{,}5 \cdot 10^3$ кг $\cdot$ м^2, $\theta_0 = 6°$, $p = 0{,}1$ с$^{-1}$.

Ответ: $L_x = -\left(J\omega - \dfrac{Av\theta_0 \sin pt}{R}\right) p\theta_0 \cos pt$, $L_y = -A\theta_0 \sin pt \times (v^2/R - p^2) + v\omega J/R$, $L_z = 0$; $L_x = -0{,}5 \cdot 10^4 \cos 0{,}1t$ Н$\cdot$м, $L_y = -0{,}96 \cdot 10^4$ Н$\cdot$м (величины L_x, L_y, L_z определены с точностью до малых первого порядка относительно угла качки).



К задаче 15.3.

15.4. Артиллерийский снаряд при полете в атмосфере совершает сложное движение: он вращается с некоторой угловой скоростью ω_1 вокруг своей оси симметрии z_1; одновременно вследствие действия на снаряд сил сопротивления воздуха эта ось вращается с угловой скоростью ω_2 вокруг касательной Cz_2 к траектории центра масс снаряда.



К задаче 15.4.

Рассматривая снаряд как быстровращающийся гироскоп, вычислить момент этих сил относительно центра масс снаряда, положив, что $\omega_1 = 30$ рад/с, $\omega_2 = 0{,}8$ рад/с, масса снаряда $m = 15$ кг, радиус инерции его относительно оси симметрии $\rho = 4$ см, угол между осями Cz_1 и Cz_2 равен $\alpha = 10°$.

Ответ: 0,1 Н $\cdot$ м.

15.5. Вычислить гироскопический момент ролика в подшипнике, описанном в задаче 6.13, при следующих данных: угловая скорость ротора соответствует 3000 об/мин, масса ролика 80 г, его радиус инерции относительно оси симметрии 0,7 см, $\alpha = 10°$.

Ответ: 0,44 Н $\cdot$ м.

15.6. Во время виража турбовинтового самолета гироскопический момент ротора турбины может вызывать наклоны самолета. Чтобы парировать действие этого момента, пилот отклоняет горизонтальные рули самолета; возникающие при этом аэродинамические силы удерживают самолет в горизонтальном полете.

Определить момент этих сил (его величину и направление), если ось ротора параллельна продольной оси самолета, ротор вращается с угловой скоростью, соответствующей 3000 об/мин, момент инерции его относительно оси симметрии $J = 400$ кг · м^2, скорость самолета $v = 100$ м/с, радиус описываемой им окружности $R = 2{,}5$ км.

Ответ: момент равен $M_c = 5030$ Н · м. Если вектор угловой скорости ротора направлен к носу самолета, то вектор $\mathbf{M}_c$ направлен к правому борту при правом вираже и к левому — при левом.

15.7. Как известно, велосипедист при движении по кривой наклоняется в сторону центра кривизны ее.

Определить, в какой мере на величину угла наклона влияет гироскопический момент колес велосипеда, положив, что он движется со скоростью $v = 20$ км/час по дуге окружности радиуса $R = 30$ м, масса колеса 2,5 кг, его радиус $r = 0{,}5$, радиус инерции 0,3 м, масса всей системы (велосипедист + велосипед) 75 кг, высота ее центра тяжести 1 м.

Ответ: угол отклонения велосипеда от вертикали без учета гироскопического момента колес равен 6°. За счет гироскопического момента он увеличивается на 4′.

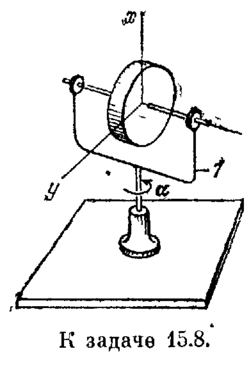
§ 2. Простейшие гироскопические приборы

15.8. Двухстепенной гироскоп установлен на горизонтальной площадке так, что при любых поворотах рамки ось ротора остается параллельной площадке.

Доказать, что в равновесном относительно Земли положении эта ось устанавливается в направлении юг — север и, следовательно, прибор может служить гирокомпасом.

15.9. Для прибора, описанного в предыдущей задаче, получить формулу, определяющую период малых колебаний системы около положения равновесия, приняв, что заданы: момент инерции рамки с ротором относительно оси рамки A, собственный кинетический момент гироскопа H, географическая широта места φ. (Пренебречь величиной $BU\cos\varphi$ в сравнении с H, где B — момент инерции рамки с гироскопом относительно y а U — угловая скорость Земли.)

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{A}{HU\cos\varphi}}$.

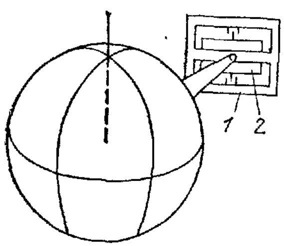


К задаче 15.8.

15.10. В условиях задачи 15.8 предположить, что вокруг оси рамки действует момент сил вязкого трения, пропорциональный угловой скорости $\dot{\alpha}$ рамки относительно Земли.

Доказать, что из двух положений равновесия системы лишь одно (когда собственный кинетический момент ротора направлен на север) устойчиво.

15.11. Двухстепенной гироскоп установлен на поверхности Земли так, что ось ротора вынуждена оставаться в плоскости меридиана места: это достигается тем, что рамка *1* с гироскопом *2* подвешена на оси, перпендикулярной плоскости меридиана.



К задаче 15.11.

Доказать, что если центр масс рамки с ротором расположен на оси рамки, то в положении равновесия ось ротора параллельна оси Земли.

15.12. Прибор, описанный в предыдущей задаче, может служить указателем географической широты места: она равна углу между осью гироскопа и плоскостью горизонта в данном месте. Какова будет ошибка прибора, если центр масс ротора с рамкой не точно совпадает с центром подвеса и смещен вдоль оси ротора на некоторую величину l. Масса ротора $m = 1$ кг, его кинетический момент 4 Н · м · с, широта места $\varphi = 60°$, $l = 1$ мкм.

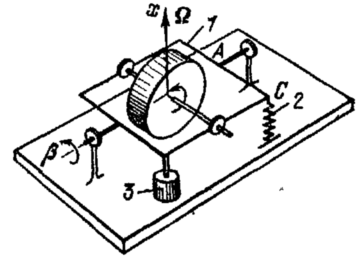
Указание. Учитывая, что $l \ll R$ (R — радиус Земли), положить, что сила тяжести ротора параллельна линии, соединяющей центр Земли с центром подвеса.

Ответ: ошибка в широте $\approx 1°$.

15.13. Определить период малых колебаний около положения равновесия системы, описанной в задаче 15.11, учитывая массу рамки. Полярный момент инерции ротора $C \approx 2 \cdot 10^4$ г · см², момент инерции рамки вместе с ротором относительно оси рамки $A = 4 \cdot 10^4$ г · см², собственная угловая скорость ротора $\omega = 2090$ рад/с.

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{A}{C\omega U}} \approx 23$с ($U$ — угловая скорость Земли).

15.14. Гироскопический измеритель угловой скорости (гиротахометр) устроен в виде двухстепенного гироскопа, рамка *1* которого связана с основанием прибора пружиной *2*. При покоящемся основании ось ротора параллельна основанию. Если основание вращается вокруг перпендикулярной ему оси x, то рамка отклоняется на некоторый угол β, при этом пружина деформируется на величину, пропорциональную β. Демпфер *3* предназначен для демпфирования собственных колебаний системы — он создает момент пропорциональный $\dot\beta$.



К задаче 15.14.

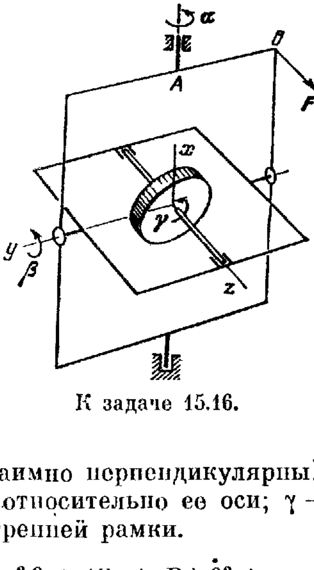
Доказать, что при вращении основания вокруг оси x с постоянной угловой скоростью Ω рамка устанавливается в положении, при котором угол β (для малых углов) пропорционален величине Ω. Вычислить Ω, если $\beta = 2°$, жесткость пружины $c = 9$ Н/см, $AC = a = 10$ см, собственный кинетический момент гироскопа $H = 3$ кг $\cdot$ м^2/с.

Ответ: $\beta = \dfrac{H}{a^2 c}\Omega$, $\Omega = 0,105$ рад/с.

15.15. Доказать, что если в приборе предыдущей задачи убрать пружину, оставив демпфер, то прибор может служить интегратором угловой скорости или указателем угла поворота основания относительно инерциального пространства.

15.16. Получить выражение кинетической энергии гироскопа в кардановом подвесе. Положить при этом, что оси рамок и ротора пересекаются в одной точке, являющейся центром масс каждого из этих тел и совпадают с их главными осями инерции.

Ввести обозначения: A_2, B_2, C_2 — моменты инерции внутренней рамки соответственно относительно осей x, y, z, связанных с внутренней рамкой, A_3, B_3, C_3 — моменты инерции ротора относительно тех же осей; β — угол поворота внутренней рамки относительно наружной, α — угол поворота наружной рамки ($\beta = 0$, когда плоскости рамок взаимно перпендикулярны); A_1 — момент инерции наружной рамки относительно ее оси; γ — угол поворота ротора относительно внутренней рамки.



К задаче 15.16.

Ответ: $T = \dfrac{1}{2}\Big[A_1\dot{\alpha}^2 + (A_2 + A_3)\,\dot{\alpha}^2\cos^2\beta + (B_2 + B_3)\,\dot{\beta}^2 + $
$$+ C_2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta + C_3\left(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}\right)^2\Big].$$

15.17. Вследствие неточности изготовления центр масс гироскопа в кардановом подвесе оказался смещенным относительно центра подвеса вдоль оси ротора на 2 микрона. (Центром подвеса называют точку пересечения осей рамок и ротора.)

С какой скоростью будет отклоняться ось гироскопа от первоначального положения ($\beta = 0$), если ось наружной рамки вертикальна и при $\beta = 0$ ось ротора горизонтальна. Полярный момент инерции ротора $C = 12 \cdot 10^{-4}$ кг $\cdot$ м^2, его собственная угловая скорость $\omega = 2090$ рад/с, масса $m = 1$ кг.

Ответ: $\dot{\alpha} = 7{,}8 \cdot 10^{-6}$ рад/с, $\dot{\beta} = 0$.

15.18. К наружной рамке гироскопа в кардановом подвесе приложена сила $\mathbf{F}$, параллельная оси z (см. рис. к задаче 15.16).

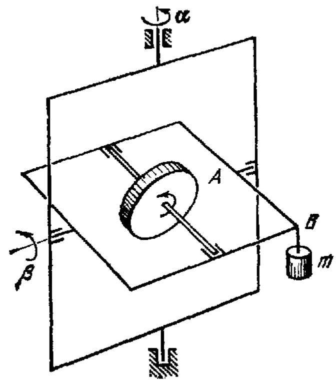
Определить угловые скорости $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ при $\beta = 0$ и кинетическом моменте $H = 1{,}96$ кг · м²/с, $AB = 0{,}2$ м, $F = 0{,}1$ Н.

Ответ: $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\beta} = -0{,}58$ град/с.

15.19. В условиях предыдущей задачи определить $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ при $\beta = 60°$.

Ответ: $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\beta} = -1{,}17$ град/с.

15.20. Решить задачу 15.19 при условии, что, кроме силы **F**, действует момент сил сухого трения вокруг оси внутренней рамки, максимальная величина которого равна 10^{-4} Н · м.



К задаче 15.21.

Ответ: $\dot{\alpha} \approx -10{,}5$ град/ч, $\dot{\beta} = -0{,}58$ град/с.

15.21. К внутренней рамке гироскопа в кардановом подвесе с вертикальной осью наружной рамки подвешен грузик массы $m = 0{,}1$ кг. Кинетический момент гироскопа $H = 0{,}23$ Н · м · с. Вокруг оси наружной рамки действует момент сухого трения, максимальная величина которого равна 10^{-2} Н · м, $AB = 5$ см.

Определить угловые скорости рамок при $\beta = 45°$.

Ответ: $\dot{\alpha} = 12{,}2$ град/с, $\dot{\beta} = -3{,}52$ град/с.

15.22. Решить предыдущую задачу при условии, что учитывается также момент сил сухого трения на оси внутренней рамки и максимальная величина его равна 0,01 Н · м.

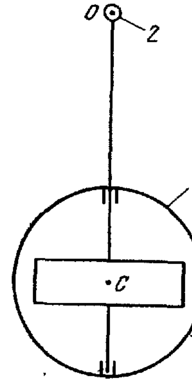
Ответ: $\dot{\alpha} = 8{,}69$ град/с, $\dot{\beta} = -3{,}52$ град/с.

15.23. Гироскоп в кардановом подвесе установлен так, что ось наружной рамки вертикальна, а ось ротора горизонтальна и образует с направлением на север малый угол α. Кинетический момент ротора H, географическая широта φ.

Какие моменты следует приложить на осях внутренней и наружной рамок гироскопа, чтобы ось ротора сохраняла указанную выше ориентацию.

Ответ: на оси наружной рамки момент $HU\alpha\cos\varphi$, на оси внутренней $HU\sin\varphi$, где U — угловая скорость Земли.

15.24. Гиромаятник представляет собой гироскоп, подвешенный с помощью вилки *1* и сферического шарнира *2* так, что ось ротора направлена вдоль линии, соединяющей центр подвеса с центром масс C системы.



К задаче 15.24.

Определить положение равновесия системы с учетом вращения Земли. Массой вилки пренебречь. Дано: H — кинетический момент ротора, φ — широта места, P — сила тяжести ротора, $OC = l$.

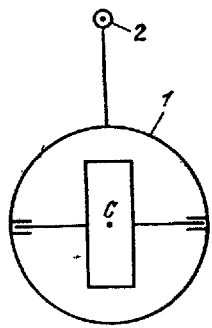
Ответ: ось ротора отклонена от вертикали на угол $\alpha^* = \dfrac{HU\cos\varphi}{HU\sin\varphi + Pl}$ в плоскости меридиана, где U — угловая скорость Земли.

15.25. Определить период T малых колебаний около положения равновесия гиромаятника, описанного в предыдущей задаче. Массой вилки пренебречь.

Ответ: $T = 2\pi \dfrac{H}{P\cdot l + HU\sin\varphi}$.

15.26. Гироскоп простейшего гироскопического компаса подвешен с помощью вилки *1* и сферического шарнира *2* так, что при невращающемся роторе его ось занимает горизонтальное положение.

Докажите, что при вращающемся роторе ось ротора в равновесном положении располагается в плоскости меридиана места.

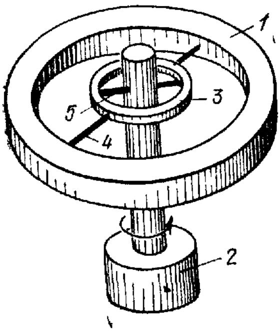


К задаче 15.26.

15.27. Получить выражение периода T малых колебаний гирокомпаса, описанного в предыдущей задаче. (Массой вилки и ее колебаниями вокруг оси ротора пренебречь, учесть также, что в практических случаях $Pl \gg HU\cos\varphi$.) Использовать обозначения задачи 15.24.

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{H}{PlU\cos\varphi}}$.

15.28. На рисунке изображен гироскоп с внутренним упругим подвесом ротора *1*. Последний имеет форму кольца и приводится в движение мотором *2*, вал которого соединен с ротором посредством кольца *3* и двух пар торсионов *4* и *5*; благодаря такому соединению ротор имеет две степени свободы относительно вала. В равновесном положении ось ротора совпадает с осью вала; при отклонении от этого положения возникает восстанавливающий момент упругих сил торсионов, пропорциональный углу отклонения.



К задаче 15.28.

Пренебрегая массами торсионов и внутреннего кольца и полагая жесткости обеих пар торсионов одинаковыми, получить закон движения ротора при малом начальном отклонении его от положения равновесия.

Ответ: ротор совершает гармонические колебания вокруг осей торсионов с частотами $k_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$, где $a=\left(\frac{C}{A}-2\right)\omega$, $b=\left(\frac{C}{A}-1\right)\omega^2+\frac{c}{A}$, C и A — соответственно полярный и экваториальный моменты инерции ротора, ω — угловая скорость вала, c — угловая жесткость каждой пары торсионов.

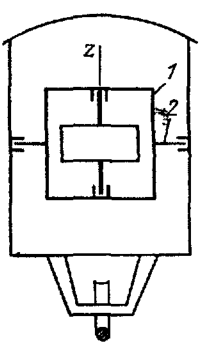
15.29. Динамической настройкой гироскопа, описанного в предыдущей задаче, называется такой подбор угловой скорости вала, при котором гироскоп ведет себя как свободно подвешенный в одной точке,— ось ротора сохраняет неизменное направление в пространстве, несмотря на колебания основания прибора (как если бы жесткость торсионов обратилась в нуль).

Определить указанное значение угловой скорости.

Ответ: $\omega^2=\frac{c}{A-C}$ $(A>C)$.

§ 3. Гироскопическая стабилизация

15.30. На рисунке изображен вагон однорельсовой железной дороги, построенный по схеме Шиловского — Шерля. Для придания ему устойчивости в вагоне установлен гироскоп, подвешенный в рамке *1*, которая может поворачиваться относительно вагона на оси *2*, перпендикулярной оси рельса. Центр масс рамки с ротором смещен относительно оси рамки вдоль оси Z.



К задаче 15.30.

Получить уравнения малых колебаний системы около положения равновесия, приняв следующие обозначения:

для всей системы: P — сила тяжести, A — момент инерции относительно оси рельса, L — расстояние от центра масс до рельса;

для системы рамка + ротор: p — сила тяжести, B — момент инерции относительно оси рамки, l — расстояние от центра масс до оси рамки, H — собственный кинетический момент ротора.

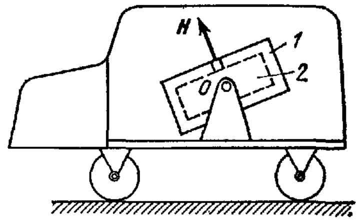
Принять, что ввиду малых размеров рамки ее качания не изменяют геометрии масс системы в целом.

Ответ: $A\ddot{\alpha}+H\dot{\beta}=PL\alpha$, $B\ddot{\beta}-H\dot{\alpha}=pl\beta$, где α — угол отклонения вагона от вертикального положения, β — угол отклонения плоскости рамки от вертикальной плоскости.

15.31. Доказать, что если вагон, описанный в предыдущей задаче, движется с постоянной скоростью по прямолинейному рельсу, то для устойчивости его необходимо, чтобы центр масс рамки с ротором находился выше оси рамки и вместе с тем выполнялось неравенство $H^2>(lpA+LPB)$.

15.32. Стабилизация двухколесного автомобиля осуществлена по схеме Шиловского — Шерля (см. зад. 15.30): камера *1* с расположенным в ней ротором *2* подвешена на оси O (перпендикулярной продольной оси автомобиля) так, что их общий центр масс находится выше этой оси. Автомобиль движется с постоянной скоростью по дуге окружности, лежащей в горизонтальной плоскости.

Составить дифференциальные уравнения малых колебаний системы около положения ее относительного равновесия, приняв, что подвижной системой отсчета является трехгранник с вершиной в центре подвеса гироскопа, вращающийся с той же угловой скоростью Ω, что автомобиль.



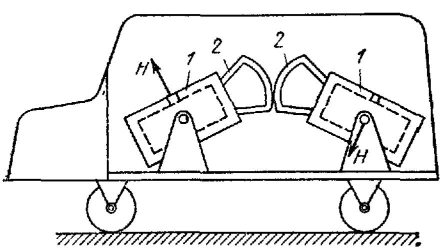
К задаче 15.32.

Угол отклонения автомобиля от вертикали в равновесном положении считать малым, моментами сил инерции, обусловленными вращением автомобиля вокруг вертикальной оси, пренебречь.

Ответ: $A\ddot{\alpha} + (H\Omega - LP)\alpha + H\dot{\beta} = 0, \quad B\ddot{\beta} + (H\Omega - lp)\beta - H\dot{\alpha} = 0$, где α и β — углы отклонения автомобиля и камеры от равновесного положения; остальные обозначения имеют тот же смысл, что в задаче 15.30.

15.33. Приняв условия предыдущей задачи, доказать, что если направление поворота автомобиля совпадает с направлением собственного вращения ротора, а угловая скорость поворота превышает величину lp/H и меньше чем LP/H, то равновесное положение автомобиля неустойчиво.

15.34. Стабилизация двухколесного автомобиля осуществлена с помощью двух одинаковых гироскопов: камеры *1* с гироскопами подвешены на горизонтальных осях, перпендикулярных продольной оси автомобиля и связаны между собой зубчатыми секторами *2*, благодаря которым могут поворачиваться только во взаимно противоположных направлениях на равные углы. В исходном положении собственные кинетические моменты гироскопов **H** и **—H** направлены вертикально во взаимно противоположные стороны.



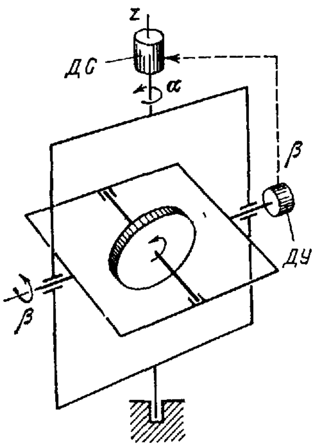
К задаче 15.34.

Доказать, что при такой системе стабилизации требование устойчивости не накладывает ограничений на угловую скорость поворота автомобиля вокруг вертикальной оси.

15.35. Простейший силовой гиростабилизатор представляет собой гироскоп в кардановом подвесе, оснащенный дополнительными устройствами — датчиком угла ДУ и двигателем стабилизации

ДС. Датчик угла измеряет угол β поворота внутренней рамки относительно наружной (угол β отсчитывается от положения, при котором ось ротора перпендикулярна оси наружной рамки) и посылает сигнал, пропорциональный β, в двигатель стабилизации; последний прикладывает к наружной рамке момент относительно ее оси z по закону $M_z = -k\beta$ $(k = \text{const} > 0)$.

Доказать с помощью прецессионной теории гироскопов, что описанное устройство обладает свойством стабилизировать положение наружной рамки, т. е. предотвращать ее вращение вокруг оси z при действующих на нее моментах относительно этой оси.



К задаче 15.35.

15.36. Составить линеаризованные уравнения движения гиростабилизатора, описанного в предыдущей задаче, учитывая моменты инерции обеих рамок и положив, что момент двигателя $M_z = -k\beta - \mu\dot{\alpha}$, где k и μ — положительные постоянные, α — угол поворота наружной рамки.

Ввести обозначения: A — момент инерции всей системы относительно оси z (принимается, что при малых β он остается неизменным), B — момент инерции внутренней рамки вместе с ротором относительно ее оси, H — собственный кинетический момент ротора.

Ответ: $A\ddot{\alpha} + \mu\dot{\alpha} + H\dot{\beta} + k\beta = 0$, $B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} = 0$.

15.37. Исследовать гиростабилизатор задачи 15.36 на устойчивость. Вычислить максимальное значение коэффициента k, допускаемое условиями устойчивости, если $H = 8$ кг·м²/с, $A = 0{,}8$ кг·м², $\mu = 0{,}4$ Н·м·с.

Ответ: $k < \mu \dfrac{H}{A} = 4$ Н·м.

Глава 16

УДАР

§ 1. Удар точки. Соударение тел при поступательном движении

16.1. Материальная точка массы $m = 10$ кг, находящаяся в покое на шероховатой горизонтальной плоскости, в течение 0,01 с подвергается действию постоянной ударной силы, импульс которой равен 100 Н·с. Линия действия ударной силы горизонтальна. Коэффициент трения точки о плоскость при ударе и последующем движении принять одинаковым и равным 0,1.

Определить отношение пути, пройденного точкой до остановки, к ее перемещению за время удара и отношение времени движения точки до остановки ко времени удара. Определить также отношение изменений скорости точки за время удара от действия ударной силы и силы сухого трения.

При вычислениях принять $g = 10$ м/с^2.

Ответ: все отношения равны 10^3.

16.2. На покоящуюся материальную точку массы m действуют раздельно, но в одном направлении ударные силы, изменяющиеся по законам

$$F_1 = \begin{cases} F_0 & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0 & \qquad\quad t > \tau, \end{cases}$$

$$F_2 = \begin{cases} 2F_0\left(1 - \dfrac{t}{\tau}\right) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0 & \qquad\quad t > \tau, \end{cases}$$

$$F_3 = \begin{cases} 2F_0 \dfrac{t}{\tau} & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0 & \qquad\quad t > \tau. \end{cases}$$

Определить импульс этих сил, скорость точки и ее перемещение к моменту окончания действия ударных сил.

Ответ: $S_1(\tau) = S_2(\tau) = S_3(\tau) = S = F_0\tau$, $v_1(\tau) = v_2(\tau) = v_3(\tau) = \dfrac{S}{m}$, $l_1(\tau) = \dfrac{S\tau}{2m}$, $l_2(\tau) = \dfrac{2}{3}\dfrac{S\tau}{m}$, $l_3(\tau) = \dfrac{S\tau}{3m}$.

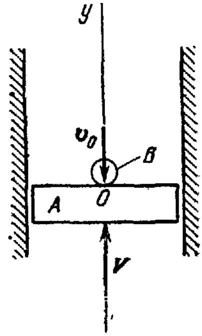
16.3. К материальной точке массы m, подвешенной на пружине с коэффициентом жесткости c, приложен ударный импульс S в направлении оси пружины

Определить коэффициент динамичности ударного процесса $\eta = y_{max}/\lambda_{ст}$, где y_{max} — наибольшее смещение точки после удара от положения равновесия, $\lambda_{ст}$ — статическая деформация пружины.

Ответ: $\eta = \dfrac{S\omega}{mg}$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

16.4. Массивная платформа A движется по вертикали вверх поступательно прямолинейно с постоянной скоростью $\mathbf{V}$. Материальная точка B массы m ударяется о платформу, причем вектор скорости $\mathbf{v}_0$ точки направлен перпендикулярно плоскости платформы, навстречу ее движению.

Определить, какой должна быть скорость движения платформы A, чтобы абсолютная скорость материальной точки B и после отскока равнялась v_0, а также определить величину ударного импульса S при этом условии. Коэф-



К задаче 16.4.

фициент восстановления при ударе равен k. Масса точки B пренебрежимо мала по сравнению с массой платформы A.

Ответ: $V = \frac{1-k}{1+k} v_0$, $S = 2mv_0$.

16.5. В задаче 16.4 определить величины скорости u точки B после второго соударения и ударного импульса S. Движение точки между соударениями происходит в поле силы тяжести.

Ответ: $u = \frac{1-k+2k^2}{1+k} v_0$, $S = 2kmv_0$.

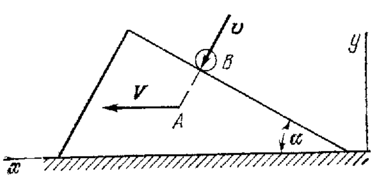
16.6. В задаче 16.4 определить величины скорости отскока точки B и ударного импульса для n-го удара, а также предельное значение перемещения платформы, при котором точка B упадет на нее. Отсчет координаты и времени вести от первого соударения.

Ответ: $u_n = \frac{1-k+2k^n}{1+k} v_0$, $S_n = 2k^{n-1} mv_0$, $y_\infty = \frac{4v_0^2}{g} \frac{k}{(1+k)^2}$ для $0 \leqslant k < 1$.

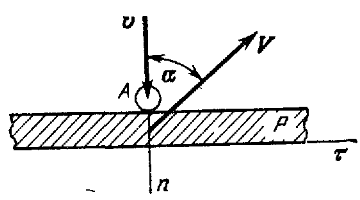
16.7. Материальная точка B массы m падает со скоростью $\mathbf{v}$ на наклоненную под углом α к горизонту гладкую грань призмы A перпендикулярно этой грани. Призма массы M до соударения с точкой двигалась поступательно влево со скоростью $\mathbf{V}$ по гладкой горизонтальной плоскости.

Определить скорость призмы $\mathbf{u}$ после удара и ударный импульс S между призмой и плоскостью, считая, что призма не отрывается от плоскости при ударе. Коэффициент восстановления при ударе точки о призму равен k.

Ответ: $u_x = \frac{m \sin\alpha\,[v(1+k) - kV\sin\alpha] + MV}{M + m\sin^2\alpha}$, $u_y = 0$, $S = \frac{(1+k)\,Mm\cos\alpha\,(v - V\sin\alpha)}{M + m\sin^2\alpha}$.



К задаче 16.7.



К задаче 16.8.

16.8. Гладкая плита P массы M движется поступательно со скоростью $\mathbf{V}$, направленной под углом α к нормали к плите. Материальная точка A массы m ударяется о плиту со скоростью $\mathbf{v}$, перпендикулярной плите. Коэффициент восстановления при ударе равен k.

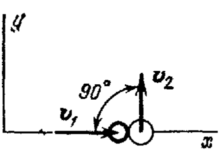
Определить ударный импульс S и скорость u, с которой точка отскочит от плиты. Определить ту же скорость при $m/M \to 0$.

Ответ: $S = \dfrac{Mm}{M+m}(1+k)(v+V\cos\alpha)$, $u_n = \dfrac{mv - M[(1+k)V\cos\alpha + kv]}{M+m}$, $u_\tau = 0$, $u_n\big|_{\frac{m}{M}\to 0} = -[(1+k)V\cos\alpha + kv]$.

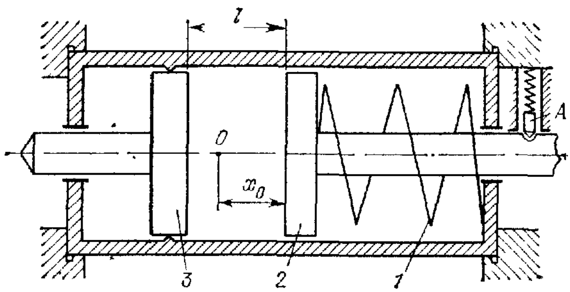
16.9. Два гладких шара с массами m_1 и m_2, двигаясь поступательно, сталкиваются. В момент столкновения скорость центра масс первого шара $\mathbf{v}_1$ направлена вдоль линии центров, а скорость центра масс второго шара $\mathbf{v}_2$ перпендикулярна линии центров.

Определить, при каком условии первый шар остановится после удара, а также скорость второго шара u_2 после соударения при этом условии. Удар считать упругим, коэффициент восстановления k.

Ответ: $k = \dfrac{m_1}{m_2}$, $u_2 = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2} = \sqrt{k^2v_1^2 + v_2^2}$.



К задаче 16.9.



К задаче 16.10.

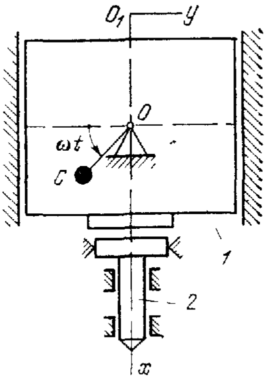
16.10. В пружинном ударном механизме пружина *1* с коэффициентом жесткости c, упирающаяся в корпус и ударник *2*, сжимается взводящим устройством из недеформированного состояния на длину x_0. Стопор A убирается мгновенно, и ударник *2* массы M, разогнавшись, ударяет по бойку *3* массы m. Коэффициент восстановления при ударе равен k. Расстояние между бойком и ударником во взведенном состоянии равно $l > x_0$. После удара ударник стопорится, а боек движется в среде, в которой сила сопротивления пропорциональна его скорости: $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$, $\mu = \text{const} > 0$.

Определить, насколько боек углубится в среду за один удар, а также к. п. д. механизма $\eta = T_m/\Pi$, где T_m — кинетическая энергия бойка после удара, Π — потенциальная энергия сжатой пружины.

Ответ: $H = \dfrac{(1+k)\,m}{\mu\,(M+m)}\sqrt{Mcl\,(2x_0 - l)}$, $\eta = \dfrac{(1+k)^2\,mM}{(M+m)^2}\,\dfrac{l}{x_0}\times$ $\times\left(2 - \dfrac{l}{x_0}\right)$.

16.11. В ударном механизме кривошип OC длины l с точечным грузом C массы m на конце при вращении с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка и связанной жестко с рамой *1*, создает движение раме. Масса рамы равна M.

Движение кривошипа начинается из положения, когда $\omega t = \pi/2$, рама в этот момент находится в покое. Рама ударяет по бойку *2* массы m_1 в момент, когда ее скорость достигает наибольшего значения. Угловая скорость кривошипа сохраняется во время удара. Удар абсолютно неупругий. Механизм находится на гладкой горизонтальной плоскости и имеет гладкие направляющие.



К задаче 16.11.

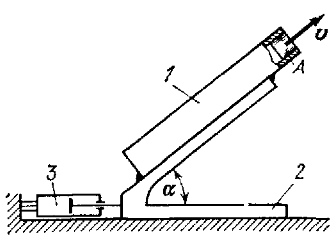
Определить скорость u бойка *2* после удара, а также отношение η кинетической энергии бойка *2* после удара и кинетической энергии груза в относительном движении по отношению к раме.

Ответ: $u = \dfrac{ml\omega}{m_1 + M + m}$, $\eta = \dfrac{mm_1}{(m_1 + M + m)^2}$.

16.12. Решить задачу 16.11, считая удар упругим. Коэффициент восстановления равен k.

Ответ: $u = \dfrac{(1+k)\,ml\omega}{m_1 + M + m}$, $\eta = \dfrac{(1+k)^2 mm_1}{(m_1 + M + m)^2}$.

16.13. Из ствола стационарной установки, помещенной на неподвижных гладких горизонтальных направляющих, производится выстрел снарядом A массы m. Ствол *1* жестко скреплен с лафетом *2* и установлен под углом α к горизонту. Скорость снаряда при выстреле относительно ствола равна $\mathbf{v}$.



К задаче 16.13.

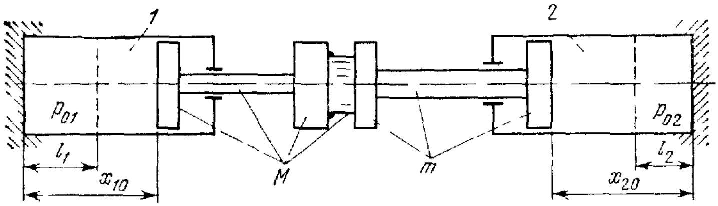
Определить путь отката установки после выстрела L, если ее масса равна M, сила сопротивления тормоза отката *3* равна $R = b + \mu V^2$ (b, $\mu = \text{const} > 0$, V — скорость отката установки), а также импульс силы давления пороховых газов S, сообщающий снаряду скорость $\mathbf{v}$. До выстрела установка была неподвижна. Поверхности соприкосновения снаряда и ствола гладкие.

Ответ: $L = \dfrac{M}{2\mu} \ln \dfrac{b + \mu\left(\dfrac{mv\cos\alpha}{m+M}\right)^2}{b}$, $S = mv\dfrac{M + m\sin^2\alpha}{m + M}$.

16.14. В пневмомеханической ковочной машине горизонтального расположения подвижные массы M и m разгоняются из состояния покоя энергией сжатого газа, находящегося в неподвижных цилиндрах *1* и *2*. Давление газа в цилиндрах изменяется по закону $\frac{p_i}{p_{0i}} = \left(\frac{l_i}{x_i}\right)^n$, $i=1, 2$. Здесь p_{0i}, l_i — начальные давления и координаты поршней, x_i — текущие координаты поршней.

1) Определить массу m из условия, что после абсолютно неупругого удара подвижные массы остановятся.

2) Найти массу m из условия, что после удара масса M остановится, если удар упругий и коэффициент восстановления $k = 0{,}2$.



К задаче 16.14.

При расчетах принять $\frac{l_1}{x_{10}} = \frac{l_2}{x_{20}}$, $\frac{p_{02}s_2l_2}{p_{01}s_1l_1} = 1{,}5$; $M = 1{,}5$ т. Здесь x_{10}, x_{20} — координаты поршней в момент удара, s_1, s_2 — площади поперечного сечения поршней, M — масса подвижных частей в цилиндре *1* вместе с заготовкой.

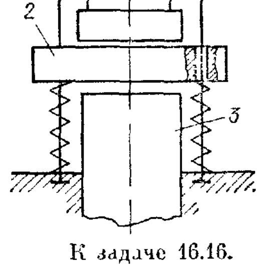
Ответ: 1) $m = 1$ т; 2) $m = 590$ кг.

16.15. Свая длины l и массы m забивается в грунт, сила сопротивления которого изменяется по закону $F = F_0 + cx$, где F_0, $c = \mathrm{const} > 0$, x — глубина погружения сваи в грунт. Масса ударной бабы равна M, коэффициент восстановления при одном ударе равен k. Работой силы тяжести пренебречь.

Определить, какое число n ударов потребуется, для того чтобы полностью погрузить сваю в грунт, если перед каждым ударом скорость бабы равна v, и удары совершаются по остановившейся после предыдущего удара свае (n округляется до целого числа в бо́льшую сторону).

Ответ: $n = \frac{l\,(2F_0 + cl)}{mv^2}\left(\frac{M+m}{M}\right)^2\frac{1}{(1+k)^2}$.

16.16. В ударном механизме боек *1* массы m_1 ударяет по промежуточному телу *2* массы m_2, а затем тело *2* передает удар свае *3* массы m_3. До удара тело *2* и свая *3* неподвижны. Коэффициенты восстановления при соударении бойка *1* и тела *2* и соответст-



К задаче 16.16.

венно тела *2* и сваи *3* равны k_{12}, k_{23}, а при непосредственном соударении тел *1* и *3* коэффициент восстановления равен k_{13}.

Определить коэффициент передачи энергии от бойка *1* к свае *3* ($\eta_3 = T_3/T_1$, где T_3, T_1 — кинетические энергии сваи *3* после удара и бойка *1* до удара).

Определить также условия, при которых коэффициент передачи энергии η_3 в схеме соударения с промежуточным телом *2* выше, чем коэффициент передачи энергии η_2 при непосредственном соударении бойка и сваи, приняв $k_{12} = k_{23} = k_{13} = k = 0{,}8$; $\frac{m_1}{m_3} = 10$.

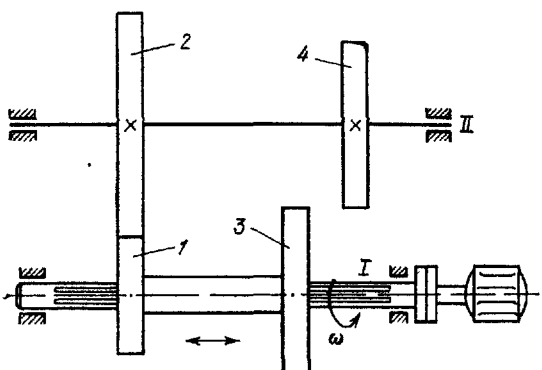
Ответ: $\eta_3 = \frac{(1+k_{12})^2 (1+k_{23})^2 m_1 m_2^2 m_3}{(m_1+m_2)^2 (m_2+m_3)^2}$; при $k = 0{,}8$ $\frac{m_1}{m_3} > 4$ и $\frac{m_1}{m_3} < \frac{1}{4}$, для $\frac{m_1}{m_3} = 10$ $0{,}134 < \frac{m_2}{m_1} < 0{,}746$.

16.17. Используя условия задачи 16.16, определить массу промежуточного тела, при которой коэффициент передачи энергии от бойка к свае будет наибольшим, и найти его величину. Принять коэффициенты восстановления равными k. Определить условие, при котором $\eta_{3\,max} > \eta_2$.

Ответ: $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$, $\eta_{3\,max} = \frac{(1+k)^4 m_1 m_3}{(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_3})^4}$, $\eta_{3\,max} > \eta_2$ при $k > \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, где $c = \frac{m_1}{m_3}$, $0 < k \leqslant 1$.

§ 2. Удар в механической системе

16.18. В коробке скоростей ведущий вал *I* вращается с постоянной угловой скоростью ω, а передача вращения на ведомый вал *II* сначала осуществлялась зацеплением шестерен *1* и *2* с радиу-



К задаче 16.18.

сами r_1, r_2. Затем произвели переключение зацепления на шестерни 3 и 4 с радиусами r_3, $r_4 = r$.

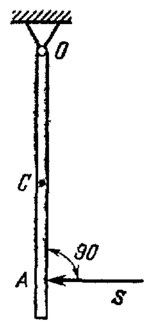
Определить импульс ударной окружной реакции, возникающей в момент переключения передач, предполагая, что угловая скорость ведущего вала за время удара не изменяется. Массы шестерен 2 и 4 равны M_2 и $M_4 = M$ соответственно; $r_3/r_4 = 1$, $r_1/r_2 = 1/2$, $M_2/M_4 = 9/4$. Шестерни 2 и 4 считать однородными дисками, массой вала II пренебречь.

Какой необходимо обеспечить импульс момента на ведущем валу, чтобы сохранить ω во время удара?

Ответ: $S = \dfrac{5Mr\omega}{4}$, $I = Sr$.

16.19. В задаче 16.18 определить угловую скорость вала II после переключения зацепления на шестерни 3 и 4. Моменты инерции вращающихся частей валов I и II относительно их осей вращения равны соответственно J_1 и J_2. Переключение произведено на холостом ходу, т. е. угловая скорость ведущего вала изменяется при ударе.

Ответ: $$\Omega = \frac{\dfrac{r_4}{r_3} + \dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{J_2}{J_1}}{\dfrac{J_2}{J_1} + \left(\dfrac{r_4}{r_3}\right)^2}\,\omega = \frac{2 + \dfrac{J_2}{J_1}}{2\left(1 + \dfrac{J_2}{J_1}\right)}\,\omega.$$



К задаче 16.20.

16.20. В приборе, демонстрирующем наличие центра удара, однородный стержень длины l и массы M имеет возможность вращаться вокруг горизонтальной неподвижной оси, проходящей через его конец O и перпендикулярной ему.

В положении равновесия, указанном на рисунке, по стержню производится удар так, что ударный импульс $\mathbf{S}$ перпендикулярен стержню и оси вращения.

Определить положение центра удара стержня и угловую скорость стержня после удара ω.

Ответ: $b = \dfrac{2}{3}l$, где $b = AO$ — расстояние от центра удара до оси вращения; $\omega = \dfrac{2S}{Ml}$.

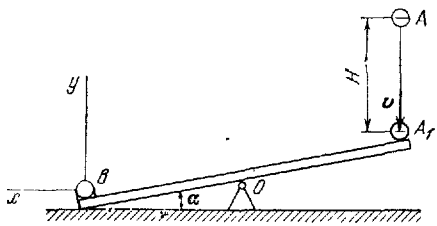
16.21. В цирковом аттракционе используется подкидная доска, на правый конец которой с высоты H падает шар A массы M_1 и остается на доске в точке контакта. На другом конце доски находится шар B массы M_2, который, приобретя скорость, отделяется от доски при повороте ее вокруг горизонтальной оси. Момент инерции доски относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через точку O, равен J, угол наклона доски к горизонту α.

1) Определить наибольшую высоту подъема шара B, если $OA_1 = l_1$, $OB = l_2$.

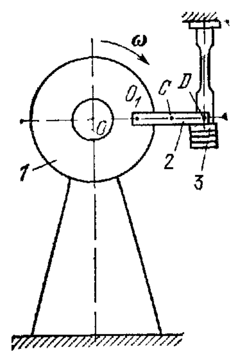
2) Решить задачу, если шару B сообщена в конце удара относительная по отношению к доске скорость v, направленная перпендикулярно доске.

Ответ: 1) $y_{\max} = H\cos^4\alpha\left(\frac{M_1 l_1 l_2}{J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2}\right)^2$;

2) $y_{\max} = \frac{\left[M_1 l_1 l_2 \cos\alpha\sqrt{2gH} + v\left(J + M_1 l_1^2\right)\right]^2\cos^2\alpha}{2g\left(J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2\right)^2}$.



К задаче 16.21.



К задаче 16.22.

16.22. Ударная машина для испытания образцов на растяжение имеет вращающийся вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O, маховик *1*, из которого при заданной угловой скорости ω выбрасывается захват *2*. Захват жестко скрепляется с маховиком вдоль его радиуса и ударяет по упору *3* массы m_1, прикрепленному к испытуемому образцу. При ударе захват не отскакивает от упора, удар производится концом захвата (точкой D) при его горизонтальном положении. Захват считать однородным стержнем длины $O_1D = l$ и массы m. Момент инерции маховика относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через точку O, $J_O = nJ_C$, где n — постоянная, J_C — момент инерции захвата относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс C захвата перпендикулярно рисунку.

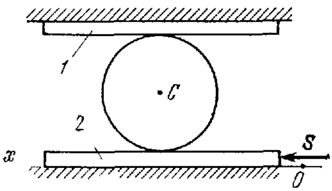
Определить расстояние OO_1, на котором необходимо закрепить захват при ударе, чтобы отсутствовали ударные реакции в подшипнике O, а также скорость упора *3* после удара при выполнении этого условия. Массой образца пренебречь.

Ответ: $OO_1 = \frac{l}{6}(n-2)$, $u = \frac{(n+1)(n+4)ml\omega}{6[(n+1)m + (n+4)m_1]}$.

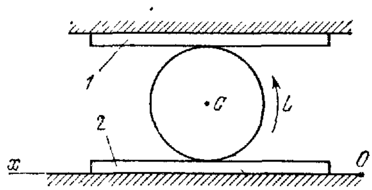
16.23. Рейки *1* и *2* масс m_1 и m_2 могут двигаться по параллельным прямолинейным направляющим, приводя в движение шестерню C массы M радиуса r. Механизм расположен на гладкой горизонтальной плоскости. К рейке *2* приложен ударный импульс $\mathbf{S}$.

Определить скорости реек и угловую скорость шестерни после удара. Шестерню принять за однородный диск. До удара система находилась в покое. Поверхности контакта реек и направляющих гладкие.

Ответ: $u_{1x} = -\dfrac{MS}{M^2+3M(m_1+m_2)+8m_1m_2}$, $u_{2x} = \dfrac{(3M+8m_1)S}{M^2+3M(m_1+m_2)+8m_1m_2}$, $\omega = \dfrac{2(M+2m_1)S}{r\left[M^2+3M(m_1+m_2)+8m_1m_2\right]}$ (направлена по часовой стрелке).



К задаче 16.23.



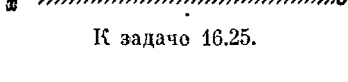
К задаче 16.24.

16.24. К шестерне C механизма, описанного в предыдущей задаче, приложена пара ударных импульсов с моментом L.

Определить скорости реек и угловую скорость шестерни C после удара, используя данные предыдущей задачи.

Ответ: $u_{1x} = \dfrac{2L(M+2m_2)}{r\left[M^2+3M(m_1+m_2)+8m_1m_2\right]}$, $u_{2x} = -\dfrac{2L(M+2m_1)}{r\left[M^2+3M(m_1+m_2)+8m_1m_2\right]}$, $\omega = \dfrac{L}{r^2}\cdot\dfrac{2(M+m_1+m_2)}{M^2+3M(m_1+m_2)+8m_1m_2}$ (направлена против часовой стрелки).

16.25. Рейки *1* и *2* масс m_1 и m_2, движущиеся по параллельным прямолинейным направляющим, находятся в зацеплении с шестерней C массы M и радиуса r. Рейка *2* наталкивается на уступ, имея скорость v_2, и мгновенно останавливается. Угловая скорость шестерни до удара равна ω. Шестерня при ударе по рейкам не проскальзывает.



К задаче 16.25.

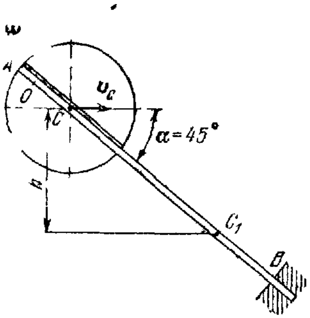
Определить скорость u_1 рейки *1* после удара, а также импульс ударной реакции уступа S. Шестерню считать однородным диском, поверхности контакта реек и направляющих гладкие.

Ответ: $u_{1x} = 2r\omega + \dfrac{4(M+2m_1)v_2}{3M+8m_1}$, $S = \dfrac{M^2+3M(m_1+m_2)+8m_1m_2}{3M+8m_1}v_2$.

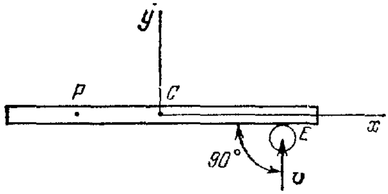
16.26. Однородный диск радиуса $r = 0{,}5$ м и массы $M = 10$ кг с прямолинейным пазом движется в вертикальной плоскости. В тот момент, когда угловая скорость диска $\omega = 6$ рад/с, скорость центра масс диска v_C горизонтальна и равна 3 м/с, а паз наклонен под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту, стержень AB мгновенно попадает в паз диска. После этого диск скользит по остановившемуся стержню. Поверхности скольжения паза и стержня гладкие. Размерами паза пренебречь.

Определить суммарный импульс ударной реакции стержня S и расстояние CO от центра масс до точки приложения импульса ударной реакции. Определить также скорость v диска при опускании его центра на высоту $h = 1{,}05$ м.

Ответ: S=21,2 Н · с, CO=0,353 м, $v = 5$ м/с.



К задаче 16.26.



К задаче 16.27.

16.27. Однородный стержень длины $l = 2$ м и массы M находится в состоянии покоя на горизонтальной гладкой плоскости. Материальная точка массы m, движущаяся со скоростью $v = 23$ м/с, направленной перпендикулярно стержню, ударяет по нему в точке E, расположенной на расстоянии b от его центра масс.

Определить угловую скорость и скорость центра масс стержня после удара, если удар абсолютно неупругий; $M/m = 4$, $b/l = 1/4$.

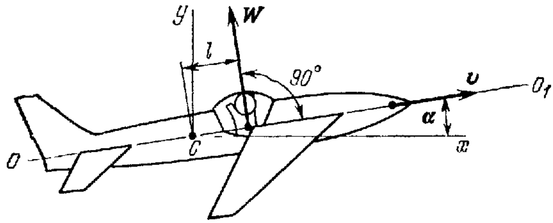
Ответ: $\omega = 6$ рад/с (направлена против часовой стрелки), $u_{Cx} = 0$, $u_{Cy} = 4$ м/с.

16.28. В условиях предыдущей задачи найти положение мгновенного центра скоростей (МЦС) стержня при ударе и показать, что если в МЦС поместить шарнир, то импульс ударной реакции в нем будет равен нулю.

Определить величину ударного импульса при ударе точки о стержень, если масса точки $m = 4$ кг. Получить формулу для расстояния CP от центра масс стержня C до МЦС — точки P, если радиус инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс стержня перпендикулярно плоскости его движения, равен ρ.

Ответ: $CP = 2/3$ м, $S = 64$ Н · с, $CP = \rho^2/b$.

16.29. Из реактивного самолета, совершающего прямолинейный полет со скоростью $\mathbf{v}$ под углом α к горизонту, катапультируется летчик вместе с креслом с относительной скоростью $\mathbf{W}$, перпендикулярной продольной оси самолета в плоскости его симметрии. Катапультирование происходит из точки продольной оси самолета, расположенной от его цетра масс на расстоянии l. Масса летчика с креслом m, масса самолета M, момент инерции самолета относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости рисунка, равен J.



К задаче 16.29.

Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти уравнения движения самолета при падении. Летчика с креслом принять за материальную точку. Угол поворота φ продольной оси самолета в плоскости xy отсчитывать от положения OO_1.

Ответ: $\varphi = k_0 \frac{ml}{J} Wt$ (по часовой стрелке), $x_C = \left(v\cos\alpha + k_0 \frac{m}{M} W \sin\alpha\right)t$, $y_C = \left(v\sin\alpha - k_0 \frac{m}{M} W\cos\alpha\right)t - \frac{gt^2}{2}$, где $k_0 = \frac{1}{1 + \frac{m}{M} + \frac{ml^2}{J}}$.

Указание к задачам 16.30—16.35. При решении использовать гипотезу Рауса для удара: условие отсутствия проскальзывания при ударе

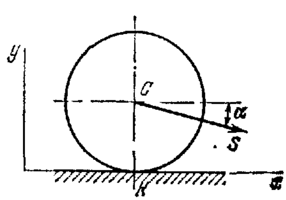
$$|S_F| \leqslant S_{F_{\max}} = fS_N,$$

где f — коэффициент трения скольжения при ударе, S_F, S_N — соответственно касательный и нормальный импульсы ударных реакций; при наличии проскальзывания

$$|S_F| = S_{F_{\max}} = fS_N.$$

В задачах, где говорится об отсутствии проскальзывания катка при ударе, имеется в виду, что проскальзывание может заканчиваться в процессе удара или в фазе деформирования, или в фазе восстановления.

16.30. В плоскости симметрии однородного катка массы m и радиуса r к горизонтальной оси, проходящей через центр масс C и перпендикулярной этой плоскости, приложен ударный импульс S под углом α к горизонту. До удара каток находился в покое на шероховатой горизонтальной плоскости, при ударе ка-



К задаче 16.30.

ток от плоскости не отскакивает. Коэффициент трения скольжения при ударе равен f.

Определить, при каких значениях угла α каток при ударе не проскальзывает, а также угловую скорость катка ω после удара при отсутствии проскальзывания.

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 3f$, $\omega = \dfrac{2S\cos\alpha}{3mr}$.

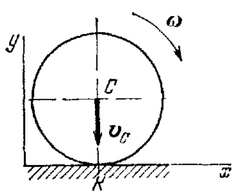
16.31. В условиях предыдущей задачи, допустив наличие проскальзывания катка при ударе, определить скорость точки контакта катка с плоскостью после удара.

Ответ: $u_{Kx} = \dfrac{S}{m}(\cos\alpha - 3f\sin\alpha) > 0$, $u_{Ky} = 0$.

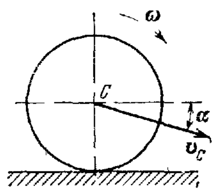
16.32. Колесо, представляющее собой однородный диск радиуса r, падает на горизонтальную шероховатую плоскость так, что ось колеса параллельна плоскости, скорость центра колеса $\mathbf{v}_C$ перпендикулярна плоскости, угловая скорость колеса ω. Коэффициент трения скольжения при ударе равен f.

Считая удар колеса о плоскость абсолютно неупругим, определить условие проскальзывания при ударе, найти положение мгновенного центра скоростей колеса (точку P) и скорость точки касания K колеса с плоскостью после удара при наличии проскальзывания.

Ответ: $f < \dfrac{\omega r}{3v_C}$, $CP = \dfrac{fv_C r}{r\omega - 2fv_C}$, $u_{Kx} - 3fv_C - r\omega < 0$, $u_{Ky} = 0$.



К задаче 16 32.



К задаче 16 33.

16.33. Колесо после подскока на неровности ударяется о горизонтальную шероховатую плоскость, имея угловую скорость ω. Скорость центра колеса $\mathbf{v}_C$ направлена под углом α к горизонту. При ударе колесо от плоскости не отскакивает. Колесо считать однородным диском радиуса r.

Определить величину коэффициента трения скольжения при условии отсутствия проскальзывания при ударе.

Ответ: $3f \geqslant \dfrac{|r\omega - v_C\cos\alpha|}{v_C\sin\alpha}$.

16.34. В условиях предыдущей задачи найти скорость центра колеса после удара u_C при отсутствии проскальзывания, а также определить условие, при котором касательная составляющая импульса ударной реакции S_F обратится в нуль.

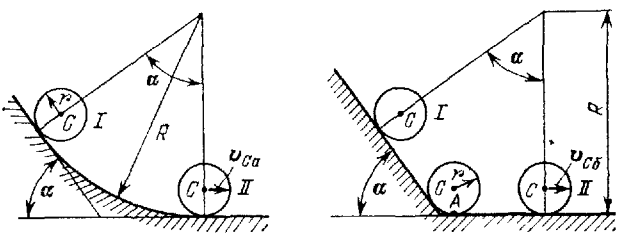
Ответ: $u_C = \dfrac{r\omega + 2v_C\cos\alpha}{3}$; $S_F = 0$ при $r\omega = v_C\cos\alpha$.

16.35. В условиях задачи 16.33, считая, что колесо при ударе проскальзывает, определить скорость центра колеса u_C и его угловую скорость ω_1 после удара. Коэффициент трения скольжения при ударе равен f.

Ответ: $u_C = v_C(\cos\alpha \pm f\sin\alpha)$, $\omega_1 = \omega \mp 2f\dfrac{v_C}{r}\sin\alpha$

(верхний знак при $r\omega > v_C\cos\alpha$, нижний знак при $r\omega < v_C\cos\alpha$).

16.36. Колесо радиуса r скатывается без скольжения по наклонной плоскости на горизонтальную плоскость. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол α. Движение колеса может осуществляться в двух вариантах: *а*) по сопряжению радиуса R; *б*) без сопряжения. В обоих случаях колесо начинает движение из состояния покоя из одного и того же положения I на наклонной плоскости. В варианте *б*) колесо не отрывается от горизонтальной плоскости и катится по ней без скольжения.



а) *б*)

К задаче 16.36.

Определить скорость центра колеса C в положении II для обоих случаев скатывания. Трением качения пренебречь. Колесо считать однородным диском.

Ответ: $v_{Cб} = \dfrac{1+2\cos\alpha}{3}v_{Ca}$, где $v_{Ca} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{g(R-r)(1-\cos\alpha)}$.

16.37. В условиях предыдущей задачи определить импульс ударной реакции в точке A, если масса колеса равна M.

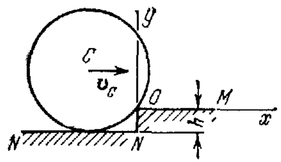
Ответ: $S_N = Mv_{Ca}\sin\alpha$, $S_F = \dfrac{M}{3}v_{Ca}(1-\cos\alpha)$.

16.38. Колесо массы M и радиуса r, катясь без скольжения по горизонтальной направляющей NN, наталкивается на уступ O и, огибая его, поднимается на горизонтальную направляющую OM. Высота уступа h. Удар колеса об уступ неупругий, скольжение при ударе и огибании уступа отсутствует.

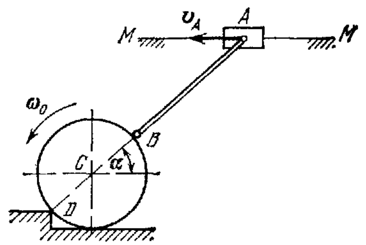
Определить, какова должна быть скорость центра C колеса перед ударом, чтобы колесо вкатилось на верхнюю направляющую.

При заданной скорости центра колеса $\mathbf{v}_C$ до удара определить импульс ударной реакции уступа S. Колесо считать однородным диском.

Ответ: $v_C \geqslant \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3gh}}{1-\dfrac{2}{3}\dfrac{h}{r}}$; $S_x = Mv_C\dfrac{h}{3r}\left(2\dfrac{h}{r}-5\right)$, $S_y = Mv_C \times \left(1-\dfrac{2}{3}\dfrac{h}{r}\right)\sqrt{\dfrac{h}{r}\left(2-\dfrac{h}{r}\right)}$. Решение справедливо при $0 \leqslant h/r \leqslant 1$.



К задаче 16.38.



К задаче 16.39.

16.39. Ползун A массы m, движущийся по гладкой горизонтальной направляющей MM, соединен шарнирно со стержнем AB, который в точке B шарнирно соединен с однородным диском массы M и радиуса r с центром в точке C. Диск катится по горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени, когда точки A, B, C и D лежат на одной прямой, диск наталкивается на упор D, имея угловую скорость ω_0, скорость ползуна A равна $\mathbf{v}_A$, а стержень наклонен под углом α к горизонту. Диск при ударе не отскакивает от упора D и не проскальзывает по нему. Массу стержня AB не учитывать.

Определить угловую скорость диска ω, скорость u_B точки B и скорость u_A ползуна A после удара, а также импульс реакции S_A при ударе ползуна A о направляющую.

Ответ: $\omega = \dfrac{r\omega_0 + 2v_A\sin\alpha}{3r}$, $u_B = 2r\omega$, $u_A = 0$, $S_A = mv_A \operatorname{tg}\alpha$.

16.40. В механизме предыдущей задачи считать, что однородный стержень AB длины l обладает массой m; массой ползуна A пренебречь.

Определить угловую скорость ω диска и скорость точки B после удара. Определить также угловую скорость ω_{AB} стержня AB после удара.

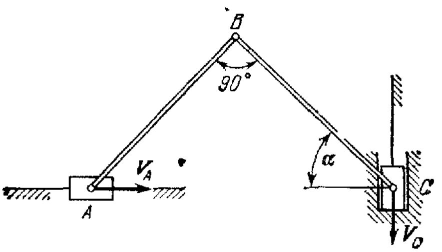
Ответ: $\omega = \dfrac{6(M+m)\,v_A\sin\alpha + \omega_0 r\,(3M+4m)}{r\,(9M+8m)}$, $u_B = 2\omega r$, $\omega_{AB} = \dfrac{2\omega r}{l}$.

16.41. Ползуны A и C соединены стержнями AB и BC одинаковой длины. Ползун A массы m движется по горизонтальной направляющей, а ползун C — по вертикальной. Однородный стержень BC имеет массу M. В положении, указанном на рисунке ($\alpha = 45°$, $\angle ABC = 90°$), ползун C попадает на концевой выключатель и внезапно останавливается. Перед остановкой скорость ползуна C была $\mathbf{V}_C$, скорость ползуна A в тот же момент времени равна $\mathbf{V}_A$.

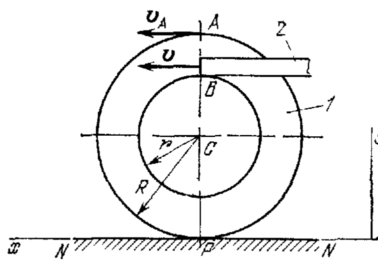
Определить скорость u_B точки B после удара, а также импульс ударной реакции S_A в точке A, если $V_C/V_A = 1,2$; $M/m = 5$.

Массами ползуна C и стержня AB пренебречь. Направляющие считать гладкими.

Ответ: $u_B = \dfrac{4\sqrt{2}}{11} V_A$, $S_A = \dfrac{MV_C}{22}$.



К задаче 16.41.



К задаче 16.42.

16.42. Ступенчатое зубчатое колесо *1* массы M катилось по неподвижной зубчатой рейке NN без скольжения. До зацепления в точке B с зубчатой рейкой *2* массы $m = 10$ кг скорость точки A колеса была равна $\mathbf{v}_A$. Рейка *2* до зацепления с колесом *1* имела скорость $\mathbf{v}$ и двигалась поступательно параллельно NN. При зацеплении с рейкой *2* колесо в точке P не проскальзывает.

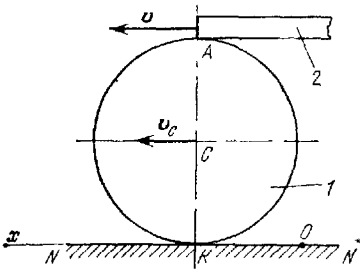
Определить угловую скорость колеса ω после зацепления с рейкой *2*, а также импульс ударной реакции S_P в точке P. При вычислениях принять $M/m = 2$, $R/r = 2$, $\rho/r = \sqrt{1,5}$, $v_A/v = 1$, $r = 0,2$ м, $v = 16$ м/с (r, R — радиусы ступеней колеса, ρ — радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через центр колеса C и перпендикулярной плоскости движения колеса).

Ответ: $\omega = 23$ рад/с, $S_{Px} = 2$ Н·с, $S_{Py} = 0$.

16.43. В условиях предыдущей задачи определить, при каком условии импульс ударной реакции S_P в точке P равен нулю и при этом условии определить угловую скорость колеса ω после зацепления с рейкой *2*, а также импульс ударной реакции S_B в точке B.

Ответ: $S_P = 0$ при $\rho^2 = rR$, $\omega = 22{,}85$ рад/с, $S_{Bx} = 22{,}85$ Н · с, $S_{By} = 0$.

16.44. Зубчатое колесо *1* массы M и радиуса R катилось по неподвижной зубчатой рейке NN без скольжения. В момент времени, когда скорость центра масс C колеса *1* была равна $\mathbf{v}_C$, произошло зацепление колеса в точке A с зубчатой рейкой *2*. Рейка *2* массы m до зацепления двигалась поступательно параллельно NN со скоростью $\mathbf{v}$. При зацеплении с ударом ($v \neq v_C$) колесо проскальзывает в точке K.



К задаче 16.44.

1) Определить угловую скорость ω колеса, его кинетический момент K_K относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку K, и скорость рейки *2* после удара u, если принять горизонтальную составляющую импульса ударной реакции в точке K равной нулю ($S_{Kx} = 0$). Эти же величины определить при $M/m \to 0$.

2) Определить угловую скорость ω и горизонтальную составляющую импульса ударной реакции S_{Ax} в точке A, если $S_{Ax} = nS_{Kx}$, где $n > 0$. Определить эти же величины при $M/m \to 0$. Колесо считать однородным диском.

Ответ: 1) $\omega = \dfrac{Mv_C + m(2v - v_C)}{R(M + 3m)}$, $K_K = \dfrac{MR[3Mv_C + m(4v + v_C)]}{2(M + 3m)}$, $u = \dfrac{2Mv_C + 3mv}{M + 3m}$. При $\dfrac{M}{m} \to 0$ $\omega = \dfrac{2v - v_C}{3R}$, $K_K = \dfrac{MR}{6}(4v + v_C)$, $u = v$.

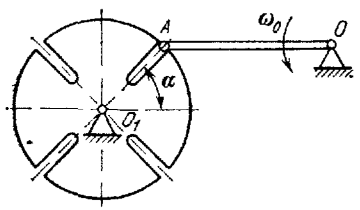
2) $\omega = \dfrac{nMv_C - m[2(1-n)v + (n-3)v_C]}{R[nM + (3n-1)m]}$, $S_{Ax} = \dfrac{nMm(v - 2v_C)}{nM + (3n-1)m}$.
При $\dfrac{M}{m} \to 0$ $\omega = \dfrac{2(n-1)v + (3-n)v_C}{R(3n-1)}$, $S_{Ax} = \dfrac{nM(v - 2v_C)}{3n-1}$.

16.45. При включении мальтийского механизма палец A входит в гладкий паз диска — мальтийского креста — с ударом. Поводок OA до соударения вращался с угловой скоростью ω_0, диск был неподвижен. В момент включения механизма поводок OA горизонтален, паз наклонен под углом α к горизонту. Определить угловую скорость диска ω после удара и ударный импульс S в точке A, а также величину угла α при безударной работе механизма.

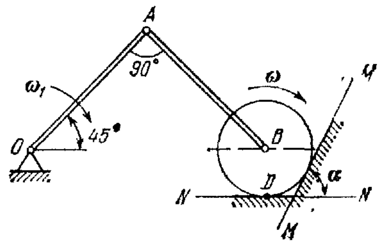
Поводок OA считать однородным стержнем длины l и массы M, момент инерции диска относительно оси вращения, проходящей через центр O_1, равен J; $O_1A = r$.

Ответ: $\omega = \dfrac{Mlr\omega_0 \cos\alpha}{Mr^2 + 3J\cos^2\alpha}$, $S = \dfrac{JMl\omega_0 \cos\alpha}{Mr^2 + 3J\cos^2\alpha}$; $S = 0$ при $\alpha = \pi/2$.

16.46. Кривошип OA вращается вокруг оси, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости рисунка, с постоянной угловой скоростью ω_1. Колесо B движется по прямолинейной направляющей NN и переходит на направляющую MM без отскока и без проскальзывания, причем угловая скорость его перед сменой направления движения равна ω.



К задаче 16.45.

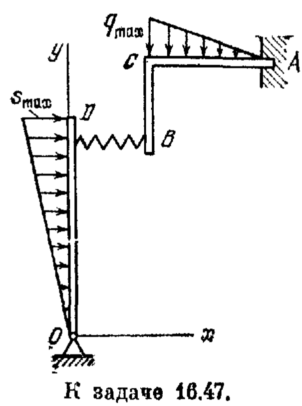


К задаче 16.46.

Определить скорость u_D точки D колеса после удара. Колесо радиуса r считать однородным диском, массой шатуна AB пренебречь. $OA = AB = l$, $\alpha = 45°$, $\angle OAB = 90°$.

Ответ: $u_D = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{3}(\omega r + 2\omega_1 l)$.

16.47. В сочлененной системе однородный стержень OD массы $M = 20$ кг и длины $l = 1$ м соединен пружиной с коэффициентом жесткости $c = 88{,}1$ кН/м с изогнутым под прямым углом стержнем BCA, заделанным в стену. К стержню OD приложены распределенные ударные импульсы с наибольшей интенсивностью $s_{max} = 300$ Н · с/м, а к стержню BCA — распределенные силы с наибольшей интенсивностью $q_{max} = 200$ Н/м.



К задаче 16.47.

1) Определить угловую скорость ω стержня OD после удара и ударную реакцию S_O в опоре O.

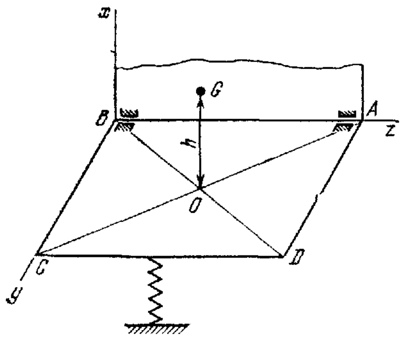
2) Определить наибольшую опорную реакцию в точке A, если $CB = 0{,}2$ м, $AC = 3$ м. Массой стержня BCA пренебречь. Деформацию пружины считать малой.

Ответ: 1) $\omega = 15$ рад/с (направлена по часовой стрелке), $S_{Ox} = S_{Oy} = 0$; 2) $X_{A\,max} = -11{,}5$кН, $Y_{A\,max} = 300$Н, $M_{A\,max} = -2{,}9$кН · м.

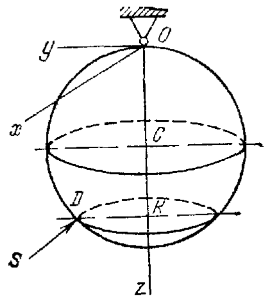
16.48. На горизонтально установленную с помощью пружины и цилиндрических шарниров в точках A и B прямоугольную однородную плиту $ABCD$ массы M с высоты h падает груз G массы m в точку O — центр масс плиты. Удар груза о плиту абсолютно неупругий.

Определить ударные реакции опор, а также скорость груза u после удара.

Ответ: $S_{Ax} = S_{Bx} = \dfrac{Mm\sqrt{2gh}}{2(4M+3m)}$, $S_{Ay} = S_{By} = 0$, $u = \dfrac{3m\sqrt{2gh}}{4M+3m}$.



К задаче 16.48.

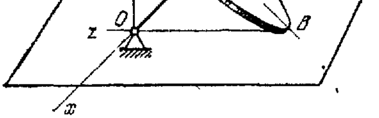


К задаче 16.49.

16.49. Однородный шар массы M и радиуса R подвешен на шаровом шарнире O. В точке D к покоящемуся шару приложен ударный импульс **S**, направленный по касательной к параллели, центр которой лежит па оси, проходящей через неподвижную точку O и центр шара C.

Определить угловую скорость ω шара после удара и расстояние OK от шарнира O до плоскости, в которой приложен ударный импульс, если ударная реакция в шарнире O равна нулю.

Ответ: $\omega = \dfrac{5S}{2MR}\left(\omega_x = 0,\ \omega_y = -\dfrac{S}{MR},\ \omega_z = \dfrac{S\sqrt{21}}{2MR}\right)$, $OK = \dfrac{7}{5}R$.



К задаче 16.50.

16.50. Однородный диск массы M и радиуса R, закрепленный в точке O с помощью шарового шарнира и стержня OC, жестко скрепленного с диском и перпендикулярного плоскости диска, перекатывается по горизонтальной плоскости без скольжения. В положении, указанном на рисунке, когда скорость точки A диска равна $\mathbf{v}_A$ и направлена параллельно оси x, в центр диска ударяет точка D массы m со скоростью **v**, направленной параллельно AO. Удар неупругий. Массу стержня OC не учитывать; $\angle AOB = 90°$.

Определить абсолютную угловую скорость ω диска после удара, а также ударный импульс S_B в точке B. При ударе диск не проскальзывает по плоскости. Зацепление диска с плоскостью зубчатое.

Ответ: $\omega = \dfrac{7\sqrt{2}Mv_A}{2R(7M+4m)}$ (вектор ω направлен по OB вправо); $S_{Bx} = \dfrac{Mmv_A}{7M+4m}$, $S_{By} = \dfrac{mv}{2}$.

16.51. 1) В условиях задачи 16.11 определить импульс ударной реакции S_O в шарнире O.

2) В условиях задачи 16.11, полагая, что угловая скорость кривошипа изменяется при ударе, определить ее величину ω_1 после удара. Определить также скорость u бойка *2* после удара и импульс ударной реакции S бойка.

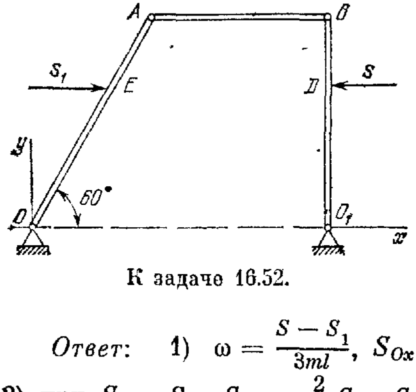
Ответ: 1) $S_{Ox} = \dfrac{m^2 m_1 l\omega}{(M+m)(m_1+M+m)}$, $S_{Oy} = 0$. 2) $\omega_1 = \omega\dfrac{M(m_1+M+m)}{(M+m_1)(M+m)}$, $u = \dfrac{Mml\omega}{(M+m_1)(M+m)}$, $S = \dfrac{Mm_1ml\omega}{(M+m_1)(M+m)}$.

16.52. К стержням OA и O_1B шарнирного четырехзвенника, находящегося в покое в положении, указанном на рисунке, приложены одновременно ударные импульсы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}_1$. Векторы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}_1$ параллельны OO_1, $\angle OO_1B = \angle O_1BA = 90°$, $\angle AOO_1 = 60°$, $OE = \frac{2}{3}OA$, $O_1D = \frac{2}{3}O_1B$.

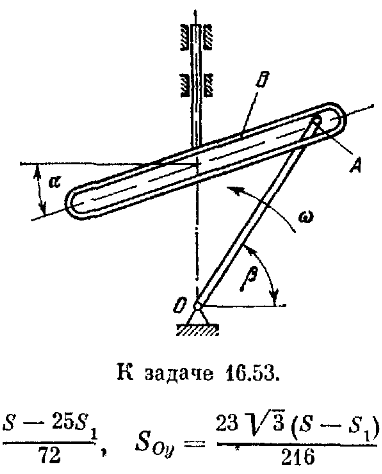
1) Определить угловую скорость ω стержня O_1B после удара, а также импульс ударной реакции S_O в шарнире O.

2) При $S_1 = S$ определить импульс ударной реакции S_A в шарнире A.

Однородные стержни O_1B, AB и OA имеют массы m_1, m_2, m_3 и длины l_1, l_2, l_3 соответственно, причем $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$, $m_3/m = 5/4$. Трением в шарнирах пренебречь.



К задаче 16.52.



К задаче 16.53.

Ответ: 1) $\omega = \dfrac{S-S_1}{3ml}$, $S_{Ox} = \dfrac{S-25S_1}{72}$, $S_{Oy} = \dfrac{23\sqrt{3}(S-S_1)}{216}$;

2) при $S_1 = S$ $S_{Ax} = \frac{2}{3}S$, $S_{Ay} = 0$.

16.53. В кулисном механизме, находящемся в покое, кривошипу OA сообщается угловая скорость, которая достигает значения ω в момент, когда выберется зазор между цилиндрическим пальцем A кривошипа и поверхностью паза кулисы B. Палец с ударом вступает в контакт с поверхностью паза кулисы. Удар считать неупругим.

Масса кулисы равна M, момент инерции кривошипа с пальцем относительно оси вращения, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, равен J, длина кривошипа l. Кулиса наклонена к горизонту под углом α. При ударе кривошип образует угол β с горизонтом.

Определить потерю угловой скорости $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$ кривошипа OA при ударе (ω_1 — угловая скорость кривошипа после удара). Определить также импульс ударной реакции S в точке контакта пальца кривошипа с поверхностью паза кулисы. Трением пренебречь.

Ответ: $\Delta\omega = \omega_1 - \omega = -\dfrac{\omega M l^2 \cos^2(\beta-\alpha)}{J\cos^2\alpha + Ml^2\cos^2(\beta-\alpha)}$, $S = \dfrac{\omega M l J \cos(\beta-\alpha)}{J\cos^2\alpha + Ml^2\cos^2(\beta-\alpha)}$.

16.54. В условиях задачи 16.53 определить работу внутренних ударных реакций A в точке контакта пальца кривошипа с поверхностью паза кулисы и показать, что эта работа равна изменению кинетической энергии кулисного механизма при ударе ΔT.

Ответ: $A = -\dfrac{J\omega^2}{2}\dfrac{Ml^2\cos^2(\beta-\alpha)}{J\cos^2\alpha + Ml^2\cos^2(\beta-\alpha)} = \Delta T$.

Глава 17

ДИНАМИКА ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

§ 1. Реактивная сила. Задачи Циолковского

17.1. Определить реактивную силу и полный импульс, создаваемый двигателями первой ступени ракеты «Сатурн-5», если масса сгоревшего топлива этой ступени 2010 т, продолжительность работы двигателей 150 с, относительная скорость истечения продуктов сгорания топлива 2500 м/с. Расход топлива считать равномерным.

Ответ: $P = 33\,500$ кН, $I = 5\,025\,000$ кН · с.

17.2. Поливочная автомашина движется прямолинейно при включенном на наибольший расход воды поливочном устройстве. Масса воды в цистерне автомашины 3000 кг, время опорожнения цистерны при наибольшем расходе воды равно 5 мин, перепад давлений на распылителе 2940 гПа.

Насколько большей должна быть мощность, необходимая для обеспечения равномерного движения автомашины со скоростью

36 км/ч при направлении струи воды в сторону ее движения по сравнению с тем случаем, когда струя воды перпендикулярна направлению движения автомашины. Потери на трение при движении автомашины считать постоянными.

Указание. Скорость истечения воды $v=\sqrt{\dfrac{2\Delta p}{\rho}}$, где Δp — перепад давлений на распылителе, ρ — плотность воды.

Ответ: на 2,43 кВт.

17.3. Одноступенчатая ракета, стартовая масса которой 12 900 кг, движется вертикально вверх в однородном поле сил тяжести из состояния покоя. Время работы двигателя 64 с, относительная скорость истечения продуктов сгорания топлива 2200 м/с, конечная масса ракеты 4900 кг.

Считая тягу двигателя равной реактивной силе, секундный расход топлива постоянным и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить наибольшую скорость ракеты.

Ответ: $v=1501{,}7$ м/с.

17.4. Сохраняя условия предыдущей задачи, определить, на какую высоту h поднимется ракета в момент окончания работы двигателя и полную высоту H ее подъема.

Ответ: $h=37{,}2$ км, $H=152{,}1$ км.

17.5. Используя условия задачи 17.3 и считая, что масса ракеты во время работы двигателя уменьшается по закону $M=M_0e^{-\alpha t}$, где $\alpha=\text{const}>0$, определить полную высоту H подъема ракеты.

Ответ: $H=163$ км.

17.6. Используя условия задачи 17.3, определить максимальную высоту $h_{\max}$, которую может достичь в момент окончания работы двигателя ракета, если уменьшение ее массы во время работы двигателя происходит по закону $M=M_0e^{-\alpha t}$, где $\alpha=\text{const}>0$.

Ответ: $h_{\max}=57{,}79$ км.

17.7. Воображаемая ракета, стартовая масса которой 2765 т, состоит из трех ступеней. Масса топлива в первой ступени 2010 т, во второй 420 т и в третьей 104 т. Массы конструкции первой и второй ступеней ракеты равны 135 т и 43 т соответственно. Относительная скорость истечения газов при работе двигателей первой ступени 2500 м/с, а при работе двигателей второй и третьей ступеней 4250 м/с.

Считая, что отработавшая ступень отделяется от оставшейся части ракеты с нулевой относительной скоростью и пренебрегая сопротивлением воздуха и силой тяжести, определить конечную скорость ракеты.

Ответ: $v=12\,669$ м/с.

17.8. Воображаемая трехступенчатая ракета, для всех ступеней которой одинаковы числа Циолковского и относительные скорости истечения газов $v_r = 2500$ м/с, должна сообщить космическому кораблю массы 43 т конечную скорость 12 670 м/с. Масса конструкции каждой ступени составляет 7% массы топлива этой ступени.

Считая относительную скорость отработавшей ступени равной нулю и пренебрегая сопротивлением воздуха и силой тяжести, определить стартовую массу ракеты.

Ответ: $M = 20\,714$ т.

§ 2. Дифференциальные уравнения движения точки

17.9. По какому закону должна изменяться масса тела, скользящего по горизонтальной плоскости за счет отделения от него частиц с постоянной относительной скоростью **u**, направленной против движения тела, чтобы скорость самого тела была постоянной.

Коэффициент трения скольжения между телом и плоскостью $f = \text{const}$, начальная масса тела m_0.

Ответ: $m(t) = m_0 e^{-\frac{gf}{u}t}$.

17.10. По какому закону должна изменяться масса тела, скользящего снизу вверх по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, чтобы его ускорение было постоянно и равно a_0.

Относительная скорость **u** отделяющихся от тела частиц постоянна и направлена против движения тела. Коэффициент трения скольжения тела о плоскость $f = \text{const}$, начальная масса тела m_0.

Ответ: $m(t) = m_0 e^{-\frac{a_0 + g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{u}t}$.

17.11. По какому закону должна изменяться масса тела, скользящего по горизонтальной плоскости за счет отделения от него частиц с постоянной относительной скоростью **u**, направленной против движения тела, чтобы ускорение самого тела увеличивалось пропорционально времени с коэффициентом пропорциональности k. Начальная масса тела m_0.

Ответ: $m(t) = m_0 e^{-\frac{k}{2u}t^2}$.

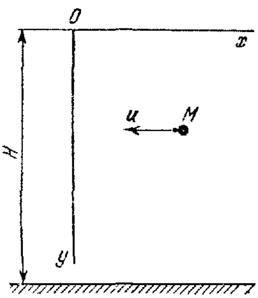
17.12. Найти скорость точки переменной массы как функцию времени, если масса точки уменьшается по закону $m = m_0 e^{-\alpha t^2}$ ($\alpha = \text{const} > 0$, m_0 — начальная масса точки) и скорость точки в момент начала отделения от нее частиц была равна $\mathbf{v}_0$. Точка скользит по гладкой горизонтальной плоскости, относительная скорость **u** отделяющихся частиц постоянна и направлена против начальной скорости точки $\mathbf{v}_0$.

Ответ: $v(t) = v_0 + \alpha u t^2$.

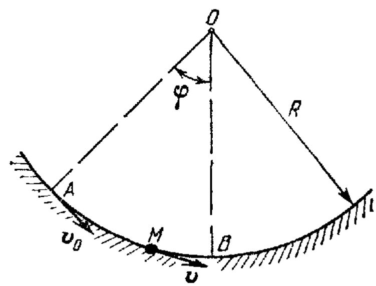
17.13. Материальная точка M, масса которой уменьшается по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$ ($\alpha = \text{const} > 0$, m_0 — начальная масса точки), движется в вертикальной плоскости в однородном поле сил тяжести. Векторы относительных скоростей отделяющихся от точки M частиц горизонтальны и равны по величине $u = \text{const}$.

Найти траекторию точки M в неподвижной декартовой системе координат Oxy и путь, пройденный точкой до падения на Землю. В начальный момент времени ($t = 0$) точка M совпадала с началом координат и ее скорость была равна нулю. Сопротивлением воздуха пренебречь. Высота точки O над поверхностью Земли H.

Ответ: $y = \frac{g}{\alpha u} x$, $S = H \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha u}{g}\right)^2}$.



К задаче 17.13.



К задаче 17.14.

17.14. Материальная точка M скользит в вертикальной плоскости по гладкой цилиндрической поверхности радиуса R. Масса точки M уменьшается по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$, где $\alpha = \text{const} > 0$, m_0 — начальная масса точки. Относительная скорость $\mathbf{u}$ отделяющихся частиц постоянна по величине, направлена по касательной к траектории точки в сторону, противоположную ее движению. В начальный момент времени ($t = 0$) точка M совпадала с точкой A поверхности и имела скорость $\mathbf{v}_0$.

Определить скорость материальной точки M в тот момент времени, когда она достигнет точки B на цилиндрической поверхности, если $\varphi = 45°$.

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 + gR(2 - \sqrt{2}) + 0{,}5\pi\alpha u R}$.

17.15. Модель крылатой ракеты, привязанная к концу троса, второй конец которого закреплен неподвижно, движется так, что ее центр масс описывает окружность в горизонтальной плоскости. Масса модели уменьшается по закону $m = m_0(1 - \alpha t)$, где $\alpha = \text{const} > 0$, m_0 — начальная масса модели. Относительная скорость $\mathbf{u}$ истечения продуктов сгорания топлива постоянна по величине и направлена по касательной к траектории центра масс модели.

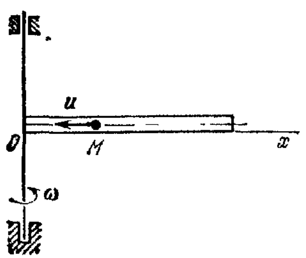
Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить силу T натяжения троса в тот момент времени, когда масса модели станет вдвое меньше начальной. Длина троса l, начальная скорость модели равна v_0.

Ответ: $T = \frac{m_0}{2l}(v_0 + u \ln 2)^2$.

17.16. Используя условия задачи 17.15, найти уравнение $s(t)$ движения центра масс модели и определить, как изменится натяжение троса в момент времени, когда масса модели ракеты станет вдвое меньше начальной, если уменьшение массы будет происходить по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$ ($\alpha = \text{const} > 0$, m_0 — начальная масса модели ракеты).

Ответ: $s(t) = \left(v_0 + \frac{\alpha u}{2} t\right) t$, натяжение троса не изменится.

17.17. Материальная точка M, масса которой уменьшается по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$ ($\alpha = \text{const} > 0$, m_0 — начальная масса точки), скользит по гладкой горизонтальной трубке, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Движение точки M начинается от оси вращения трубки из состояния покоя. Относительная скорость u отделяющихся частиц постоянна и направлена к оси вращения трубки.



К задаче 17.17.

Получить уравнение движения точки M относительно трубки.

Ответ: $x(t) = \frac{\alpha u}{\omega^2}(\operatorname{ch} \omega t - 1)$.

17.18. Решить задачу 17.17, принимая во внимание шероховатость стенок трубки. Коэффициент трения скольжения между точкой M и стенкой трубки f; влиянием силы тяжести точки M на силу трения пренебречь.

Ответ: $x(t) = \frac{\alpha u}{\omega^2}\left[\frac{e^{-nt}}{\omega_1}(\omega_1 \operatorname{ch} \omega_1 t + n \operatorname{sh} \omega_1 t) - 1\right]$, где $n = f\omega$, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2(1+f)}$.

17.19. Тяжелая цепь, изготовленная из одинаковых звеньев и сложенная кучкой на краю стола, сползает с него под действием сил тяжести. Движение начинается из состояния покоя за счет того, что в начальный момент времени со стола свешивалось только одно звено цепи.

Пренебрегая трением и сопротивлением воздуха, определить, во сколько раз путь, пройденный первым звеном цепи за первую после начала движения секунду, будет меньше пути, пройденного свободно падающей точкой за то же время.

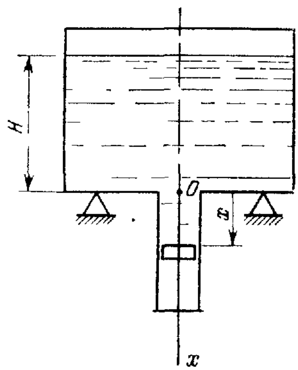
Ответ: в три раза.

17.20. Жидкость, находящаяся в баке большой емкости, отделена от короткой вертикальной трубы поршнем, который закреплен в месте соединения трубы с баком. В некоторый момент времени поршень освобождается.

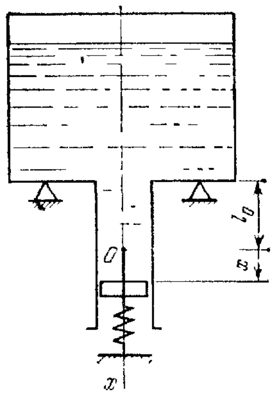
Получить дифференциальное уравнение движения поршня по трубе под действием вытекающей из бака жидкости.

Жидкость считать идеальной. Изменением уровня H жидкости в баке, массой поршня и трением между поршнем и стенками трубы пренебречь.

Ответ: $\ddot{x} \cdot x + \dot{x}^2 - gx = gH$.



К задаче 17.20.



К задаче 17.21.

17.21. Получить дифференциальное уравнение движения и определить период малых колебаний поршня клапана, который закрывает выход идеальной жидкости из вертикальной трубы, соединенной с баком большой емкости.

Масса поршня клапана m, коэффициент жесткости пружины c, плотность жидкости ρ, площадь поперечного сечения трубы f. Расстояние от днища бака до поршня клапана при равновесии системы равно l_0.

Ответ: $(m + \rho f l_0)\ddot{x} + \rho f x \cdot \ddot{x} + \rho f \dot{x}^2 + (c - g\rho f) x = 0$, $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m + \rho f l_0}{c - g\rho f}}$, где $c > g\rho f$.

17.22. Из бункера комбайна, который движется прямолинейно с постоянной скоростью v, зерно пересыпается в кузов автомашины, движущейся рядом с комбайном. Масса автомашины без зерна M, радиус ее колес R, коэффициент трения качения δ. Масса зерна, загружаемого в кузов автомашины в течение одной секунды, m.

Определить крутящий момент на ведущих колесах автомашины как функцию расстояния s, пройденного автомашиной от положения, занимаемого ею в момент начала загрузки. Считать, что колеса автомашины катятся без скольжения, сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\mathcal{M}_{\text{кр}} = g\delta\left(M + \frac{m}{v}s\right)$.

17.23. Масса самолета, двигавшегося горизонтально с постоянной по величине скоростью $\mathbf{v}_0$, начиная с некоторого момента времени ($t = 0$) увеличивается вследствие обледенения по закону $M(t) = M_0 + \alpha t$, где $\alpha = \text{const} > 0$, M_0 — масса самолета при $t = 0$.

Получить дифференциальное уравнение движения самолета в вертикальном направлении, полагая, что горизонтальная составляющая полной аэродинамической силы в каждый момент времени уравновешена силой тяги двигателей, а вертикальная составляющая этой силы пропорциональна скорости самолета (коэффициент пропорциональности k). Движение самолета рассматривать в неподвижной декартовой системе координат Oxy, точка O которой совпадает с центром масс самолета при $t = 0$, ось Ox направлена в сторону скорости $\mathbf{v}_0$, а ось Oy — вниз.

Ответ: $\ddot{y} + \frac{\alpha}{M_0 + \alpha t}\dot{y} = g\left[1 - \frac{M_0^2}{(M + \alpha t)^2}\right]$.

17.24. Используя условия задачи 17.23, получить уравнения движения самолета, если его масса вследствие обледенения увеличивается по закону $M = M_0 e^{\alpha t}$, где $\alpha = \text{const} > 0$, M_0 — масса самолета в момент начала обледенения ($t = 0$). Скорость самолета при $t = 0$ равна v_0.

Ответ: $x = \frac{v_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$, $y = \frac{g}{\alpha}\left[t - \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\right] - \frac{k v_0}{2M_0\alpha^2} \times$
$\times\left[1 - e^{-\alpha t}\left(2 - e^{-\alpha t}\right)\right]$.

17.25. С цилиндрической катушки, которая скатывается по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, сматывается бумажная лента. Конец ленты прикреплён к плоскости. В момент начала движения масса катушки с накрученной на нее лентой M, их общий момент инерции относительно оси катушки $J = M\rho^2$, где ρ — радиус инерции, наружный радиус катушки с лентой равен R. Погонная масса ленты μ.

Определить ускорение точки на оси катушки и натяжение ленты при $t = 0$, если в этот момент времени центру масс катушки была сообщена скорость $\mathbf{v}$ в направлении линии наибольшего ската наклонной плоскости.

Ответ: $a(0) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho^2}{R^2}\right)}\left(g\sin\alpha + \frac{2\mu}{M}v^2\right)$, $S(0) = \frac{1}{(R^2 + \rho^2)} \times$
$\times\left[M\rho^2 g\sin\alpha - \mu\left(R^2 - \rho^2\right)v^2\right]$.

Глава 18

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Пусть имеется механическая система со стационарными, голономными, двусторонними связями, обладающая k степенями свободы. Ее кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} A_{ij}(q_1, \ldots, q_k)\, \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где q_i — обобщенные координаты системы ($i = 1, 2, \ldots, k$).

Уравнения движения такой системы в форме Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

где Q_j — обобщенные силы системы, являющиеся в общем случае функциями обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени. Произведя соответствующие дифференцирования функции T и разрешив эти уравнения относительно $\ddot{q}_j$, получим уравнения движения в виде

$$\ddot{q}_j = R_j(q, \dot{q}, t).$$

После подстановки $\dot{q}_j = p_j$, где p_j — новые переменные, получается система уравнений первого порядка

$$\dot{q}_j = p_j, \qquad \dot{p}_j = R_j(t, q, p).$$

К аналогичной системе уравнений можно прийти и для механической системы с нестационарными связями.

Таким образом, уравнения движения большого класса механических (а также электромеханических) систем могут быть представлены в виде

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (s = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где аргументы $y_1, \ldots, y_n$ с математической точки зрения совершенно равноправны.

Предположим, что изучается некоторое конкретное движение механической системы, описываемое решением системы (1)

$$y_s^* = f_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n),$$

соответствующим заданным начальным условиям

$$y_s^*\big|_{t=t_0} = f_s(t_0).$$

Оно может быть, в частности, *состоянием равновесия* (*кратко — равновесием*)

$$q_j = a_j = \text{const}, \quad \dot{q}_j = 0.$$

Это движение, интересующее исследователя в условиях поставленной задачи, принято называть *невозмущенным движением*, а все другие движения, которые может совершать система, называются возмущенными. Любое возмущенное движение системы будем обозначать $y_s(t)$.

Невозмущенное движение системы называется *устойчивым* (по Ляпунову)*), если по любому заданному числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что выполнение неравенств

$$|y_s(t_0) - f_s(t_0)| < \delta \tag{2}$$

обеспечивает выполнение неравенств

$$|y_s(t) - f_s(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Если, кроме того, выполняются соотношения

$$\lim_{t\to\infty} | y_s(t) - f_s(t) | = 0,$$

то невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым.*

Невозмущенное движение называется *неустойчивым*, если условие (3) нарушается хотя бы для одного возмущенного движения, сколь бы малым ни выбиралось для него число δ.

Разности $y_s(t) - f_s(t)$ называются *отклонениями.* Обозначим

$$y_s(t) - f_s(t) \doteq x_s(t).$$

Если в уравнениях (1) произвести замену зависимых переменных с помощью соотношений

$$y_s = x_s + f_s(t),$$

то получатся уравнения вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{4}$$

которые называются *уравнениями возмущенного движения.* При этом невозмущенному движению соответствует нулевое решение

---

*) Все определения, приводимые далее, даются в нестрогом изложении. С более точными формулировками необходимо познакомиться в систематических руководствах по теории устойчивости:

Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения.— М.: Наука, 1971; 2-е изд., 1976.

Кузьмин П. А. Малые колебания и устойчивость движения.— М.: Наука, 1973.

Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.— М. Изд-во АН СССР, 1962.

системы (4). В случае, когда в качестве невозмущенного движения взято состояние равновесия, и принято, что в положении равновесия все $q_s = 0$, уравнения возмущенного движения совпадают с исходными уравнениями движения системы.

Устойчивость состояния равновесия консервативной системы можно исследовать без составления уравнений движения. Для этого достаточно записать выражение для потенциальной энергии системы в возмущенном движении и потребовать выполнения условий ее минимума в исследуемом положении равновесия (критерий Лагранжа). Неустойчивость устанавливается с помощью теорем Четаева (см. библиографические ссылки на стр. 268).

Если уравнения возмущенного движения являются линейными с постоянными коэффициентами, т. е. имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n \qquad (a_{sl} = \text{const}, \ l = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

то об устойчивости невозмущенного движения можно судить по корням характеристического уравнения системы (5), которое имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \mu & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Если действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, то нулевое решение системы (5) устойчиво асимптотически. Представив характеристическое уравнение в виде

$$A_0\mu^n + A_1\mu^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\mu + A_n = 0, \tag{6}$$

составляют следующую матрицу размерности $n \times n$:

$$H - \begin{Vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & \ldots & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 & \ldots & 0 \\ 0 & A_1 & A_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_n \end{Vmatrix}.$$

Для того чтобы все корни уравнения (6) имели отрицательную вещественную часть, необходимо и достаточно, чтобы все миноры этой матрицы, расположенные по ее главной диагонали, были положительны (критерий Гурвица), т. е. чтобы выполнялись неравенства

$$\Delta_1 - A_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix} > 0, \ldots, \det H > 0.$$

Если система (4) является нелинейной, то, полагая отклонения x_s малыми, в ней выделяют линейную часть. Полученные таким образом линеаризованные уравнения называют уравнениями первого приближения. По ним можно в ряде случаев судить об устойчивости нулевого решения исходной нелинейной системы (4). Если по каким-либо соображениям исследования одних лишь уравнений первого приближения недостаточно для суждения об устойчивости системы, то применяется метод функций Ляпунова (см. источники, указанные в сноске на стр. 268).

Для механических систем, находящихся под действием только потенциальных и диссипативных сил, в качестве функции Ляпунова может быть принята полная механическая энергия в возмущенном движении и использовано известное соотношение $\frac{d(T+\Pi)}{dt} = -2R$, где R — диссипативная функция.

Для получения условий асимптотической устойчивости при знакопостоянной функции dV/dt часто оказывается полезной теорема Барбашина и Красовского.

Если на систему, кроме потенциальных и диссипативных, действуют гироскопические силы, то для суждения об ее устойчивости можно воспользоваться известными теоремами Томсона и Тэта (см. книгу Д. Р. Меркина «Введение в теорию устойчивости движения»).

§ 1. Устойчивость равновесия механических систем

18.1. Составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы около положения равновесия под действием потенциальных сил при отсутствии сопротивления.

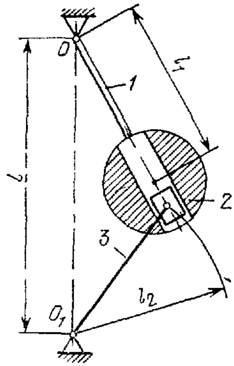
Предполагая, что потенциальная энергия системы в положении равновесия имеет минимум, доказать устойчивость ее равновесия путем непосредственной оценки общего решения системы уравнений возмущенного движения.

18.2. Математический маятник *1* вибрографа соединен посредством кулисы *2* со стержнем *3*, который может вращаться на оси O_1. Длина маятника l_1, его масса m_1, длина стержня l_2, его масса m_2; $O_1O = L$.

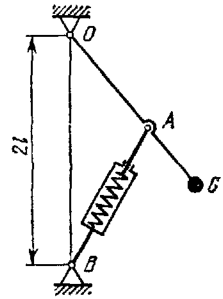
Установить условие устойчивости равновесия маятника в нижнем вертикальном положении. Массой ползуна пренебречь.

Ответ: $\frac{m_1}{m_2} > \frac{(L-l_2)^2}{2l_1l_2}$.

18.3. Для ослабления зависимости периода колебаний математического маятника от его амплитуды при больших ее значениях может быть использовано пружинное устройство, показанное на рисунке. Когда маятник находится в нижнем вертикальном положении, пружина сжата и ее деформация равна λ_0.



К задаче 18.2.



К задаче 18.3.

Установить условие устойчивости равновесия маятника в этом положении, если его масса m, жесткость пружины c, $OA = l$, $OC = L$, $OB = 2l$.

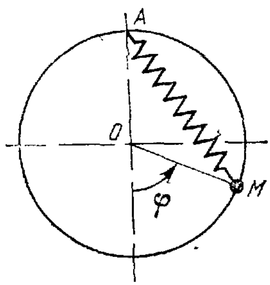
Ответ: $mgL > 2c\lambda_0 l$.

18.4. Груз M может двигаться в вертикальной плоскости по окружности радиуса R. С грузом соединена пружина жесткости c, противоположный конец которой укреплен в верхней точке окружности A. Длина недеформированной пружины l_0.

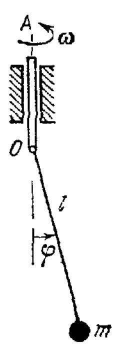
Найти все положения равновесия груза и исследовать устойчивость равновесий, если $l_0 < 2R$, сила тяжести груза P.

Ответ: возможны положения равновесия $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_{2,3} = \pm 2 \arccos \frac{cl_0}{2(cR-P)}$ (при $cl_0 < 2|cR-P|$). В положении φ_1 равновесие устойчиво при $cl_0 > 2(cR-P)$, в положениях φ_2 и φ_3 равновесия устойчивы при $2(cR-P) > cl_0$ и неустойчивы при $2(P-cR) > cl_0$.

18.5. Математический маятник длины l соединен цилиндрическим шарниром с вертикальным стержнем OA, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси.



К задаче 18.4.



К задаче 18.5.

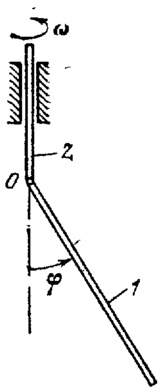
Найти все положения равновесия маятника относительно системы отсчета, вращающейся вместе со стержнем OA, и исследовать устойчивость равновесий.

Ответ: при $l\omega^2 \leqslant g$ возможны положения равновесия $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$. В положении φ_1 равновесие устойчиво, в положении φ_2 неустойчиво. При $l\omega^2 > g$ возможны положения равновесия $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_{3,4} = \pm \arccos \frac{g}{l\omega^2}$. В положениях φ_1 и φ_2 равновесия неустойчивы, а в положениях φ_3 и φ_4 устойчивы.

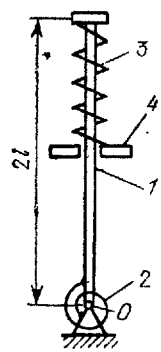
18.6. Однородный тяжелый стержень *1* длины l соединен цилиндрическим шарниром с вертикальным стержнем *2*, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси.

Найти все положения равновесия стержня относительно системы отсчета, вращающейся вместе со стержнем *2*, и исследовать устойчивость равновесий.

Ответ: при $2l\omega^2 \leqslant 3g$ возможны положения равновесия $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$. В положении φ_1 равновесие устойчиво, в положении φ_2 неустойчиво. При $2l\omega^2 > 3g$ возможны положения равновесия $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_{3,4} = \pm \arccos \frac{3g}{2l\omega^2}$. В положениях φ_1 и φ_2 равновесия неустойчивы, а в положениях φ_3 и φ_4 устойчивы.



К задаче 18.6.



К задаче 18.7.

18.7. Однородный стержень *1* массы m_1 и длины $2l$ может вращаться в вертикальной плоскости вокруг цилиндрического шарнира O, с которым он связан спиральной пружиной *2* жесткости c. К противоположному концу стержня с помощью пружины *3* подвешен груз *4* массы m_2. При равновесии в верхнем вертикальном положении стержня груз находится на расстоянии l от его концов. Пружина *2* при этом не напряжена.

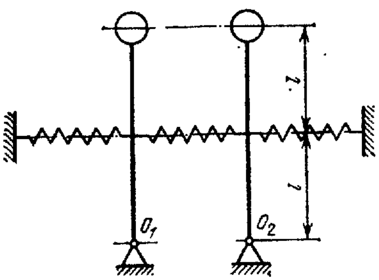
Найти условие устойчивости равновесия системы в этом положении.

Ответ: $c > g(m_1 + m_2)l$.

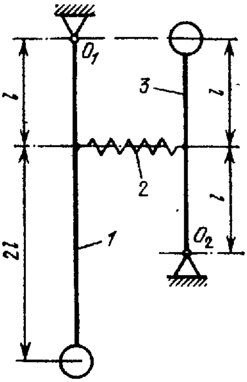
18.8. Два одинаковых математических маятника массы m и длины $2l$ каждый связаны между собой и с неподвижными опорами тремя одинаковыми горизонтальными пружинами. При вертикальном положении маятников пружины не напряжены.

Определить, при каком значении коэффициента жесткости c каждой пружины равновесие при верхнем вертикальном положении маятников будет устойчивым.

Ответ: $c > 2mg/l$.



К задаче 18.8.



К задаче 18.9.

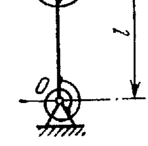
18.9. Математический маятник 1 массы m и длины $3l$ связан горизонтальной пружиной 2 с математическим маятником 3 массы m и длины $2l$. Пружина не напряжена при показанном на рисунке вертикальном положении маятников.

Определить, при каком значении коэффициента жесткости пружины c равновесие в этом положении будет устойчивым.

Ответ: $c > 6mg/l$.

18.10. Два математических маятника длины l каждый несут на концах грузы с одинаковой массой m. Маятники соединены шарниром в точке A и удерживаются в верхнем вертикальном положении двумя одинаковыми спиральными пружинами.

Определить, при каких значениях коэффициента жесткости каждой пружины c равновесие системы в указанном положении будет устойчивым.



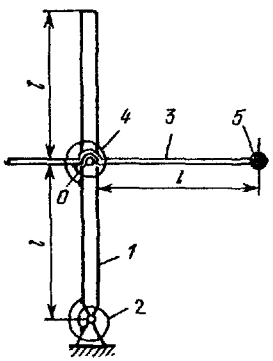
К задаче 18.10.

Ответ: $c > (1 + \sqrt{2})mgl$.

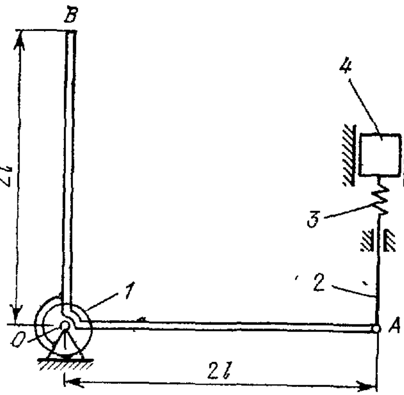
18.11. Однородный брус 1 массы m_1 удерживается в вертикальном положении равновесия пружиной 2 жесткости c. Стержень 3 может вращаться вокруг точки O и удерживается в горизонтальном положении пружиной 4. На конце стержня находится груз 5 массы m_2.

Найти условие устойчивости равновесия системы в указанном положении. Массой стержня *3* пренебречь.

Ответ: $c > (m_1 + m_2)g \cdot l$.



К задаче 18.11.



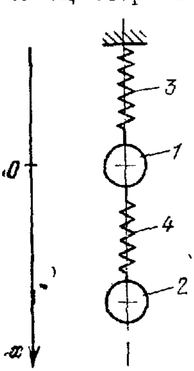
К задаче 18.12.

18.12. Два однородных стержня OA и OB массы m и длины $2l$ каждый, жестко соединенные между собой под прямым углом, удерживаются пружиной *1* жесткости c в положении равновесия, при котором стержень OA горизонтален. На правый конец стержня OA через невесомый стержень *2* и пружину *3* опирается груз *4*, который может перемещаться в вертикальных направляющих.

Найти условие устойчивости равновесия системы в указанном положении.

Ответ: $c > mgl$.

18.13. Два тела *1* и *2*, подвешенные на пружинах *3* и *4*, могут перемещаться только параллельно вертикальной оси Ox. Характеристика пружины *3* является нелинейной, сила упругости ее определяется соотношением $F_x = f(x)$, где F_x — проекция силы на ось Ox, x — координата груза *1*, отсчитываемая от положения, в котором пружина не деформирована. Пружина *4* имеет линейную характеристику, жесткость этой пружины c.



К задаче 18.13.

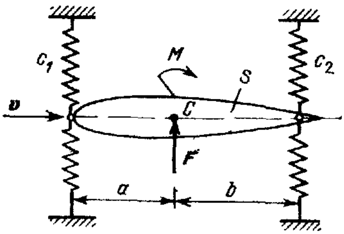
Предполагая, что в положении равновесия $df/dx > 0$, доказать устойчивость равновесия системы.

Указание. Исследовать свойства функции Ляпунова, в качестве которой принять полную механическую энергию системы в ее возмущенном движении.

18.14. В задаче 12.4 найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость равновесий двумя способами: а) с помощью критерия Лагранжа; б) с помощью прямого метода Ляпунова.

Ответ: возможны положения равновесия $\varphi_1 = \pi/6$ и $\varphi_2 = 5\pi/6$. В положении φ_1 равновесие устойчиво, в положении φ_2 неустойчиво.

18.15. Крыло самолета при испытаниях в аэродинамической трубе укрепляется с помощью специального упругого подвеса. Вектор скорости потока воздуха $\mathbf{v}$ имеет постоянную величину и направлен параллельно продольной оси нормального сечения S крыла. Предполагается, что движением крыла в направлении потока можно пренебречь. Кроме того, движение крыла считается плоским и аэродинамические силы приводятся в центре масс C к вертикальной силе $F = k\varphi$ и паре сил с моментом $M = n\varphi$ (k и n — постоянные, зависящие от v; φ — угол поворота продольной оси сечения, отсчитываемый от направления потока в направлении действия пары). Масса крыла m, его момент инерции относительно горизонтальной поперечной оси, проходящей через точку C, равен I.



К задаче 18.15.

Найти условия устойчивости равновесия крыла, считая отклонения малыми. Коэффициенты жесткости элементов подвеса указаны на рисунке.

Ответ: $0 \leqslant 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \leqslant (a_{11} + a_{22})^2$, где $a_{11} = (c_1 + c_2)/m$, $a_{12} = (ac_1 - bc_2 - k)/m$, $a_{21} = (ac_1 - bc_2)/I$, $a_{22} = (a^2c_1 + b^2c_2 - n)/I$.

§ 2. Асимптотическая устойчивость невозмущенных движений

18.16. На механическую систему с одной степенью свободы действуют потенциальные силы и силы сопротивления, пропорциональные первой степени обобщенной скорости.

Предполагая, что потенциальная энергия системы в положении равновесия имеет минимум, доказать асимптотическую устойчивость ее равновесия путем оценки общего решения системы уравнений возмущенного движения.

Доказать также, что если к рассматриваемой системе приложить силы, являющиеся непрерывными функциями времени, то вынужденное движение системы будет асимптотически устойчивым.

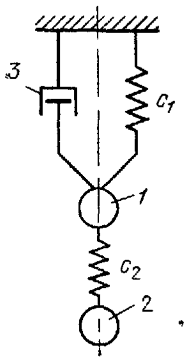
18.17. Математический маятник может колебаться в вертикальной плоскости в некоторой среде. При этом на тяжелую точку действует сила сопротивления $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — скорость этой точки.

Доказать асимптотическую устойчивость равновесия маятника в нижнем вертикальном положении путем исследования свойств функции Ляпунова, в качестве которой принять полную механическую энергию маятника в возмущенном движении. Малость начальных отклонений не предполагается.

18.18. Физический маятник массы m с горизонтальной осью подвеса может колебаться в среде, создающей момент сопротивления $\mathbf{M} = -n\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость маятника, $n = \text{const} > 0$. Центр масс маятника расположен на расстоянии l от оси подвеса, момент инерции маятника относительно этой оси равен I. В плоскости, перпендикулярной оси подвеса, к маятнику приложена пара сил с постоянным моментом $L (L < mgl)$.

Найти положения равновесия маятника и исследовать устойчивость равновесий.

Ответ: возможны положения равновесия $\varphi_1 = \arcsin \frac{L}{mgl}$ и $\varphi_2 = \pi - \arcsin \frac{L}{mgl}$. В положении φ_1 равновесие асимптотически устойчиво, в положении φ_2 — неустойчиво.



К задаче 18.19.

18.19. Два тела *1* и *2*, массы которых m_1 и m_2 соответственно, подвешены на двух пружинах, как показано на рисунке. Жесткости пружин c_1 и c_2. К телу *1* присоединен демпфер *3*, создающий силу сопротивления $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$ ($\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}$ — скорость тела *1*).

Проверить асимптотическую устойчивость равновесия системы, предполагая, что ее возмущенные движения могут происходить только в вертикальном направлении.

18.20. Демпфер в системе задачи 18.19 создает нелинейную силу сопротивления $\mathbf{R} = -f(v)\mathbf{v}/v$ ($\mathbf{v}$ — скорость тела *1*, $f(0) = 0$).

Найти условие устойчивости равновесия системы путем исследования свойств функции Ляпунова, в качестве которой принять полную механическую энергию системы в возмущенном движении.

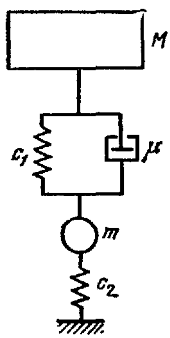
Ответ: $f(v)/v > 0$ при $v \neq 0$.

18.21. На рисунке изображена схема, служащая в некоторых случаях для исследования малых свободных вертикальных колебаний передней и задней частей автомобиля. Масса M эквивалентна массе исследуемой подрессоренной части, m — масса оси и двух колес, величины c_1 и μ характеризуют упругие и демпфирующие свойства передней или задней подвески, пружина жесткости c_2 имитирует упругие свойства шин. Предполагается, что демпфирующая сила пропорциональна относительной скорости перемещения тел с массами M и m (коэффициент пропорциональности равен μ).

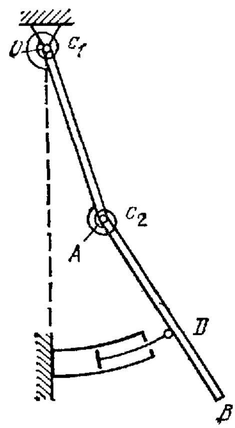
Исследовать устойчивость равновесия системы.

Ответ: равновесие системы асимптотически устойчиво.

18.22. Два однородных стержня массы m и длины $2l$ каждый подвешены как показано на рисунке. Жесткости спиральных пружин равны c_1 и c_2. При нижнем вертикальном положении стержней пружины не напряжены. К точке D стержня AB присоединен демпфер, создающий силу сопротивления $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}_D$, где $\mu = \mathrm{const} > 0$, $\mathbf{v}_D$ — скорость точки D.



К задаче 18.21.



К задаче 18.22.

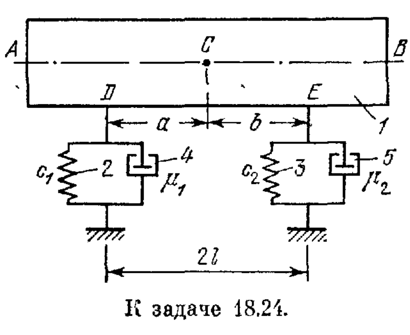
Доказать, что равновесие в нижнем вертикальном положении стержней будет асимптотически устойчивым при любых начальных отклонениях независимо от расположения точки D на стержне AB.

18.23. В задаче 12.4 учесть трение качения на валу ротора, предполагая, что момент трения $\mathbf{M} = -n\omega$, где ω — угловая скорость ротора, $n = \mathrm{const} > 0$.

Принимая поочередно за невозмущенные движения системы ее равновесия в положениях $\varphi_1 = \pi/6$ и $\varphi_2 = 5\pi/6$, составить уравнения возмущенных движений. Исследовать устойчивость равновесий в этих положениях с помощью функции Ляпунова, представляющей собой полную механическую энергию системы в возмущенном движении.

Ответ: равновесие при $\varphi = \varphi_1$ асимптотически устойчиво, при $\varphi = \varphi_2$ неустойчиво.

18.24. На рисунке изображена схема, служащая для исследования малых свободных колебаний наземных экипажей (автомобиль, трактор, железнодорожный вагон) в вертикальной



К задаче 18.24.

продольной плоскости. К телу *1* массы M присоединены пружины *2*, *3* и демпферы *4*, *5*. В положении равновесия тело *1* располагается так, что его продольная ось AB горизонтальна. В возмущенном движении демпферы создают силы вязкого трения $\mathbf{R}_4 = -\mu_1 \mathbf{v}_D$ и $\mathbf{R}_5 = -\mu_2 \mathbf{v}_E$, где $\mathbf{v}_D$ и $\mathbf{v}_E$ — скорости точек D и E, μ_1 и μ_2 — положительные постоянные. Момент инерции тела относительно горизонтальной поперечной оси, проходящей через его центр масс C, равен I.

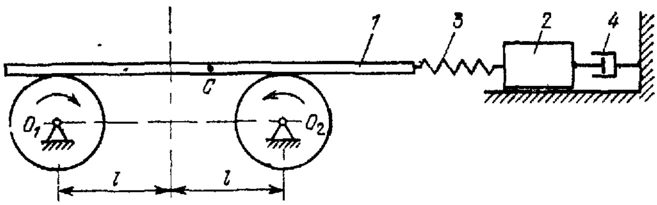
Исследовать устойчивость равновесия системы.

Ответ: равновесие системы асимптотически устойчиво.

18.25. Исследовать устойчивость равновесия стойки расточного станка, описанной в задаче 12.24, приняв в качестве функции Ляпунова полную механическую энергию системы в возмущенном движении.

Ответ: равновесие асимптотически устойчиво «в малом» при $c_2 > mgl$.

18.26. Однородный стержень *1* массы m положен на два цилиндрических шкива, имеющих одинаковые радиусы. Шкивы вращаются в противоположных направлениях вокруг параллельных горизонтальных осей, их центры O_1 и O_2 находятся на горизонтальной прямой. Коэффициент трения скольжения между стержнем и шкивами f^*. Стержень соединен горизонтальной пружиной *3*, коэффициент жесткости которой c, с ползуном *2* массы m_2,



К задаче 18.26.

находящимся на гладкой горизонтальной плоскости. При движении ползуна *2* демпфер *4* создает нелинейную силу сопротивления $\mathbf{R} = -f(v_2)\mathbf{e}$, где v_2 — скорость ползуна, $\mathbf{e} = \mathbf{v}_2/v_2$ — единичный вектор, $f(0) = 0$, $f(v_2)/v_2 > 0$ при $v_2 \neq 0$. В положении равновесия системы центр масс стержня C находится на середине расстояния O_1O_2, а пружина не деформирована.

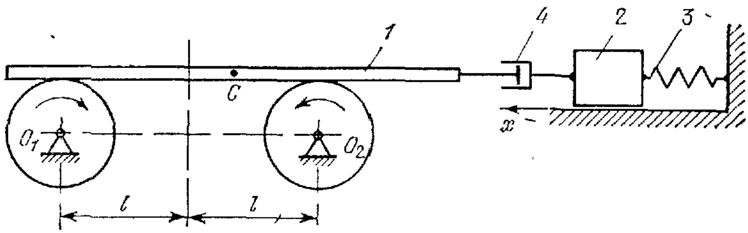
Исследовать устойчивость равновесия системы.

Ответ: равновесие системы асимптотически устойчиво.

18.27. Стержень *1* массы m_1, положенный на шкивы, описанные в задаче 18.26, соединен демпфером *4* с ползуном *2* массы m_2, находящимся на гладкой горизонтальной плоскости. Ползун прикреплен пружиной *3*, ось которой горизонтальна, к неподвижной опоре. Демпфер создает силу сопротивления $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}_r$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\mathbf{v}_r$ — скорость стержня *1* по отношению к ползуну *2*. Сила упругости $\mathbf{F}$ пружины *3* определяется нелинейной зависимостью $F_x = f(x)$, где F_x — проекция силы $\mathbf{F}$ на ось x, а x — координата ползуна, отсчитываемая от положения, в котором пружина не деформирована; $f(0) = 0$, при $x \neq 0$ $f(x)/x > 0$. В положении равновесия системы центр тяжести стержня C находится на середине расстояния O_1O_2, а пружина не деформирована.

Исследовать устойчивость равновесия системы.

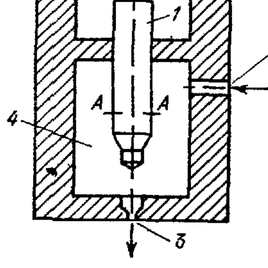
Ответ: равновесие системы асимптотически устойчиво при $f(x) \not\equiv \frac{m_2 g f^*}{l} x$ и устойчиво при $f(x) \equiv \frac{m_2 g f^*}{l} x$.



К задаче 18.27.

18.28. На рисунке изображена схема форсунки двигателя Дизеля. Игла *1* массы m, подвешенная на пружине *2* жесткости c, в состоянии равновесия находится в крайнем нижнем положении и перекрывает отверстие *3*, ведущее к цилиндру. Камера *4* при этом заполнена топливом. При подаче насосом дополнительного количества топлива через отверстие *5* давление в камере увеличивается, игла поднимается вверх и происходит подача топлива в цилиндр. Давление в камере падает и игла снова перекрывает отверстие *3*.

За невозмущенное движение системы принимается состояние, при котором за один цикл подачи среднее отклонение иглы от ее равновесного положения имеет некоторое определенное значение x_0, а среднее давление в камере — значение p_0. При наличии возмущений возникают отклонения x и p соответствующих параметров от величин x_0 и p_0. Уравнение возмущенного движения иглы имеет вид



К задаче 18.28.

$$m\ddot{x} + n\dot{x} + cx = pS,$$

где $n = \text{const} > 0$, S — площадь сечения $A - A$.

Уравнение, описывающее процесс изменения давления p, в простейшем случае можно представить так:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{E}{\tau}(kx + b\dot{x}),$$

где E — модуль объемного сжатия топлива, τ — объем камеры, k и b — положительные постоянные, положительное направление отсчета x — вверх.

Исследовать устойчивость невозмущенного движения системы.

Ответ: при $n(c\tau + bSE) > mkSE$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

18.29. Записать уравнения возмущенного движения системы, описанной в задаче 18.28, в нормальной форме, вводя обозначения $\dot{x} = y$, $\dot{y} = z$. Построить функцию Ляпунова, производная которой по времени в силу системы уравнений в нормальной форме имеет вид

$$\dot{V} = -\frac{1}{m^2}(ABx^2 + 2mAxz + mnz^2),$$

где $A = \frac{kSE}{\tau}$, $B = c + \frac{bSE}{\tau}$.

Получить условия устойчивости невозмущенного движения системы из задачи 18.28 путем анализа свойств функций V и $\dot{V}$.

Ответ: $V = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{B}{m}x + \frac{n}{m}y + z\right)^2 + \frac{An}{m^2}x^2 + \frac{B}{m}y^2 + z^2\right]$.

18.30. В уточненной модели системы из задачи 18.28 процесс изменения величины давления p описывается уравнением

$$\frac{dp}{dt} = -f(x) - h\dot{x},$$

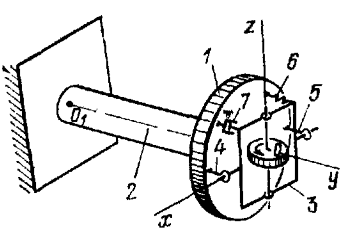
где $h = \text{const} > 0$, $f(x)$ — некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$, $f(x)/x > 0$ при $x \neq 0$.

Найти условие устойчивости невозмущенного движения системы путем построения функции Ляпунова, модифицирующей функцию V из задачи 18.29.

Ответ: $n(c + hS) > mSf(x)/x$ $(x \neq 0)$.

18.31. Найти условие устойчивости вертикального положения равновесия оси ротора в задаче 12.43.

Ответ: $C^2\omega^2 \geqslant 2mgl(A + ml^2)$.



К задаче 18.32.

18.32. Тело 1 может совершать крутильные колебания на упругом валу 2. Для гашения этих колебаний применен гироскоп, подвешенный на теле с помощью рамки 3, которая крепится к телу стержнями 4 и 5. Кроме того, рамка соединена с телом пружиной 6 и демпфером 7. Гироскоп вращается относительно рамки с постоянной угловой скоростью ω. При колебаниях тела вокруг оси O_1Y рамка с гироскопом колеблется относительно тела, при этом демпфер гасит те и другие колебания.

Момент инерции тела относительно оси O_1y равен I_0. Центр масс ротора гироскопа O расположен на оси O_1y. Оси Ox, Oy, Oz являются главными центральными осями инерции ротора, его полярный и экваториальный моменты инерции равны C и A соответственно.

В равновесном состоянии вал *2* не закручен, пружина *6* не деформирована. Жесткость вала на кручение равна c. Момент, развиваемый пружиной при отклонении рамки от равновесного положения, $M_{\text{пр}} = k|\alpha|$, где α — угол поворота рамки вокруг оси Ox, $k = \text{const} > 0$. Момент силы сопротивления демпфера $M_{\text{д}} = n|\dot{\alpha}|$ $(n = \text{const} > 0)$.

Доказать, что невозмущенное состояние системы асимптотически устойчиво по первому приближению. Массой рамки пренебречь.

18.33. С помощью теорем о влиянии структуры сил на устойчивость движения (см. сноску на стр. 268) доказать, что вертикальное положение центрифуги в задаче 12.44 является асимптотически устойчивым при $8ca^2 > 3Mgl$.

18.34. Тяжелая однородная сфера радиуса r, погруженная наполовину в покоящуюся жидкость, совершает поступательное прямолинейное равномерное движение в горизонтальном направлении. Сила тяжести сферы уравновешена при этом выталкивающей силой жидкости. Поверхность жидкости плоская.

В некоторый момент времени на сферу действуют в вертикальном направлении мгновенные возмущающие силы, такие, что отклонение ее центра от поверхности жидкости по вертикали не превосходит r, а возмущенное движение является поступательным. Сила сопротивления жидкости $\mathbf{R} = -f(v)\mathbf{v}/v$, где $\mathbf{v}$ — скорость сферы, $f(0) = 0$, $f(v)/v > 0$ при $v \neq 0$.

Доказать асимптотическую устойчивость невозмущенного движения сферы.

18.35. Тяжелая однородная сфера, погруженная в покоящуюся жидкость, совершает поступательное равномерное прямолинейное движение, при котором центр сферы остается в одной горизонтальной плоскости.

Доказать асимптотическую устойчивость этого движения, предполагая, что любое возмущенное движение сферы может быть только вращением вокруг ее центра. Момент сил сопротивления жидкости относительно центра сферы при этом $\mathbf{M} = -f(\omega)\boldsymbol{\omega}/\omega$, где $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость сферы, $f(0) = 0$, $f(\omega)/\omega > 0$ при $\omega \neq 0$.

18.36. При отклонении корабля от заданного поступательного прямолинейного движения рулевой отклоняет руль AB на некоторый угол β с целью устранения возникающих возмущений.

В первом приближении можно принять, что $\beta = -k\Delta\theta$ ($k = \mathrm{const}$) и что возмущенное движение судна описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\Delta\alpha}{dt} + a_1\Delta\alpha + a_2\frac{d\Delta\theta}{dt} = a_3\beta,$$

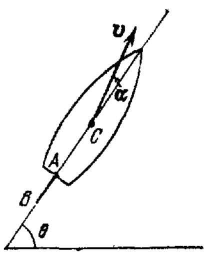
$$\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} + b_1\frac{d\Delta\theta}{dt} + b_2\Delta\alpha = b_3\beta,$$

где $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ — отклонения углов α и θ, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — некоторые постоянные.

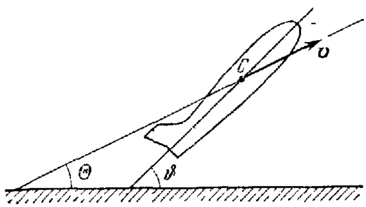
Найти условие, которому должен удовлетворять коэффициент k, чтобы поступательное прямолинейное движение корабля было асимптотически устойчивым.

Ответ: $k > \dfrac{(a_1 + b_1)(a_2b_2 - a_1b_1)}{b_1b_3 + a_3b_2}$.

18.37. При изучении движения самолета в вертикальной плоскости в качестве невозмущенного движения иногда принимается поступательное движение по прямой, составляющей с горизонтом



К задаче 18.36.



К задаче 18.37.

некоторый угол Θ. Положение продольной оси самолета определяется углом ϑ ее наклона к горизонту.

При некоторых дополнительных упрощающих предположениях уравнения возмущенного движения самолета имеют вид

$$\frac{d\Delta\Theta}{dt} + a_1(\Delta\vartheta - \Delta\Theta) + a_2\Delta\Theta = 0,$$

$$\frac{d^2\Delta\Theta}{dt^2} + b_1\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + b_2(\Delta\vartheta + \Delta\Theta) = b_3\Delta\vartheta,$$

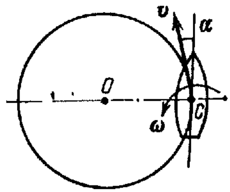
где $\Delta\Theta$ и $\Delta\vartheta$ — отклонения указанных углов, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 — постоянные.

Найти условия асимптотической устойчивости невозмущенного движения самолета в этом простейшем случае.

Ответ: $a + b_1 > 0$, $a_2b_2 + ab_3 > 0$, $(a + b_1)(ab_1 + b_2 + b_3) > a_2b_2 + ab_3$, где $a = a_2 - a_1$.

18.38. На рисунке изображена схема движения корабля, совершающего циркуляцию. Центр тяжести корабля C описывает при этом окружность в горизонтальной плоскости со скоростью v, а корпус корабля поворачивается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. В некоторый момент времени величины v, ω и α получают малые отклонения. Линеаризованные уравнения возникшего возмущенного движения могут быть приведены к виду

$$\frac{d\Delta v}{dt} = a_{11}\Delta v + a_{12}\Delta\omega + a_{13}\Delta\alpha,$$
$$\frac{d\Delta\omega}{dt} = a_{21}\Delta v + a_{22}\Delta\omega + a_{23}\Delta\alpha, \qquad (*)$$
$$\frac{d\Delta\alpha}{dt} = a_{31}\Delta v + a_{32}\Delta\omega + a_{33}\Delta\alpha,$$



К задаче 18.38.

где Δv, $\Delta\omega$, $\Delta\alpha$ — отклонения в произвольный момент времени, a_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$) — некоторые постоянные.

Написать матричное уравнение для функции Ляпунова V, производная которой по времени в силу системы (*) имеет вид $\dot V = -[c_1(\Delta v)^2 + c_2(\Delta\omega)^2 + c_3(\Delta\alpha)^2]$ (c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные).

Ответ: функция V имеет вид $V = x^{\mathrm{T}}Bx$, где $x = \begin{Vmatrix} \Delta v \\ \Delta\omega \\ \Delta\alpha \end{Vmatrix}$, $B = \|b_{ij}\|$ ($b_{ij} = \mathrm{const}$, т — знак транспонирования), причем $A^{\mathrm{T}}B + BA = C$, где $A = \|a_{ij}\|$, $C = \|c_{ij}\|$ ($c_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $c_{ii} = -c_i$; $i, j = 1, 2, 3$).

Глава 19

ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА

В настоящей главе рассматриваются механические системы, движение которых в существенной мере определяется силами электромагнитной природы.

Сила, действующая на заряженную материальную точку, движущуюся в электромагнитном поле, зависит от заряда q, скорости $\mathbf{v}$ точки, напряженности $\mathbf{E}$ электрического и индукции $\mathbf{B}$ магнитного полей. При положительном заряде

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Если поле создается точечным зарядом Q, то его напряженность E определяется законом Кулона

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды (для вакуума $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл/(Н · м²), для воздуха $\varepsilon \approx \varepsilon_0$).

Электрические поля точечных зарядов являются сферически симметричными и удовлетворяют принципу суперпозиции: напряженность поля, создаваемого несколькими зарядами, равна геометрической сумме напряженностей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.

Электрическое поле между двумя заряженными параллельными пластинами является однородным, т. е. напряженность в любой точке между пластинами равна

$$E = U/d,$$

где U — разность потенциалов, d — расстояние между пластинами.

Основными элементами электромеханических систем являются проводники с током, движущиеся в электромагнитном поле. Сила, действующая на проводник с током I в магнитном поле, определяется законом Ампера. При равномерном поле ($\mathbf{B} = \mathrm{const}$)

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I} \times \mathbf{B})l.$$

Направление силы $\mathbf{F}$ определяется по правилу левой руки.

Ток I, протекающий в проводнике, в свою очередь зависит от цепи и определяется вторым законом Кирхгофа: алгебраическая сумма всех ЭДС контура равна сумме падений напряжений на всех сопротивлениях цепи. Для цепи, содержащей индуктивность L, активное сопротивление R и емкость C, закон Кирхгофа имеет дифференциальную форму

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = \sum_k E_k.$$

В системах магнитоэлектрического типа в последнем уравнении важную роль играет ЭДС индукции. В частном случае, когда проводник длины l перемещается в равномерном магнитном поле перпендикулярно вектору индукции $\mathbf{B}$, наведенная ЭДС индукции определяется по формуле

$$E_{\text{инд}} = Blv.$$

Направление наведенной ЭДС определяется по правилу правой руки.

§ 1. Динамика материальной точки в электромагнитном поле

19.1. Латунная монета, двигаясь по вертикали под действием силы тяжести, пролетает между полюсами электромагнита счетного устройства. Скорости монеты при входе в устройство и при выходе из него оказываются одинаковыми.

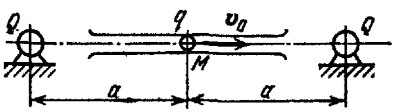
Насколько изменится температура монеты, если удельная теплоемкость латуни $c = 390$ Дж/(кг · К), а ширина полюсов $h = 4$ см.

Ответ: $\Delta t = 10^{-3}$ К.

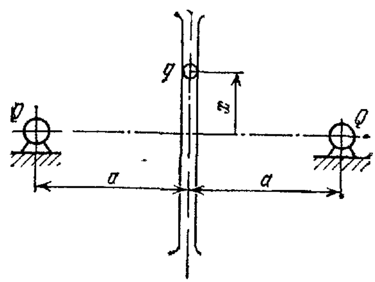
19.2. Материальная точка M массы m, имеющая заряд q, может двигаться в горизонтальной плоскости по прямой, соединяющей два закрепленных точечных заряда одинаковой величины Q. Все заряды имеют одинаковые знаки, расстояние между зарядами Q равно $2a$. В начальный момент времени точке M, находившейся посередине между зарядами, сообщили скорость v_0.

Пренебрегая трением, определить максимальное отклонение x_{max} точки от начального положения (диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon \approx \varepsilon_0$).

Ответ: $x_{max} = \dfrac{a}{\sqrt{1 + \dfrac{Qq}{\pi\varepsilon_0 m a v_0^2}}}$.



К задаче 19.2.



К задаче 19.3.

19.3. Материальная точка массы m, имеющая заряд q, может двигаться в горизонтальной плоскости по гладкой трубке, которая перпендикулярна прямой, соединяющей два закрепленных точечных заряда одинаковой величины Q. Расстояния между трубкой и зарядами равны a, знак заряда точки противоположен знаку зарядов Q.

В начальный момент времени точка имела отклонение от прямой, соединяющей заряды, $x_0 = a\sqrt{3}$ и начала двигаться без начальной скорости.

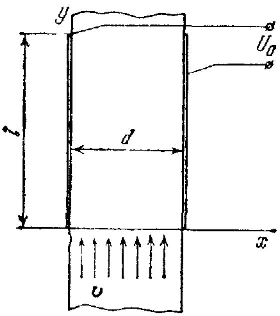
Определить максимальное значение скорости v_{max} точки при ее колебаниях (диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon \approx \varepsilon_0$).

Ответ: $v_{max} = v|_{x=0} = \sqrt{\dfrac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 m a}}$.

19.4. Математический маятник помещен в однородное электростатическое поле, вектор $\mathbf{E}$ напряженности которого направлен вертикально вверх. Длина маятника равна l, масса m, величина положительного электрического заряда груза q. Определить частоту ω_0 малых колебаний маятника, если $Eq < mg$.

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{l}\left(g - \dfrac{Eq}{m}\right)}$.

19.5. Электростатический фильтр смонтирован в вертикальной трубе прямоугольного поперечного сечения. Длина пластин фильтра равна l, расстояние и разность потенциалов между пластинами равны соответственно d и U_0. По трубе с постоянной скоростью u движется ламинарный поток воздуха, содержащий пылевые частицы одинаковой массы m и заряда q. Сила сопротивления движению частиц в воздухе $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}_r$ ($\mu = \mathrm{const}$, $\mathbf{v}_r$ — относительная скорость частицы). По всей длине фильтра вертикальные составляющие скорости частиц постоянны и имеют установившиеся значения $v_y^{\text{уст}} = u/2$, горизонтальные составляющие скорости при входе в фильтр равны нулю.



К задаче 19.5.

Полагая, что концентрация частиц в потоке невелика и поэтому взаимодействием их друг с другом можно пренебречь, определить, при каком напряжении U_0 все частицы будут достигать стенок фильтра, если $u = \sqrt{gl}$.

Указание. Установившаяся скорость $v^{\text{уст}}$ частицы определяется из условия $v^{\text{уст}} = v\big|_{t\to\infty}$.

Ответ: $U_0 \geqslant 1{,}325\, \dfrac{mgd^2}{ql}$.

19.6. Измерительный механизм статического вольтметра представляет собой плоский воздушный конденсатор, одна из пластин которого неподвижна, а другая имеет упругий подвес. При подаче напряжения подвижная пластина поворачивается вокруг горизонтальной оси O и приводит в движение стрелку индикатора. Длина каждой пластины равна l, ширина b, масса m, расстояние между пластинами d (при $U = 0$), коэффициент угловой жесткости упругого подвеса c.

Определить, на какой угол α повернется подвижная пластина измерительного механизма вольтметра при подаче напряжения U (диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon \approx \varepsilon_0$).

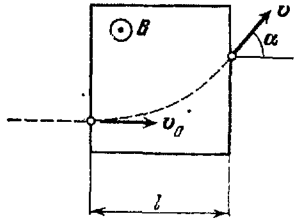
Указание. Полагая угол поворота α подвижной пластины малым ($\alpha l \ll d$), учесть в выражениях моментов величины до второго порядка малости относительно $\alpha l/d$.

Ответ: $\alpha = \dfrac{\varepsilon_0 b U^2}{c + 0{,}5mgl}\left(\dfrac{l}{d}\right)^2$.

19.7. Материальная точка массы m, имеющая электрический заряд q, пролетает между полюсами магнита, создающего постоянное однородное поле; вектор скорости точки в момент входа в магнитное поле расположен в горизонтальной плоскости и равен $\mathbf{v}_0$, вектор магнитной индукции поля $\mathbf{B}$ направлен по вертикали.

Определить угол α поворота горизонтальной проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ от первоначального направления, если ширина полюсов магнита равна l.

Ответ: $\alpha = \arcsin \frac{lqB}{mv_0}$.



К задаче 19.7.

19.8. Материальная точка массы m, имеющая электрический заряд q, начинает двигаться из состояния покоя под действием силы тяжести в однородном магнитном поле. Вектор $\mathbf{B}$ магнитной индукции поля направлен по горизонтали и постоянен.

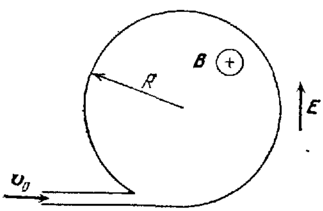
Пренебрегая сопротивлением среды, найти траекторию точки.

Ответ: циклоида $x = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt)$, $y = \frac{g}{k^2}(kt - \sin kt)$, где $k = \frac{q}{m}B$, ось OX направлена вертикально вниз, $OY \perp \mathbf{B}$.

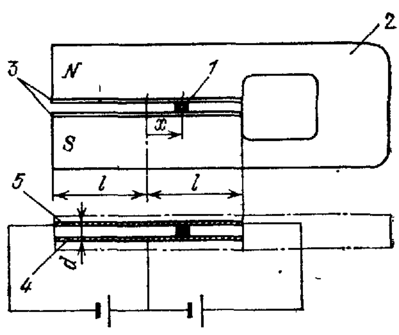
19.9. В плазменных установках нагретый до высокой температуры ионизованный газ изолируют от стенок реактора с помощью магнитного поля. Частицы плазмы, обладающие массой m и положительным зарядом q, поступают в полость реактора со скоростью $\mathbf{v}_0$, перпендикулярной силовым линиям однородного по сечению реактора и постоянного магнитного поля. Сила сопротивления движению частицы $\mathbf{F} = -\mu \mathbf{v}$, где $\mu = \mathrm{const}$, $\mathbf{v}$ — скорость частицы.

Полагая, что силы тяжести частиц уравновешены силами действия электростатического поля с напряженностью $\mathbf{E}(qE = mg)$, определить, при каком значении индукции B магнитного поля частицы плазмы не будут соприкасаться со стенками реактора радиуса R.

Ответ: $B \geqslant \frac{mv_0}{qR}$.



К задаче 19.9.



К задаче 19.10.

19.10. В сейсмическом датчике капля *1* ртути помещена между полюсами постоянного магнита *2* и изолирована от них прокладками *3*. Боковые стенки, одна из которых *4* является хорошим проводником, а другая *5* выполнена из материала, имеющего сопротивление $2r$, подключены к двум одинаковым батареям по мостовой схеме. ЭДС батарей равны E, внутреннее сопротивление r_0, расстояние между боковыми стенками d, длина стенок $2l$, индукция в зазоре между полюсами магнита B, масса капли m.

Полагая отклонение x капли от положения равновесия малым ($x \ll l$), найти собственную частоту колебаний датчика.

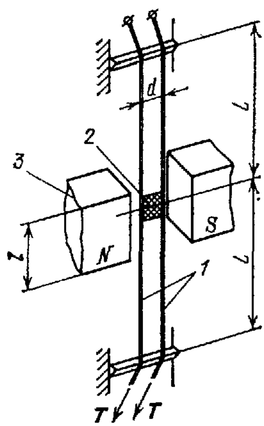
Ответ: $\omega_0 = \frac{r}{r_0 + r} \sqrt{2 \frac{BEd}{rml}}$.

§ 2. Электромеханические системы

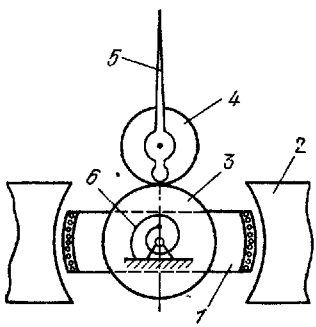
19.11. Вибратор шлейфового осциллографа состоит из проволочной петли *1*, на которой укреплено квадратное зеркало *2*, и постоянного магнита *3*, создающего в зазоре между полюсами поле индукции B. Нижний конец петли прикреплен к пружине, создающей силу натяжения $2T$. Расстояние между проволоками петли d равно длине стороны зеркала, рабочая длина проволок $2L (d \ll L)$, ширина полюсов магнита l.

Пренебрегая массой проволоки петли по сравнению с массой m зеркала, определить угол φ поворота зеркала при протекании по петле постоянного тока I и собственную частоту колебаний вибратора.

Ответ: $\varphi = \frac{BIL}{Td}$, $\omega_0 = 2 \sqrt{\frac{3T}{mL}}$.



К задаче 19.11.



К задаче 19.12.

19.12. Катушка *1* вольтметра помещена между полюсами *2* магнита, создающего постоянное однородное поле индукции B. Длина катушки равна ее диаметру d, число витков N, удельное сопротивление проволоки ρ. С катушкой жестко связана шестерня *3* радиуса R, находящаяся в зацеплении с шестерней *4*, на оси которой укреплена стрелка *5* индикатора. Радиус шестерни *4* $r = R/3$. При отсутствии тока катушка расположена горизонтально, а спиральная пружина *6*, коэффициент жесткости которой равен c, не деформирована.

Определить угол поворота стрелки, устанавливающийся при подаче на клеммы вольтметра постоянного напряжения U.

Ответ: $\varphi = \frac{3UBd}{4\rho c}$.

19.13. В условиях предыдущей задачи найти время практического успокоения стрелки вольтметра, если момент инерции катушки с шестерней *3* $J_к$, момент инерции шестерни *4* со стрелкой $J_с$. Индуктивным сопротивлением катушки пренебречь.

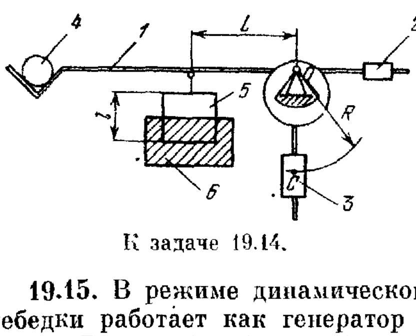
Указание. Время практического успокоения соответствует амплитуде колебаний, составляющей 5% от начальной.

Ответ: $t_{усп} = 8 \ln 20 \frac{\rho (J_к + 9J_с)}{B^2 d^3 N}$.

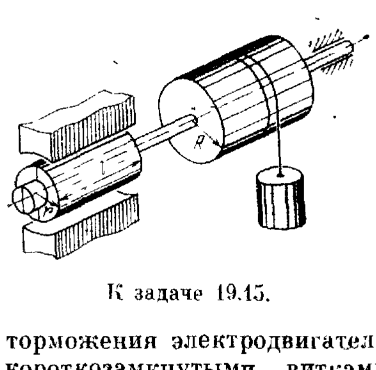
19.14. Рычажные весы, применяемые в роторных автоматических линиях, представляют собой рычаг *1* с противовесами *2* и *3*, вращающийся вокруг горизонтальной оси O. Весы регулируются так, чтобы центр тяжести C рычага с деталью *4* номинальной массы располагался на одной вертикали с осью O. Для гашения колебаний рычага, возникающих при установке деталей, применяется магнитоэлектрический демпфер, который состоит из квадратной рамки *5*, прикрепленной к рычагу на расстоянии L от оси вращения и помещенной между полюсами магнита *6*, создающего постоянное однородное поле индукции B.

Определить, при каком числе N короткозамкнутых витков рамки демпфера процесс успокоения колебаний рычага весов будет апериодическим, если длина стороны рамки равна l, удельное сопротивление проволоки ρ, масса и момент инерции относительно оси O рычага с деталью равны M и J соответственно, $OC = R$.

Ответ: $N \geqslant \frac{8\rho \sqrt{JMgR}}{B^2 L^2 l}$.



К задаче 19.14.



К задаче 19.15.

19.15. В режиме динамического торможения электродвигатель лебедки работает как генератор с короткозамкнутыми витками якоря. Радиус барабана лебедки равен R, радиус якоря r, длина l, количество короткозамкнутых витков якоря, находящихся между полюсами магнита, равно N, удельное сопротивление проволоки обмотки якоря ρ. Магнитные полюсы статора создают постоянное однородное поле индукции B.

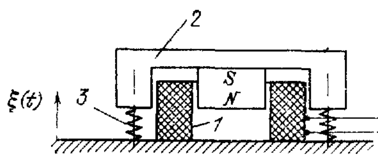
Определить установившуюся скорость опускания груза массы m, если $R = 2r$, $l = 3r$.

Ответ: $v_{\text{уст}} = \dfrac{16mg\rho}{9B^2rN}$.

19.16. В условиях предыдущей задачи определить, за какое время T груз, начавший движение из состояния покоя, приобретает скорость $v = 0{,}9v_{\text{уст}}$, если момент инерции барабана лебедки вместе с якорем равен J.

Ответ: $T = \dfrac{4}{9}\ln 10\,\dfrac{\rho(J + mR^2)}{B^2 r^3 N}$.

19.17. Катушка *1* магнитоэлектрического датчика сейсмографа жестко связана с основанием, совершающим колебания по закону $\xi(t) = \xi_0 \sin pt$, где ξ_0 — амплитуда перемещения, p — частота колебаний основания. Роль сейсмической массы выполняет постоянный магнит *2*, связанный с основанием пружинами *3*. Масса магнита равна m, суммарный коэффициент жесткости пружин c, индукция в зазоре между полюсными наконечниками B, длина провода, сопротивление и индуктивность катушки равны l, R_0 и L соответственно, входное сопротивление регистрирующего прибора R.



К задаче 19.17.

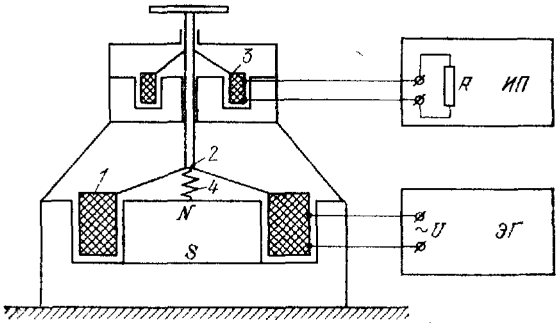
Составить дифференциальные уравнения, определяющие относительное отклонение y магнита от положения равновесия и ток I в цепи катушки.

Ответ: $m\ddot{y} + cy - BlI = mp^2\xi_0 \sin pt$, $\quad L\dot{I} + (R_0 + R)I + Bl\dot{y} = 0$.

19.18. В условиях предыдущей задачи определить амплитуду колебаний выходного напряжения $U = RI$ при резонансе. Индуктивностью L катушки пренебречь.

Ответ: $U|_{p=\omega_0} = \dfrac{cR\xi_0}{Bl}$.

19.19. Вибростенд типа ГМК-1 имеет два магнитоэлектрических механизма (МЭМ). Возбуждение колебаний вибростенда осуществляется подачей напряжения $U = U_0 \sin pt$ от генератора электрических колебаний (*ЭГ*) на катушку *1* силового МЭМ, жестко связанную с подвижным штоком *2*. Второй МЭМ служит для регистрации движения штока, его катушка *3* включена в цепь измерительного прибора (*ИП*). Масса подвижных частей вибростенда равна m, коэффициент жесткости пружины *4* равен c, индукция в зазорах полюсных наконечников магнитов силовой и измерительной систем B_1 и B_2, длина и сопротивление провода катушек l_1, R_1 и l_2, R_2 соответственно, входное сопротивление измерительного прибора $R = R_2$.



К задаче 19.19.

Пренебрегая индуктивным сопротивлением катушек, найти максимальное значение возмущающей силы вибростенда и добротность его колебательной системы.

Указание. Добротность колебательной системы равна $Q = \omega_0/(2n)$, где ω_0 — собственная частота, n — коэффициент затухания свободных колебаний.

Ответ: $F_0 = \dfrac{B_1 l_1}{R_1} U_0$, $Q = \dfrac{2R_1 R_2 \sqrt{cm}}{R_1 (B_1 l_1)^2 + 2R_2 (B_2 l_2)^2}$.

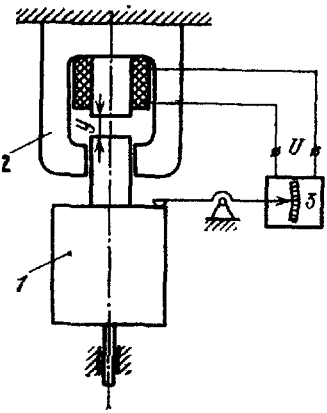
19.20. На якорь электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением подается постоянное напряжение U. Момент инерции относительно оси вращения якоря с валом равен J, индуктивность и сопротивление обмотки якоря равны L и R соответственно. Момент на якоре $M_я = c_1 I$, где $c_1 = \text{const}$, I — ток в обмотке якоря; ЭДС противоиндукции $E = c_2 \Omega$, где $c_2 = \text{const}$, Ω — угловая скорость вала.

Найти угловую скорость Ω вала и ток I в обмотке якоря через $t = 3/n$ с после подачи напряжения, если $R = 2\sqrt{\dfrac{c_1 c_2 L}{J}}$.

Указание. $n = \dfrac{R}{2L}$ с$^{-1}$.

Ответ: $\Omega = 0{,}8U/c_2$, $I = 0{,}3U/R$.

19.21. Магнитный подвес ротора *1* состоит из электромагнита *2* и датчика *3*, управляющего напряжением питания катушки электромагнита. Масса ротора равна m, активное сопротивление катушки R, индуктивность $L = L(y)$, электромагнитная сила $F =$



К задаче 19.21.

$=F(y,\ I)$, где y — величина воздушного зазора в магнитопроводе, I — ток в цепи катушки. Напряжение питания катушки $U=ky$, где $k=$ $=\mathrm{const}>0$.

Полагая изменения величины воздушного зазора y и тока I в цепи катушки малыми по сравнению с их значениями y_0 и I_0, соответствующими статическому равновесию ротора, составить дифференциальные уравнения движения системы.

Указание. В разложениях функций $L(y)$ и $F(y,\ I)$ в степенные ряды учесть члены до первого порядка малости относительно $\xi=y-y_0$ и $i=I-I_0$.

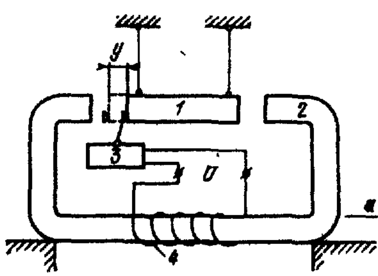
Ответ: $$m\frac{d^2\xi}{dt^2}+k_1\xi+k_2 i=0,\quad L_0\frac{di}{dt}+Ri+lI_0\frac{d\xi}{dt}-k\xi=0,$$
где $L_0=L(y_0)$, $I_0=\dfrac{ky_0}{R}$, $F(y_0,I_0)=mg$, $l=\left(\dfrac{\partial L}{\partial y}\right)_0$, $k_1=\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_0$, $k_2=\left(\dfrac{\partial F}{\partial I}\right)_0$.

19.22. Пренебрегая индуктивным сопротивлением катушки электромагнита и учитывая, что
$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=k_1=\mathrm{const}<0,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial I}\right)_0=k_2=\mathrm{const}>0,$$
установить, при каком условии равновесие ротора, рассмотренного в предыдущей задаче, устойчиво в положении, соответствующем $y=y_0$.

Ответ: $\dfrac{k_2k}{R}>k_1$.

19.23. Акселерометр — прибор для измерения ускорений — состоит из маятника, груз *1* которого имеет двойной подвес и помещен между полюсами электромагнита *2*. Датчик *3* измеряет отклонение груза от положения равновесия и подает на катушку *4* электромагнита напряжение U, пропорциональное скорости груза, $U=k_1\dot{y}$, где $k_1=$ $=\mathrm{const}$. Масса груза маятника равна m, длина нитей подвеса l, индуктивность катушки L.

Пренебрегая сопротивлением катушки и полагая, что сила действия магнитного поля на груз маятника пропорциональна



К задаче 19.23.

току I в катушке $F = k_2 I$, где $k_2 = \text{const}$, определить собственную частоту акселерометра.

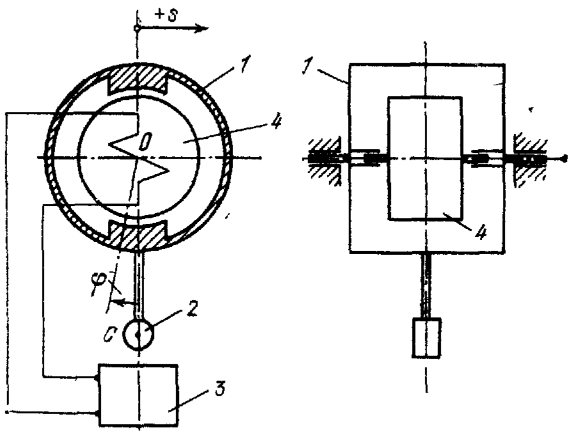
Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k_1 k_2}{mL}}$.

19.24. В акселерометре, рассмотренном в предыдущей задаче, регистрируется ток I в цепи катушки.

Показать, что для установившегося положения маятника при движении акселерометра с постоянным ускорением a ток пропорционален ускорению, и найти величину $I_{\text{уст}}$ тока.

Ответ: $I_{\text{уст}} = \frac{k_1}{L\omega_0^2} a$.

19.25. Маятник Байкова состоит из электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, статор *1* которого может



К задаче 19.25.

вращаться вокруг горизонтальной оси O, груза *2*, жестко связанного со статором, и датчика *3*. Датчик измеряет отклонение груза *2* от вертикали и выдает в цепь якоря *4* напряжение, пропорциональное угловой скорости маятника, $U = k_1 \dot{\varphi}$. Индуктивность цепи якоря равна L, масса груза m, расстояние от оси вращения статора до центра масс груза $OC = l$, момент инерции якоря относительно оси вращения J, момент на якоре $M_{\text{я}} = k_2 i$, где $k_2 = \text{const}$, i — ток в обмотке якоря.

Пренебрегая сопротивлением цепи якоря и трением в осях, показать, что маятник, установленный на подвижном объекте, работает как измеритель пройденного пути, т. е. угол поворота ψ якоря пропорционален s. Влиянием собственных колебаний пренебречь.

Ответ: $\psi = \frac{k_1 k_2}{k_1 k_2 + mglL} \frac{ml}{J} s$.

19.26. Логарифмический декремент колебаний математического маятника длины l равен δ. При электрическом моделировании процесса его свободных колебаний катушку с индуктивностью L включили последовательно в цепь с конденсатором и резистором.

При каких значениях емкости C конденсатора и сопротивления R резистора затухающие колебания тока в контуре будут иметь такую же частоту и декремент, что и колебания маятника?

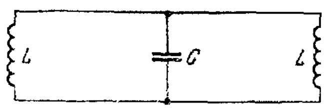
Ответ: $C = \frac{l}{gL}$, $R = \frac{2\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} L \sqrt{\frac{g}{l}}$.

19.27. Индуктивность L и активное сопротивление R катушки индуктивности можно определить методом резонансных испытаний, подключив ее последовательно с конденсатором, емкость C которого известна, к генератору напряжения $U(t) = U_0 \sin pt$. Плавно меняя частоту p колебаний напряжения U, регистрируют частоту $p_{\text{рез}}$ и амплитуду тока $I_{\text{рез}}^{\max}$ при резонансе.

Найти характеристики катушки индуктивности по указанным данным.

Ответ: $L = \frac{1}{Cp_{\text{рез}}^2}$, $R = \frac{U_0}{I_{\text{рез}}^{\max}}$.

19.28. Электрическим аналогом сцепки из двух вагонов, рассмотренной в задаче 14.68, является идеальный контур из двух одинаковых катушек индуктивности, соединенных параллельно с конденсатором.



К задаче 19.28.

При каких индуктивности L катушек и емкости C конденсатора собственные частоты колебаний систем будут одинаковыми?

Ответ: $LC = m/c$.

Глава 20

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И РЕГУЛИРОВАНИЕ

Методы теоретической механики широко используются в теории автоматического управления и регулирования. В главе предлагается ряд задач, в которых методами теоретической механики (или электромеханики) требуется составить дифференциальные уравнения движения, провести их анализ и получить ответы в формулировках теории автоматического регулирования. Выбраны лишь две группы задач, наиболее близко примыкающие к вузовскому курсу теоретической механики,— задачи на получение частотных характеристик и задачи на оценку устойчивости движения и переходных процессов линейных систем. Частотные характеристики систем управления дают полное представление о динамических свойствах систем при внешнем гармоническом воздействии.

Допустим, что к линейной системе приложено внешнее воздействие, изменяющееся по гармоническому закону $Fe^{i\omega t}$. Через какой-то промежуток времени в системе установятся вынужденные колебания с постоянной амплитудой, характеризуемые частным решением дифференциального уравнения, которое может быть представлено в виде

$$D(\omega)e^{i(\omega t+\varphi(\omega))}.$$

Зависящая от частоты ω комплексная функция

$$W(i\omega)=\frac{D(\omega)\,e^{i(\omega t+\varphi(\omega))}}{Fe^{i\omega t}}=A(\omega)\,e^{i\varphi(\omega)}$$

называется *амплитудно-фазовой частотной характеристикой системы*. Функция $A(\omega)$ называется *амплитудной частотной характеристикой системы* (в теории колебаний график $A(\omega)$ называется *резонансной кривой*), а функция $\varphi(\omega)$ — *фазовой частотной характеристикой системы*. На комплексной плоскости амплитудно-фазовую характеристику обычно строят в прямоугольных $(U,\ iV)$ или полярных $(A,\ \varphi)$ координатах

$$W(i\omega)=U(\omega)+iV(\omega),\qquad W(i\omega)=A(\omega)e^{i\varphi(\omega)},$$

где

$$U(\omega)=A(\omega)\cos\varphi(\omega),\qquad V(\omega)=A(\omega)\sin\varphi(\omega),$$

$$A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)},\quad \operatorname{tg}\varphi(\omega)=\frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

Системы автоматического регулирования и управления должны быть устойчивыми и обладать хорошими качествами переходного процесса: быстрым затуханием собственных колебаний, малым перерегулированием и т. д.

Переходный процесс — это процесс перехода системы из одного стационарного режима (в частном случае положения) к другому. Он возникает при любом воздействии на систему. С точки зрения теоретической механики переходный процесс есть движение системы от момента воздействия на нее до момента, когда установится новый стационарный режим. Наиболее просто его характеристику можно получить из решения однородного дифференциального уравнения или уравнения с постоянной правой частью. Например, для уравнения системы

$$T\dot{y}+y=y_0\qquad (y_0=\mathrm{const}),$$

переходный процесс при нулевых начальных условиях будет выражаться формулой

$$y=y_0(1-e^{-t/T}).$$

Так как реальные системы обладают нелинейными свойствами, то оценку устойчивости при малых отклонениях системы от невозмущенного движения во многих случаях производят на основании анализа свойств линеаризованных уравнений возмущенного движения для отклонений переменных величин.

Для оценки устойчивости без определения корней характеристического уравнения системы разработан ряд критериев, в частности алгебраический критерий Рауса — Гурвица, частотный критерий и др.

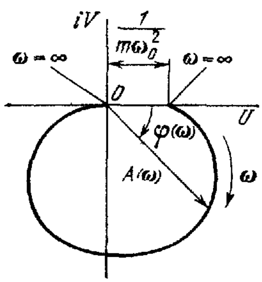
Заключение об устойчивости системы можно сделать также из анализа фазовых траекторий. В простейшем случае для одной переменной фазовая траектория может быть построена на плоскости в прямоугольных координатах ($y = \dot{x}$, x), которые называются фазовыми. Если фазовые траектории линейной системы при неограниченном возрастании времени асимптотически приближаются к началу координат, то такая система устойчива асимптотически.

§ 1. Частотные характеристики

20.1. На устойчивую линейную механическую колебательную систему с одной степенью свободы действует внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону с частотой ω. Дифференциальное уравнение движения данной колебательной системы имеет вид

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P_0}{m} e^{i\omega t}.$$

Получить выражение амплитудно-фазовой характеристики системы и построить ее график.



К ответу задачи 20.1.

Ответ: $W(i\omega) = \dfrac{1}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + i2\varepsilon\omega\right]} = U(\omega) + iV(\omega)$, $U(\omega) = \dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2\right]}$, $V(\omega) = \dfrac{-2\varepsilon\omega}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2\right]}$.

20.2. В условиях предыдущей задачи получить выражения амплитудной частотной $A(\omega)$ и фазовой частотной $\varphi(\omega)$ характеристик системы и построить их графики. Определить максимальный сдвиг по фазе между выходными и входными колебаниями.

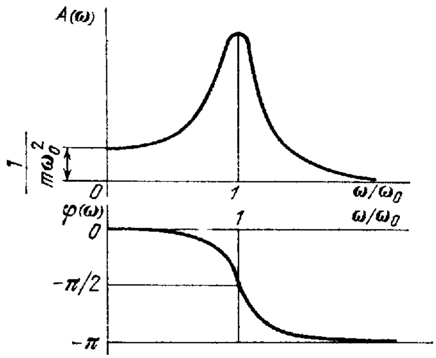
Ответ: $A(\omega) = \dfrac{1}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}}$, $\operatorname{tg}\varphi(\omega) = -\dfrac{2\varepsilon\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$, $\varphi_{max}(\omega = \infty) = -\pi$.

20.3. Уравнение вращения вала двигателя как объекта регулирования при отклонениях от стационарного режима имеет вид

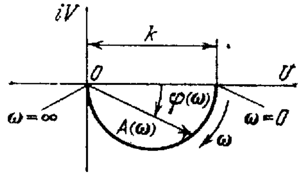
$$J\Delta\dot{\omega} + b\Delta\omega = \Delta M_{\text{дв}},$$

где $J = \text{const}$, $b = \text{const} > 0$, $\Delta M_{\text{дв}}$, $\Delta\omega$ — отклонения момента на валу двигателя и угловой скорости от их стационарных значений.

Получить выражение амплитудно-фазовой характеристики двигателя и построить ее график.



К ответу задачи 20.2.



К ответу задачи 20.3.

Определить максимальный сдвиг по фазе между выходными и входными колебаниями.

Ответ: $W(i\omega) = \dfrac{k}{1 + iT\omega}$, $k = \dfrac{1}{b}$, $T = \dfrac{J}{b}$, $\varphi_{\max}(\omega = \infty) = -\pi/2$.

20.4. Динамические свойства объекта регулирования выражаются следующим дифференциальным уравнением:

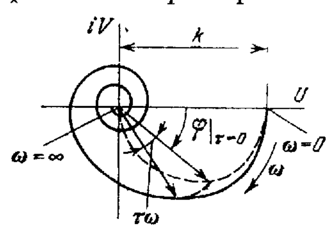
$$T\dot{x}_2(t) + x_2(t) = kx_1(t - \tau),$$

где $T > 0$ — постоянная времени, $k > 0$ — коэффициент усиления, $\tau > 0$ — время запаздывания начала изменения выходной величины $x_2(t)$ после начала изменения входной величины $x_1(t - \tau)$.

Получить выражение амплитудно-фазовой характеристики объекта регулирования и построить ее график. Получить выражения фазовой частотной характеристики для случаев $\tau = 0$ и $\tau \neq 0$.

Указание. При решении дифференциального уравнения правую часть его преобразовать так:

$$x_1(t - \tau) = x_1 e^{i\omega(t-\tau)} = x_1(t) e^{-i\omega\tau}.$$



К ответу задачи 20.4.

Ответ: $W(i\omega) = \dfrac{ke^{-i\tau\omega}}{1 + iT\omega}$, $\operatorname{tg}\varphi\,|_{\tau=0} = -T\omega$, $\varphi\,|_{\tau\neq 0} = \varphi\,|_{\tau=0} - \tau\omega$.

§ 2. Устойчивость и переходные процессы линейных систем

20.5. Получить выражение фазовой траектории для системы, переходный процесс которой описывается дифференциальным уравнением

$$T\dot{x} + x = 0.$$

Построить график фазовой траектории и по его виду сделать заключение об устойчивости движения системы.

Ответ: $y = -\frac{1}{T}x$; система устойчива асимптотически.

20.6. Получить выражение фазовой траектории для системы, переходный процесс которой описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Построить график фазовой траектории и по его виду сделать заключение об устойчивости движения системы.

Ответ: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{(\omega_0 A)^2} = 1$ ($y = \dot{x}$, A — произвольная постоянная); система устойчива.

20.7. Тело массы m, входящее в состав замкнутой автоматической системы, может двигаться по прямолинейной направляющей. Дифференциальное уравнение движения тела имеет вид

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (\varepsilon < \omega_0).$$

В состоянии покоя по телу произведен удар, импульс которого вдоль направляющей равен I.

Определить переходный процесс в системе.

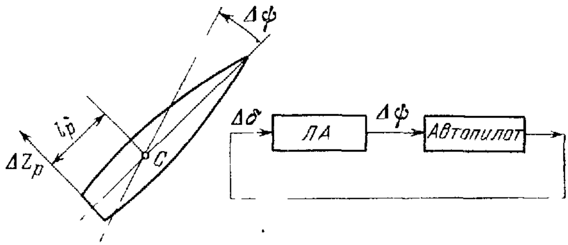
Ответ: $x_{\text{пер}}(t) = \frac{I}{m\omega_1} e^{-\varepsilon t} \sin \omega_1 t$, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}$.

20.8. Плоское движение летательного аппарата (*ЛА*) вокруг его центра масс может быть выражено дифференциальным уравнением

$$\Delta\ddot{\psi} + c_{\dot{\psi}\dot{\psi}}\Delta\dot{\psi} + c_{\psi\psi}\Delta\psi = -\frac{1}{J} l_p \Delta Z_p \qquad (l_p > 0),$$

где $\Delta Z_p = k_p \Delta\delta$ — отклонение управляющей силы, k — коэффициент пропорциональности, $\Delta\delta$ — отклонение угла поворота руля, $\Delta\psi$ — малое отклонение от курса, J — момент инерции *ЛА* относительно поперечной оси, проходящей через центр масс. Обычно $c_{\dot{\psi}\dot{\psi}} > 0$, а коэффициент $c_{\psi\psi}$ может быть положительным, равным нулю или отрицательным. В последнем случае *ЛА* называют аэродинамически неустойчивым.

Для обеспечения устойчивости движения автопилот в простейшем случае обеспечивает поворот руля по закону $\Delta\delta = k_1\Delta\psi$.



К задаче 20.8.

Каким должен быть коэффициент усиления k_1, чтобы при $c_{\psi\dot\psi} > 0$ аэродинамически неустойчивый ЛА ($c_{\psi\psi} < 0$) с автопилотом в результате возмущений совершал затухающие колебательные движения?

Ответ: $k_1 > \dfrac{J}{l_p k_p}\left(\dfrac{c^2_{\psi\dot\psi}}{4} - c_{\psi\psi}\right)$.

20.9. В условиях предыдущей задачи определить коэффициент усиления автопилота при регулировании по угловой скорости по закону $\Delta\delta = k_2\Delta\dot\psi$, чтобы при $c_{\psi\psi} > 0$ максимальное отклонение угла $\Delta\psi$, вызванное внешними кратковременно действующими силами $f(t)$, уменьшилось в e раз через период колебаний $T = 1$ с.

Ответ: $k_2 - \dfrac{J}{k_p l_p}\left(2 - c_{\psi\dot\psi}\right)$.

20.10. Динамические свойства замкнутой системы автоматического регулирования характеризуются дифференциальным уравнением

$$\ddot x + 2\varepsilon\dot x + \omega_0^2 x = f(t) \qquad (\varepsilon \ll \omega_0),$$

где $f(t)$ — стационарное внешнее возмущение.

В каком стационарном режиме будет работать система, если 1) $f(t) = f_0 = \mathrm{const}$; 2) $f(t) = f_0 \sin pt$?

Указание Стационарный режим в системе установится через большой промежуток времени.

Ответ: 1) $\Delta x_0(t) = f_0/\omega_0^2$; 2) $\Delta x_0(t) = \dfrac{f_0 \sin(pt + \varphi)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - p^2\right)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}}$;

$\varphi = \mathrm{arctg}\left(-\dfrac{2\varepsilon p}{\omega_0^2 - p^2}\right)$.

20.11. При равномерном прямолинейном движении автомобиля со скоростью v_0 мощность двигателя расходуется на преодоление всех видов сопротивлений.

1) Составить линеаризованное уравнение возмущенного движения автомобиля приведенной массы m по горизонтальной прямой дороге, принимая отклонение мощности двигателя ΔN пропорциональным отклонению Δy подачи топлива, т. е. $\Delta N = k\Delta y$, обобщенную силу F_c сопротивления движению автомобиля пропорциональной квадрату скорости, т. е. $F_c = cv^2$.

2) Определить отклонение скорости автомобиля в зависимости от мгновенного отклонения подачи топлива на постоянную величину $\Delta y_0 = \mathrm{const}$.

3) Найти переходную динамическую ошибку в установлении скорости автомобиля.

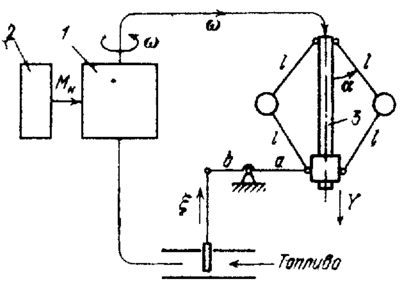
Указание. Активную силу, вызывающую движение автомобиля, принять равной мощности двигателя, деленной на скорость автомобиля. Переходной динамической ошибкой считать отклонение фактического значения регулируемой величины Δv в переходном процессе от установившегося ее значения.

Ответ: 1) $T\Delta\dot{v} + \Delta v = \dfrac{k}{3cv_0^2}\Delta y, \quad T = \dfrac{m}{3cv_0};$

2) $\Delta v = \dfrac{k}{3cv_0^2}\left(1 - e^{-t/T}\right)\Delta y_0;$

3) $\Delta v_{\text{пер}} = -\dfrac{k}{3cv_0^2}e^{-t/T}\Delta y_0.$

20.12. Автоматическая система, состоит из теплового двигателя *1*, нагрузки *2* и центробежного регулятора подачи топлива в двигатель *3*. Мощность двигателя пропорциональна величине открытия ξ заслонки $N_д = k_д\xi$. В стационарном режиме двигатель нагружен постоянным крутящим моментом нагрузки $M_н$ и имеет постоянную угловую скорость вращения ω_0, заслонка при этом открыта на величину ξ_0.



К задаче 20.12.

1) Составить линеаризованные уравнения возмущенного движения автоматической системы, полагая приведенный момент инерции вала двигателя равным J и пренебрегая массой заслонки, стержней и муфты регулятора.

2) Определить устойчив ли стационарный режим работы системы.

3) Найти стационарное отклонение угловой скорости $\Delta\omega_0$, если внешняя нагрузка увеличилась на постоянную величину $\Delta M_н$.

Геометрические размеры регулятора указаны на рисунке.

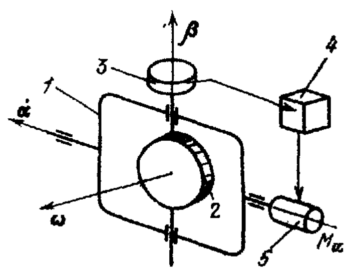
Ответ: 1) $T\dot{\Delta\omega} + \Delta\omega = k\Delta M_н$,

$$T = \frac{J}{k_д\left(\frac{4bg}{a\omega_0^4} + \frac{\xi_0}{\omega_0^2}\right)}, \quad k = -\frac{1}{k_д\left(\frac{4bg}{a\omega_0^4} + \frac{\xi_0}{\omega_0^2}\right)};$$

2) стационарный режим устойчив асимптотически;

3) $\Delta\omega_0 = -\dfrac{\Delta M_н}{k_д\left(\frac{4bg}{a\omega_0^4} + \frac{\xi_0}{\omega_0^2}\right)}$.

20.13. На рисунке показана схема одноосного гиростабилизатора, назначение которого — удерживать внешнюю рамку *1* карданового подвеса в определенном положении. Ротор гироскопа вращается с большой угловой скоростью ω в корпусе *2*, на вертикальной оси которого (оси прецессии) установлен датчик *3*, измеряющий угол прецессии β. Сигнал с датчика поступает в усилитель-преобразователь *4*, затем в исполнительное устройство *5*, которое прикладывает момент M_α относительно оси стабилизации внешней рамки. Вокруг оси прецессии гироскопа действует возмущающий момент $M_в$.



К задаче 20.13.

Отклонение стабилизирующего момента ΔM_α пропорционально отклонению силы тока в якоре двигателя, т. е. $\Delta M_\alpha = -k_1\Delta I$. Изменение тока в якоре двигателя описывается дифференциальным уравнением

$$L\dot{\Delta I} + R\Delta I - c\Delta\omega_я = k_2\Delta\beta,$$

где L, R — индуктивность и омическое сопротивление обмотки якоря, $\Delta\omega_я$ — отклонение угловой скорости якоря, $k_2\Delta\beta$ — отклонение напряжения, поступающего с датчика угла на обмотку возбуждения двигателя, c — коэффициент противоэлектродвижущей силы. Исполнительное устройство *5*, кроме двигателя, имеет редуктор с передаточным числом n так, что $\Delta\omega_я = n\Delta\dot{\alpha}$.

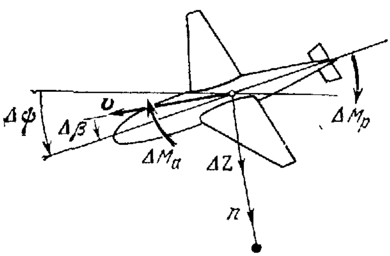
Момент инерции корпуса *2* с гироскопом относительно оси прецессии равен B, момент инерции системы относительно оси стабилизации равен A, кинетический момент гироскопа $H = \text{const}$.

1) Составить линеаризованные уравнения движения замкнутой системы, полагая углы α, β и угловые скорости $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ малыми.

2) Определить стационарную ошибку замкнутой системы по угловой скорости $\dot{\alpha}_{ст}$, если $M_в = \text{const}$.

3) Определить, каким должен быть коэффициент усиления k_2, чтобы при $M_\beta = 0$ замкнутая система по отношению к угловой скорости $\dot\alpha$ была устойчивой асимптотически.

Ответ: 1) $J\Delta\ddot\alpha - H\Delta\dot\beta = -k_1 I$, $B\Delta\ddot\beta + H\Delta\dot\alpha = M_\beta$, $L\Delta\dot I + R\Delta I - cn\Delta\dot\alpha = k_2\Delta\beta$, где $J = A + n^2 J_я$, $J_я$ — момент инерции якоря двигателя; 2) $\Delta\alpha_{ст} = -\dfrac{k_1k_2M_\beta}{HRM_\beta + k_1k_2H}$; 3) $0 < k_2 < \dfrac{Hcn}{J}$.



К задаче 20.14.

20.14. Самолет совершает прямолинейный горизонтальный полет с постоянной скоростью v. При малых отклонениях от прямолинейного полета малые отклонения боковой аэродинамической силы Z, момента аэродинамических сил M_a и момента управляющих сил рулей M_p относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс C, пропорциональны соответственно малым отклонениям угла скольжения $\Delta\beta$, угловой скорости рыскания $\Delta\dot\psi$, угла поворота руля, т. е.

$$\Delta Z = Z^{(\beta)}\Delta\beta, \quad \Delta M = M^{(\beta)}\Delta\beta + M^{(\dot\psi)}\Delta\dot\psi, \quad M_p = M_p^{(\delta)}\Delta\delta,$$

где $Z^{(\beta)}$, $M^{(\beta)}$, $M^{(\dot\psi)}$ — постоянные положительные величины.

За невозмущенное движение принять полет, при котором $\psi = 0$, $\beta = 0$, $\delta = 0$, $M_a = 0$, $Z = 0$, $M_p = 0$, $v = \text{const}$. Масса и момент инерции самолета относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс C, равны m и J.

1) Составить линеаризованное уравнение возмущенного движения самолета в горизонтальной плоскости, полагая величину скорости полета v неизменной.

2) Определить стационарное отклонение угловой скорости $\Delta\dot\psi_{ст}$ в зависимости от мгновенного отклонения руля на постоянный угол $\Delta\delta_0$.

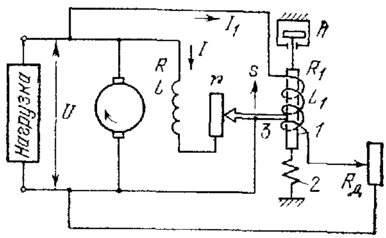
Ответ: 1) $T_1T_2\Delta\dddot\psi + (T_1 + T_2)\Delta\ddot\psi + (1 + T_2T_3)\Delta\dot\psi = -k_p\left(T_2\Delta\dot\delta + \Delta\delta\right)$, $T_1 = \dfrac{J}{M^{(\dot\psi)}}$, $T_2 = \dfrac{mv}{Z^{(\beta)}}$, $T_3 = \dfrac{M^{(\beta)}}{M^{(\dot\psi)}}$, $k_p = \dfrac{M_p^{(\delta)}}{M^{(\dot\psi)}}$;

2) $\Delta\dot\psi_{ст} = -\dfrac{k_p}{1 + T_2T_3}$.

20.15. Получить характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущенного движения замкнутой автоматической системы регулирования курса самолета. Характеристики самолета и действующих сил указаны в предыдущей задаче. Уравнение автопилота принять в виде $\Delta\delta = k_1\Delta\psi$, где $k_1 = \text{const} > 0$. Оценить устойчивость движения замкнутой системы.

Ответ: $T_1T_2\lambda^3 + (T_1 + T_2)\lambda^2 + (1 + T_2T_3 + k_1k_pT_2)\lambda + k_pk_1 = 0$. Движение устойчиво асимптотически.

20.16. На рисунке изображена простейшая система автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока с параллельным возбуждением. Напряжение U регулируется путем изменения величины сопротивления r в цепи возбуждения.



К задаче 20.16.

Если, например, напряжение U по какой-то причине начало падать, уменьшится ток I_1, а значит, и тяговая сила электромагнита *1*. Сердечник электромагнита и связанный с ним движок *3* реостата оттянутся пружиной *2* вниз, уменьшится сопротивление r, увеличится ток возбуждения I и в результате ликвидируется падение напряжения U. Подлежащее регулированию напряжение U задается реостатом с сопротивлением $R_д$.

1) Получить линеаризованное уравнение динамики регулятора, выражающее зависимость отклонения Δr от отклонения ΔU; отклонение Δr принять пропорциональным отклонению Δs, т. е. $\Delta r = k_3\Delta s$. Тяговую силу электромагнита принять пропорциональной квадрату силы тока $F_{эм} = c_1 I_1^2$, жесткость пружины равной c_2, силу трения, пропорциональной скорости сердечника электромагнита $F_{тр} = h\dot{s}$. Масса подвижной части, сопротивление и индуктивность обмотки электромагнита соответственно равны m, R_1, L_1.

2) Определить стационарное отклонение Δr_0, если напряжение изменится на постоянную величину ΔU_0.

Указание. При выводе уравнений коэффициенты при искомых переменных привести к единице.

Ответ: 1) $T_1T_2^2\Delta\dddot{r} + (T_1T_3 + T_2^2)\Delta\ddot{r} + (T_1 + T_3)\Delta\dot{r} + \Delta r = k_1k_2k_3\Delta U$, где $T_1 = \dfrac{L_1}{R_1 + R_д}$, $T_2^2 = \dfrac{m}{c_2}$, $T_3 = \dfrac{h}{c_2}$, $k_1 = \dfrac{1}{R_1 + R_д}$, $k_2 = \dfrac{2c_1I_{10}}{c_2}$; 2) $\Delta r_0 = k_1k_2k_3\Delta U_0$.

20.17. Получить характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущенного движения замкнутой системы в условиях предыдущей задачи, считая, что цепь возбуждения состоит из обмотки с сопротивлением R и с индуктивностью L и сопротивления r. Сопротивлением и индуктивностью якоря пренебречь и считать, что генератор вырабатывает напряжение, пропорциональное силе тока в обмотке возбуждения, т. е. $U = k'I$. Массой подвижных частей электромагнита пренебречь.

Пользуясь критерием Рауса — Гурвица, получить условия асимптотической устойчивости замкнутой системы.

Указание. При выводе уравнений коэффициенты при искомых переменных привести к единице.

Ответ: $T_0T_1T_3\lambda^3 + [T_0T_1 + T_3(T_0 + T_1)]\lambda^2 + (T_0 + T_1 + T_3)\lambda + (1 + k_0k_1k_2k_3) = 0$, где $T_0 = \dfrac{L}{R + r_0 - k'}$, $k_0 = \dfrac{I_0k'}{R + r_0 - k'}$. Условия асимптотической устойчивости $k_0 > 0$, $[T_0T_1 + T_3(T_0 + T_1)](T_0 + T_1 + T_3) - T_0T_1T_3(1 + k_0k_1k_2k_3) > 0$.

Глава 21

ГИДРОМЕХАНИКА

Во всех задачах настоящей главы, если это особо не оговаривается, жидкость считается идеальной (невязкой), однородной, несжимаемой (плотность жидкости постоянна), изотермичной (нагреванием, охлаждением пренебрегается). Течение жидкости считается безвихревым и безотрывным, потерями на гидросопротивление пренебрегается, давление газа над свободной поверхностью жидкости полагается равным нулю.

Сама жидкость рассматривается как совокупность материальных частиц, сплошным образом заполняющих некоторый движущийся объем. Для идеальной жидкости считается, что поверхностные силы, приложенные к элементам поверхности некоторого объема, представляют собой нормальные давления, направленные внутрь этого объема (по внутренней нормали к элементу поверхности).

§ 1. Статика. Относительное равновесие

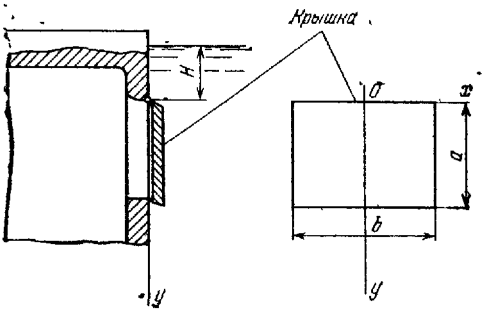
21.1. Найти равнодействующую F и координаты центра C системы параллельных сил давления жидкости на прямоугольную крышку, если ее верхний край находится на глубине H. Высота крышки равна a, ширина b, плотность жидкости ρ.

Ответ: $F = \rho gab(H + a/2)$, $x_C = 0$, $y_C = a(2a + 3H)/[3(a + 2H)]$.

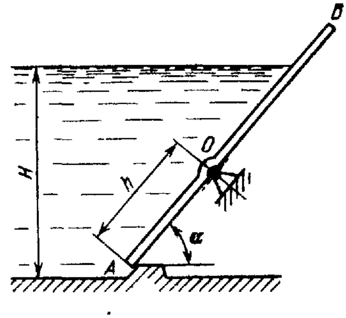
21.2. Прямоугольный щит AB ирригационного канала, наклоненный под углом α к горизонту, может вращаться вокруг горизонтальной оси O, проходящей через его центр масс. Если уровень воды мал, то щит прижат нижней кромкой к выступу дна канала A. Расстояние от оси до нижней кромки щита равно h.

Определить, при какой высоте уровня H щит будет поворачиваться и пропускать воду в канал. Трением на оси пренебречь.

Ответ: $H \geqslant 3h \sin \alpha$.



К задаче 21.1.

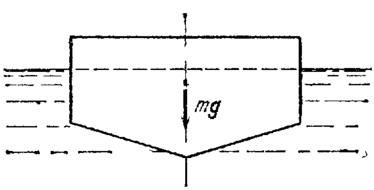


К задаче 21.2.

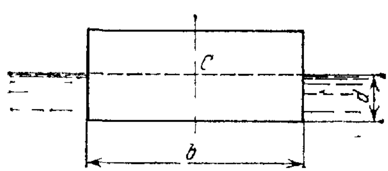
21.3. Судно имеет вертикальные боковые стенки. Площадь горизонтального сечения судна на уровне поверхности воды равна F, плотность воды ρ, масса судна с учетом присоединенной массы жидкости m.

Определить период малых вертикальных поступательных колебаний судна.

Ответ: $T_0 = 2\pi \sqrt{\dfrac{m}{\rho g F}}$.



К задаче 21.3.



К задаче 21.4.

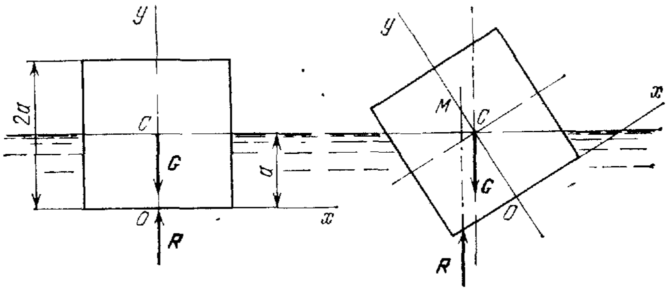
21.4. На рисунке показано поперечное сечение морского судна длины l, высоты $2d$. Масса судна равномерно распределена по его объему, а его центр масс лежит в плоскости симметрии на уровне поверхности воды (плотность воды равна ρ).

Полагая отклонения малыми, найти величину восстанавливающего момента и частоту колебаний судна при бортовой качке, характеризующейся углом φ поворота корпуса, если $b = 6$ м, $d = 2$ м.

Ответ: $M_{\text{в}} = 6\rho g\varphi$, $\omega = 1{,}06$ рад/с.

21.5. Поперечное сечение корабля представляет собой квадрат со стороной $2a$, а его центр масс расположен на высоте y над дном, которое погружено в воду на глубину a. Найти величину y, при которой равновесие безразлично.

Ответ: $y = \frac{7}{6}a$.



К задаче 21.5.

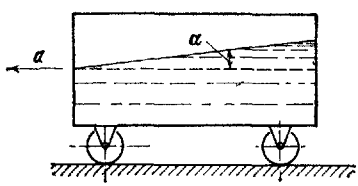
21.6. В условиях задачи 21.5 вычислить период колебаний корабля при бортовой качке. Принять, что центр масс корпуса C расположен на вертикальной оси симметрии, на расстоянии a от дна, момент инерции корпуса относительно продольной оси, проходящей через центр масс, с учетом присоединенной массы жидкости равен J. Считать метацентрическую высоту MC равной $a/6$, а массу корабля равной m.

Указание. Метацентрической высотой называется расстояние от центра тяжести до метацентра — точки пересечения линии действия равнодействующей **R** полного давления воды (поддерживающей силы), действующей на корпус корабля, с осью y.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{6J/(amg)}$.

21.7. Цистерна движется по прямолинейному горизонтальному участку с постоянным ускорением a.

Определить, под каким углом α к горизонту установится свободная поверхность жидкости в цистерне.



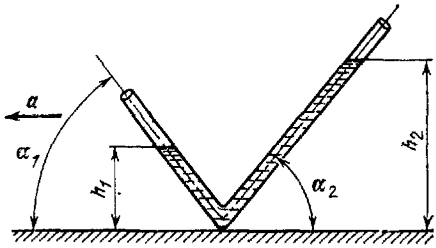
К задаче 21.7.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}(a/g)$.

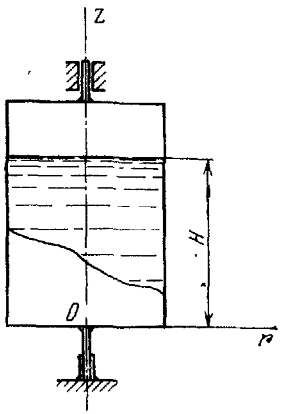
21.8. Жидкостный акселерометр состоит из изогнутой трубки, наполненной маслом и расположенной в вертикальной плоскости.

Определить величину ускорения a поступательно движущегося по горизонтальной плоскости вагона, если уровень жидкости в канале трубки по направлению движения понижается до величины h_1, а в противоположном конце повышается до величины h_2, углы, образуемые трубкой с горизонтальной плоскостью, равны соответственно α_1 и α_2.

Ответ: $a = g \dfrac{h_2 - h_1}{h_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + h_2 \operatorname{ctg} \alpha_2}$.



К задаче 21.8.



К задаче 21.9.

21.9. Цилиндрический сосуд, наполненный жидкостью, вращается вокруг вертикальной оси Z с постоянной угловой скоростью ω.

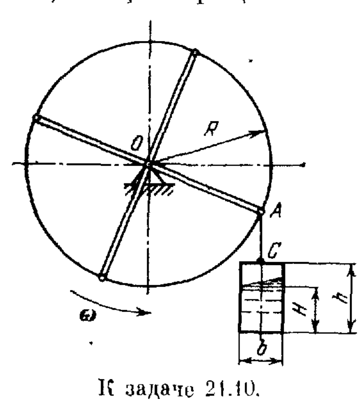
Найти уравнение свободной поверхности жидкости в равновесном состоянии в связанной с сосудом цилиндрической rOz системе координат. Высота уровня жидкости в покоящемся сосуде равна H, радиус цилиндра R.

Ответ: $Z = \dfrac{\omega^2}{2g}\left(r^2 - \dfrac{R^2}{2}\right) + H$.

21.10. Прямоугольный сосуд, заполненный жидкостью на высоту H, соединен тягой AC с колесом, которое вращается вокруг горизонтальной оси O с постоянной угловой скоростью ω. Радиус колеса R, ширина сосуда b.

Полагая, что тяга во все время движения сосуда сохраняет вертикальное положение, найти величину угловой скорости колеса, при которой жидкость не будет выливаться из сосуда. Колебания свободной поверхности жидкости пренебречь. Кроме того, считать, что $g/(\omega^2 R) \gg 1$.

Ответ: $\omega^2 \ll 2g(h - H)/(Rb)$.



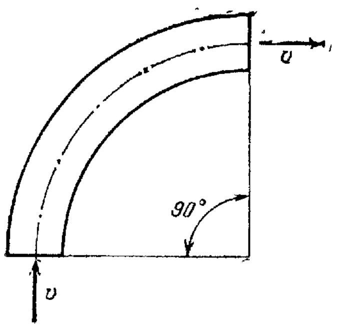
К задаче 21.10.

§ 2. Общие теоремы динамики в гидромеханике

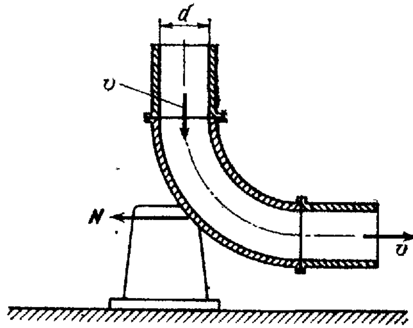
21.11. По трубе, изогнутой по дуге окружности, протекает жидкость плотности ρ. Площадь поперечного сечения трубы равна S, величина скорости частиц жидкости в каждом сечении одинакова и равна v.

Определить силу давления жидкости N на стенки трубы вследствие поворота потока, считая, что размеры поперечного сечения трубы малы по сравнению с радиусом закругления.

Ответ: $N=\rho S v^2\sqrt{2}$.



К задаче 21.11.



К задаче 21.12.

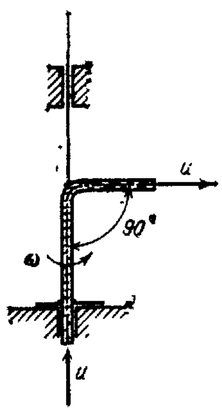
21.12. Определить величину горизонтальной составляющей силы давления на опору колена трубы диаметра $d=300$ мм, по которой протекает вода со скоростью $v=2$ м/с.

Ответ: $N=282{,}7$ Н.

21.13. Г-образная пустая трубка вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω_0.

Какой будет угловая скорость трубки, если из нее будет вытекать жидкость плотности ρ с постоянной скоростью u. Момент инерции сухой трубки относительно оси вращения равен J, длина горизонтального колена l, площадь поперечного сечения S.

Ответ: $\omega=\dfrac{3J\omega_0}{3J+\rho S l^3}$.

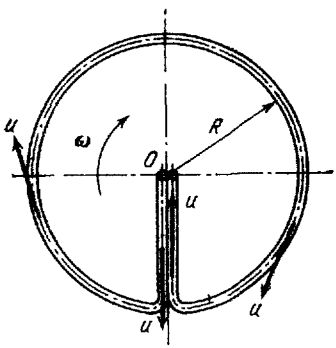


К задаче 21.13.

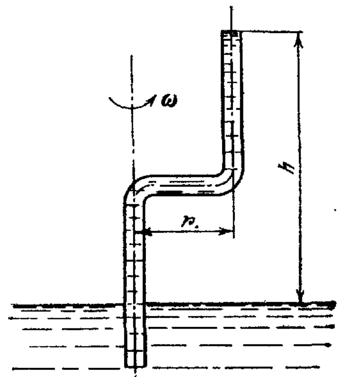
21.14. Изогнутая трубка, как это показано на рисунке, заполнена жидкостью и вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр окружности O перпендикулярно плоскости трубки. Момент инерции трубки с жидкостью относительно оси вращения равен J_0, плотность жидкости ρ, площадь поперечного сечения трубки постоянна и равна S, угловая скорость вращения трубки при неподвижной жидкости ω_0.

Определить величину угловой скорости вращения трубки, если жидкость протекает внутри нее с постоянной относительной скоростью u в направлении, указанном на рисунке стрелками. При какой величине скорости жидкости угловая скорость вращения трубки станет равной нулю?

Ответ: $\omega = \omega_0 - \frac{2\pi\rho S R^2}{J_0} u$, $u = \frac{J_0 \omega_0}{2\pi\rho S R^2}$.



К задаче 21.14.



К задаче 21.15.

21.15. Изогнутая, как показано на рисунке, трубка заполнена водой, опущена одним концом в жидкость и вращается вокруг вертикальной оси. Другой конец трубки находится выше свободной поверхности на расстоянии h.

При какой угловой скорости вращения вода будет заполнять трубку доверху, если длина горизонтального колена равна r.

Ответ: $\omega^2 \geqslant 2gh/r^2$.

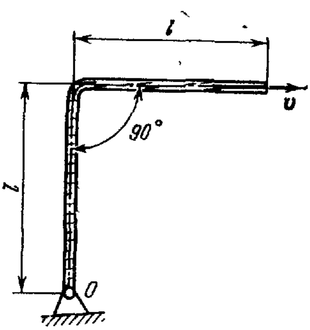
21.16. В условиях задачи 21.15 определить, при какой угловой скорости вращения жидкость будет вытекать из трубки с постоянной скоростью v.

Ответ: $\omega^2 = (v^2 + 2gh)/r^2$.

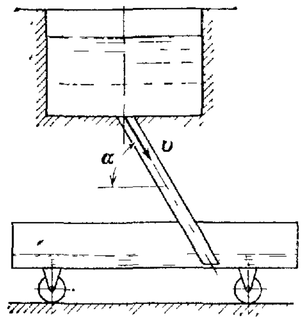
21.17. Г-образная трубка может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка.

Найти величину угловой скорости трубки, если из нее вытекает жидкость со скоростью $v = \text{const}$. В начальный момент времени система находилась в покое. Плотность жидкости ρ погонная масса трубки μ, длина колена l, площадь поперечного сечения трубки S.

Ответ: $\omega = \frac{3\rho S v}{l\,5(\mu + \rho S)l}$.



К задаче 21.17.



К задаче 21.18.

21.18. Внутрь прямоугольной в плане цистерны из наклоненной под углом α трубы вытекает жидкость плотности ρ со скоростью v. Жидкость вытекает из емкости, которая имеет достаточно большой объем.

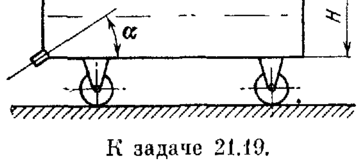
Найти зависимость скорости цистерны u от времени, если масса цистерны M, площадь поперечного сечения трубы S. В начальный момент времени цистерна покоилась. Считать, что поверхность жидкости остается плоской и горизонтальной, массой колес пренебречь.

Ответ: $u = \dfrac{\rho S v^2 \cos \alpha t}{M + \rho S v t}$.

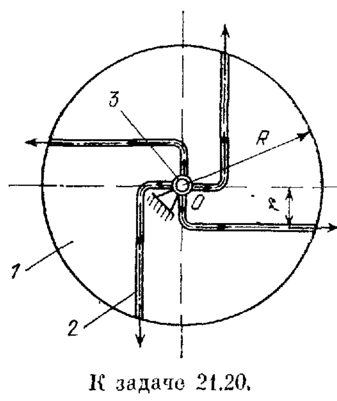
21.19. Из цистерны, стоящей неподвижно на горизонтальном участке пути, в некоторый момент времени начинает вытекать жидкость плотности ρ через наклоненную под углом α трубку.

Найти, как меняется скорость цистерны u на малом промежутке времени, если площадь поперечного сечения трубки S, масса цистерны с жидкостью M. Трением и изменением высоты уровня жидкости H в цистерне пренебречь.

Ответ: $u = 2t \dfrac{\rho S H}{M} g \cos \alpha$.



К задаче 21.19.



К задаче 21.20.

21.20. Колесо *1* радиуса R с каналами *2* может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. Момент инерции колеса с учетом массы жидкости относительно оси вращения равен J_0, расстояние от оси канала до оси колеса r.

Найти величину угловой скорости ω вращения колеса, если массовый расход жидкости в подводящем трубопроводе *3* постоянен и равен Q, каналы взаимно перпендикулярны. В начальный момент система находилась в покое.

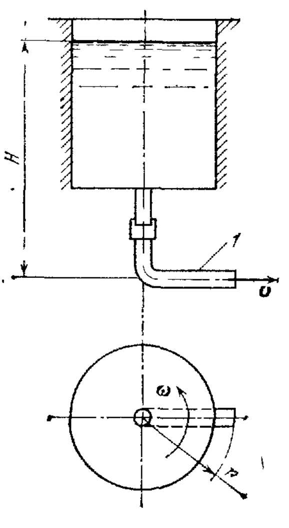
Указание. Массовый расход равен $Q = \rho v S$, где ρ — плотность жидкости, v — скорость жидкости, S — площадь сечения трубопровода.

Ответ: $\omega = Qr\sqrt{R^2 - r^2}/J_0$.

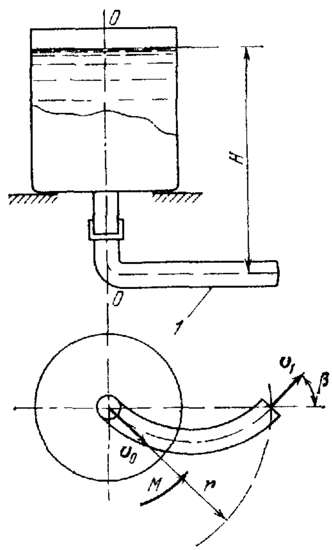
21.21. Жидкость вытекает из резервуара по трубке *1*, длина горизонтальной части которой r. Трубка вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω.

Пренебрегая изменением уровня жидкости H в резервуаре, найти величину скорости $\mathbf{v}$ истечения жидкости из трубки.

Ответ: $v = \sqrt{\omega^2 r^2 + 2gH}$.



К задаче 21.21.

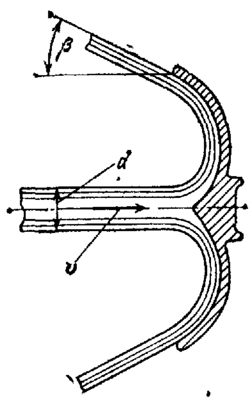


К задаче 21.22.

21.22. Жидкость вытекает из резервуара по трубке *1*. Трубка, соединенная муфтой с резервуаром, может вращаться вокруг вертикальной оси. Площадь поперечного сечения трубки S, расстояние от центра выходного сечения трубки до оси вращения r, угол между касательной к оси трубки в выходном сечении и радиусом β, плотность жидкости ρ.

Какой момент надо приложить к трубке, чтобы она оставалась в покое. Изменением уровня жидкости H в резервуаре пренебречь.

Ответ: $M = 2\rho SrgH \sin\beta$.



К задаче 21.23.

21.23. В активной ковшовой гидротурбине струя воды диаметра $d = 60$ мм симметрично натекает на ковш со скоростью $v = 50$ м/с.

Найти величину силы давления струи на неподвижный ковш, если выходной угол ковша $\beta = 9°$, трением пренебречь.

Ответ: $R = \rho v^2 \pi d^2 (1 + \cos\beta)/4 = 14{,}05$ кН.

21.24. В условиях задачи 21.23 найти величину силы, действующей на ковш активной гидротурбины, если ковш движется вправо поступательно с постоянной скоростью $u = 25$ м/с.

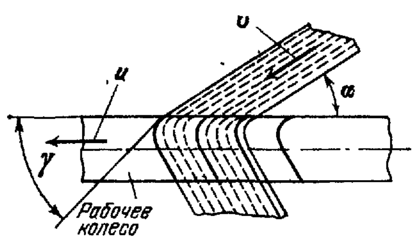
Ответ: $R = \rho (v - u)^2 (1 + \cos\beta) \frac{\pi d^2}{4} = 3{,}5$ кН.

21.25. В активной гидротурбине струя воды натекает на лопасти рабочего колеса под углом $\alpha = 30°$ по отношению к его боковой плоскости.

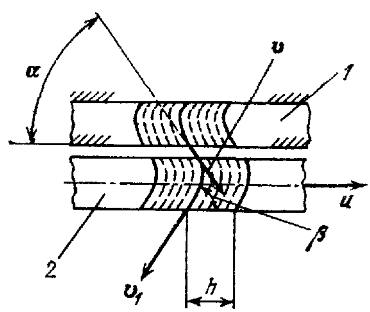
Найти величину угла наклона γ входной кромки лопасти, при которой будет иметь место безударное натекание струи на лопасть, если скорость струи $v = 50$ м/с, а средняя (по высоте) окружная скорость лопасти постоянна и равна $u = 30$ м/с.

Указание Безударным называется такое натекание струи на лопасть, при котором относительная скорость жидкой частицы будет направлена по касательной к кромке лопасти.

Ответ: $\operatorname{tg}\gamma = \frac{v \sin\alpha}{v\cos\alpha - u}$, $\gamma \approx 62°$.



К задаче 21.25.



К задаче 21.26.

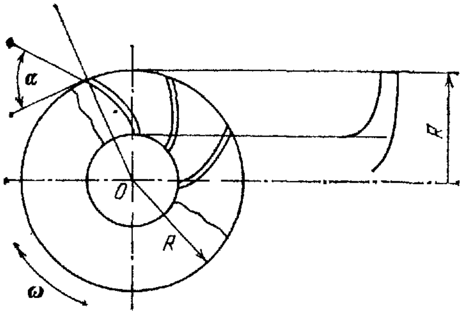
21.26. В рабочее колесо *2* реактивной гидротурбины поток воды поступает из неподвижного направляющего аппарата *1* со скоростью $v = 25$ м/с под углом $\alpha = 19°$ по отношению к его боковой плоскости. Шаг лопастей рабочего колеса $h = 60$ мм, высота лопасти $b = 40$ мм, выходной угол лопасти $\beta = 25°$, плотность жидкости ρ.

Найти (в расчете на один канал рабочего колеса) окружную силу R, развиваемую потоком на рабочем колесе, если последнее имеет среднюю (по высоте лопасти колеса *2*) окружную скорость $u = 20$ м/с. Трением пренебречь.

Указание. Относительная скорость выхода частиц жидкости v_1 определяется из условия неразрывности течения жидкости в канале, т. е. предполагается, что жидкость сплошным образом заполняет пространство между лопатками турбины и что во время движения не происходит ни потери вещества, ни его возникновения.

Ответ: $F = \rho v \sin \alpha bh(v \cos \alpha - u + v_1 \cos \beta) = 404$ Н.

21.27. Рабочее колесо центробежного насоса радиуса $R = 0{,}2$ м имеет суммарную площадь выходных сечений каналов (по окружности радиуса R) $S = 0{,}063$ м^2, а выходной угол лопастей $\alpha = 19°$. Угловая скорость вращения колеса $\omega = 22$ рад/с, производительность насоса $Q = 0{,}23$ м^3/с, плотность жидкости (вода) ρ.



К задаче 21.27.

Определить момент пары сил M, действующей на колесо.

Указание. 1. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента.

2. Радиальную проекцию абсолютной скорости считать равной $v_r = Q/S$.

Ответ: $M = \rho Q R\left(R\omega - \frac{Q}{S}\operatorname{ctg}\alpha\right) = 1573$Нм.

§ 3. Смешанные задачи

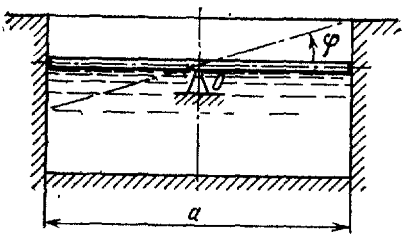
21.28. Крышка массы m расположена на поверхности жидкости плотности ρ, налитой в прямоугольный бассейн длины a и ширины b. Толщиной крышки и кинетической энергией жидкости пренебречь.

Найти частоту малых угловых колебаний плоской крышки вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка.

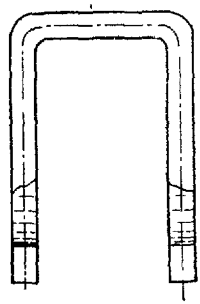
Указание Для решения задачи воспользоваться методом Рэлея. Краткие сведения о методе Рэлея см. в указании к задаче 14.11.

Ответ: $\omega^2 = \rho g a b/m$.

21.29. Дифференциальный манометр состоит из открытой U-образной трубки постоянного поперечного сечения, заполненной жидкостью на длину l.



К задаче 21.28.



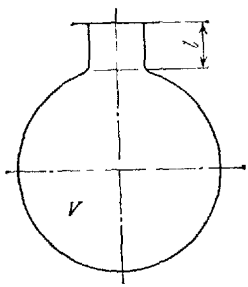
К задаче 21.29.

Определить частоту колебаний уровня жидкости.

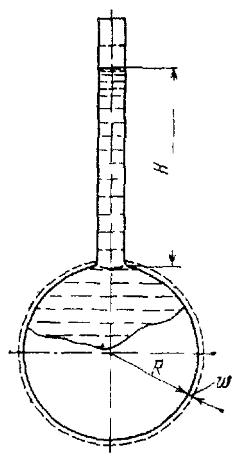
Ответ: $\omega = \sqrt{2g/l}$.

21.30. Вычислить частоту вертикальных колебаний «воздушной пробки» в горле колбы резонатора Гельмгольца. Энергию сжатия воздуха в колбе учесть, полагая, что давление и объем связаны адиабатическим законом $pV^k = \mathrm{const}$, где p — давление газа, k — показатель адиабаты. Плотность воздуха ρ, площадь сечения горла S, длина горла l, объем колбы V. Кинетической энергией воздуха в колбе и потенциальной энергией в горле колбы пренебречь.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{kpS}{\rho Vl}}$.



К задаче 21.30.



К задаче 21.31.

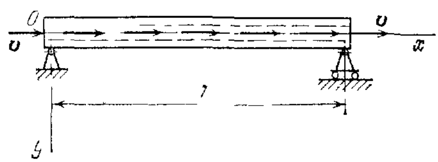
21.31. Жесткая вертикальная трубка с площадью поперечного сечения S заполнена жидкостью плотности ρ до высоты H. Нижним концом она прикреплена к упругой сферической оболочке радиуса R.

Найти частоту малых колебаний столба жидкости в трубке, считая, что прогиб в любой точке сферической оболочки равен $w(t)$, т. е. она представляет собой (в деформированном состоянии) сферу, концентричную с оболочкой в положении равновесия. Потенциальную энергию П (растяжение — сжатие) оболочки вычислять по формуле: $\Pi = c_0 w^2/2$. Здесь c_0 — приведенный коэффициент жесткости оболочки. Кинетической энергией жидкости в оболочке и инерцией самой оболочки пренебречь.

Указание Для решения задачи воспользоваться методом Рэлея, краткие сведения о котором даны в указании к задаче 14.11.

Ответ: $\omega^2 = \dfrac{c_0 S}{16\rho H\pi^2 R^4}$.

21.32. По упругой тонкостенной трубе, шарнирно закрепленной на концах, протекает жидкость плотности ρ с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Площадь поперечного сечения трубы постоянна по длине и равна S.



К задаче 21.32.

Рассматривая трубу по схеме балки с постоянными по длине изгибной жесткостью EJ_0 и погонной массой μ_0, составить дифференциальное уравнение поперечного движения трубы (для малых отклонений от положения равновесия) с учетом жидкости. Считать, что в положении равновесия труба горизонтальна.

Ответ: $EJ_0 \dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S v^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -(\mu_0 + \rho S)\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

21.33. В условиях задачи 21.32 для упругой тонкостенной трубы длины l, закрепленной шарнирно по концам, определить минимальную величину скорости течения жидкости v, при которой прямолинейная форма равновесия трубы становится неустойчивой.

Указания. 1. В дифференциальном уравнении движения трубы положить погонную массу равной нулю.

2. Решить полученное уравнение методом Фурье.

3. Неустойчивость прямолинейной формы равновесия надо понимать так, что при некотором (критическом) значении скорости жидкости существуют другие (при сколь угодно малых отклонениях), отличные от прямолинейной, формы равновесия трубы с протекающей по ней жидкостью.

Ответ: $v = \dfrac{\pi}{l}\sqrt{\dfrac{EJ_0}{\rho S}}$.

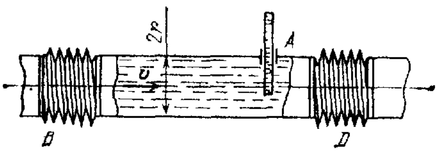
21.34. В условиях задачи 21.32 для упругой, тонкостенной, прямолинейной трубы длины l, заполненной жидкостью и закрепленной шарнирно по концам, найти собственные частоты малых поперечных колебаний. Определить также частоты колебаний системы с учетом протекания жидкости по трубе ($v = \text{const}$).

Указание. Для решения задачи воспользоваться методом Фурье.

Ответ: при $v = 0$ $\omega_n^2 = \dfrac{EJ_0}{(\mu_0 + \rho S)}\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^4$;

при $v \neq 0$ $\omega_n^2 = \dfrac{EJ_0}{(\mu_0 + \rho S)}\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2\left[\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2 - \dfrac{\rho S v^2}{EJ_0}\right]$.

21.35. По горизонтальному участку упругого трубопровода протекает жидкость плотности ρ с постоянной скоростью v. В некоторый момент времени труба на правом конце мгновенно перекрывается задвижкой A, при этом происходит гидравлический удар.



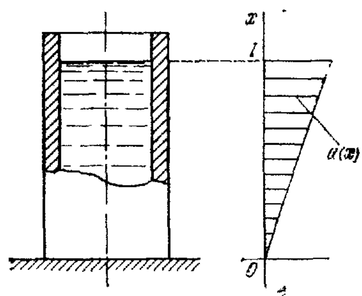
К задаче 21.35.

Полагая трубу тонкостенной безмоментной (работающей только на растяжение) цилиндрической оболочкой радиуса r, найти окружное напряжение, возникающее в стенке трубопровода при гидроударе. Модуль упругости трубы E, толщина стенки h.

Указание. Осевыми деформациями трубы, вследствие наличия компенсаторов B и D, и потенциальной энергией жидкости пренебречь.

Ответ: $\sigma = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{2E\rho r}{h}}$.

21.36. Жидкость плотности ρ в равновесном положении заполняет абсолютную жесткую вертикальную трубу на высоту l. Найти приближенное значение частоты ω первого тона вертикальных колебаний жидкости в трубе, если коэффициент объемного сжатия последней равен k[Н/м^2], а труба имеет круговое поперечное сечение площадью S. Считать, что амплитуды перемещений частиц жидкости по вертикали u изменяются по линейному закону (смотри эпюру), растеканием жидкости в радиальном направлении пренебречь.



К задаче 21.36.

Указание. Для решения задачи применить метод Рэлея (см. указание к задаче 14.11), изменением внутренней энергии жидкости пренебречь, потенциальную энергию жидкости вычислять по формуле:

$$\Pi = \frac{1}{2kS}\int_0^l N^2 dx,$$

а N — из уравнения $\frac{\partial N}{\partial x} = -\omega^2 \rho S u$.

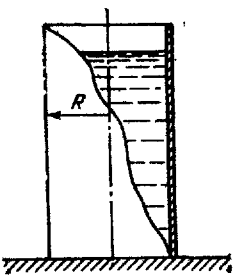
Ответ: $\omega^2 = \frac{2,5k}{\rho l^2}$.

21.37. Сжимаемая жидкость плотности ρ в равновесном положении заполняет упругую вертикальную цилиндрическую оболочку радиуса R на высоту l.

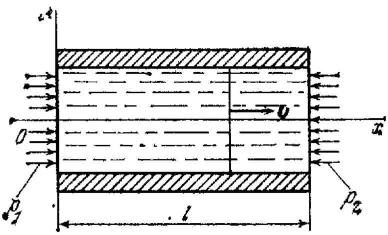
Найти приведенную эквивалентную скорость звука в упругой оболочке, если модуль упругости материала оболочки E, толщина h, коэффициент объемного сжатия жидкости k. Оболочку считать работающей на растяжение — сжатие в окружном направлении. Изменением внутренней энергии жидкости пренебречь.

Указание. Скорость звука — скорость распространения малых возмущений в жидкости, заполняющей жесткую оболочку — равна $a_0 = \sqrt{k/\rho}$.

Ответ: $a_э = \dfrac{a_0}{\sqrt{1 + 2\rho a_0^2 R/(Eh)}}$.



К задаче 21.37.



К задаче 21.38.

21.38. Жидкость протекает по неподвижной абсолютно жесткой горизонтальной цилиндрической трубе. Распределение скоростей по диаметру остается одинаковым в любом поперечном сечении трубы.

Определить коэффициент сопротивления ζ при ламинарном (частицы жидкости движутся по прямым, параллельным оси трубы) течении вязкой жидкости. Абсолютное значение напряжения трения τ рассчитывается по закону Ньютона:

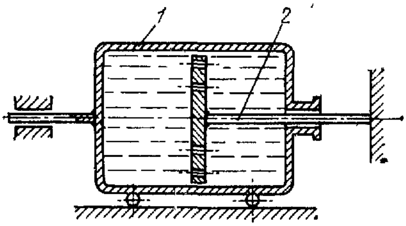
$$\tau = -\mu \frac{du(r)}{dr},$$

где μ — кинематический коэффициент вязкости, u — скорость, зависящая от радиуса r. Давление, действующее на левый торец трубы, равно p_1, а на правый торец p_2, диаметр трубы D, длина l, плотность жидкости ρ. Явлениями теплообмена и изменением температуры по длине трубы пренебречь.

Указание: Перепад давлений $\Delta p = p_1 - p_2$ представить в виде: $\Delta p = \zeta\rho \dfrac{v^2}{2}$, где v — средняя по сечению скорость потока.

Ответ: $\zeta = \dfrac{64}{\mathrm{Re}}\dfrac{l}{D}$, где $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho D v}{\mu}$ — число Рейнольдса.

21.39. Гидравлический демпфер состоит из цилиндра *1* с площадью поперечного сечения F, заполненного несжимаемой вязкой жидкостью плотности ρ, и поршня *2* с отверстиями. При движении цилиндра вправо относительно поршня жидкость перетекает через отверстия в поршне из его левой полости в правую.



К задаче 21.39.

Найти коэффициент сопротивления демпфера ζ, если число отверстий в поршне равно n, площадь сечения одного отверстия S, скорость цилиндра *1* постоянна и равна v, перепад давлений Δp в левой и правой частях цилиндра *1* равен $\Delta p = \zeta\rho w^2/2$, где w — скорость протекания жидкости через отверстия поршня.

Ответ: $\zeta = \dfrac{2\Delta p}{\rho v^2}\left(\dfrac{ns}{F}\right)^2$.

Константин Сергеевич Колесников, Григорий Давыдович Блюмин, Владислав Иванович Дронг, Владимир Валентинович Дубинин, Михаил Михайлович Ильин, Алексей Иванович Огурцов, Алексей Алексеевич Пожалостин, Юрий Сергеевич Саратов

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Редакторы *В. А. Романов, А. Г. Мордвинцев*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *О. А. Сигал, В. П. Сорокина*

ИБ № 11395

Сдано в набор 16.07.82. Подписано к печати 09.02.83. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 20. Уч.-изд. л. 21,23. Тираж 65 000 экз. Заказ № 269. Цена 85 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.