КИРиТФКП, 3-й сем., ИУ1, ИУ2 Вопросы для подготовки к экзамену

Теоретические вопросы

1. Знать определение двойного интеграла и его основные свойства. Доказательство теоремы о среднем для двойного интеграла, а также следствие из нее.

• Определение двойного интеграла

Пусть в замкн. обл. G плоскости $x_1 0 x_2$ кон. площ. $\sigma = m(G)$ и конечн. диаметра $d(G)$ определена скалярная ф-я $z = f(x_1, x_2)$. Пусть $\{G_k\}$ произвольное разбиение G на систему подобластей, пересекающихся, быть может, лишь по границам, а $M_k = (x_{1k}, x_{2k}) \in G_k$ - произв. отмеч. точка. Если вне зависимости от выбора разбиения $\{G_k\}$ и сист. отмеч. точек $\{M_k\}$ $\exists$ предел $\lim\limits_{\max d(G_k)\to 0} \sum f(M_k)\cdot m(G_k)$, то его называют двойным инт-м ф-ии $f(x_1, x_2)$ по области G и обозн $\iint\limits_G f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$ или $\iint\limits_G f(x_1,x_2)\,d\sigma$

• Свойства двойного интеграла

- Теор. (о существ. дв-го инт-ла)
Для любой ф-ии $z = f(x_1, x_2)$ непр. и огран. замкн обл $G \in \mathbb{R}^2$, имеющей конечн. площадь $\sigma = m(G)$ и конечн. диаметр $d(G)$ сущ. $\iint\limits_G f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2$

① линейность

$$\iint\limits_G \sum_{k=1}^{N} c_k f_k(x_1,x_2)\,d\sigma = \sum_{k=1}^{N} c_k \iint\limits_G f_k(x_1,x_2)\,d\sigma$$

② $\iint\limits_G C\,d\sigma = C\cdot m(G)$, где $C = const$

③ $\left\{G = \bigcup\limits_{k=1}^{N} G_k\right\} \wedge \left\{m(G_k \cap G_j) = 0, \forall k \neq j\right\} \Rightarrow \iint\limits_G f(x_1,x_2)\,d\sigma = \sum\limits_{k=1}^{N} \iint\limits_{G_k} f(x_1,x_2)\,d\sigma$

④ $\{f \gtrless 0, \forall (x_1,x_2)\in G\} \Rightarrow \iint f(x_1,x_2)\,d\sigma \gtrless 0$

⑤ $\{f \gtrless 0 \wedge f \not\equiv 0, \forall (x_1,x_2)\in G\} \Rightarrow \iint\limits_G f(x_1,x_2)\,d\sigma \gtrless 0$

⑥ $\{f \leq \varphi \wedge f \not\equiv \varphi, \forall (x_1,x_2) \in G\} \Rightarrow \iint\limits_G f(x_1,x_2)\,d\sigma < \iint\limits_G \varphi(x_1,x_2)\,d\sigma$

⑦ $\left|\iint\limits_G f(x_1,x_2)\,d\sigma\right| \leq \iint\limits_G |f(x_1,x_2)|\,d\sigma$

⑧ Теор (о среднем): Если f и φ непрерывн. в замкн. обл. $G \subset \mathbb{R}^2$, имеющей конеч. $d(G)$ и $m(G)$, и хоть одна из них знакопост. в G (пусть φ), тогда $\exists\ (x_{10}, x_{20}) \in G: \iint\limits_G (f\cdot\varphi)\,d\sigma = f(x_{10}, x_{20}) \iint\limits_G \varphi\,d\sigma$

▷ Пусть ф-я $\varphi > 0$ в G. Тогда $\forall (x_1, x_2) \in G$ $m = \min f \leq f(x_1,x_2) \leq M = \max f \Leftrightarrow m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$ $\forall (x_1,x_2)\in G$

случай $f \equiv const$ на G тривиален. По св-м двой-го интеграла:

$$m\iint\limits_G \varphi\,d\sigma < \iint\limits_G f\varphi\,d\sigma < M\iint\limits_G \varphi\,d\sigma$$

Т.о. $\exists\, \mu \in (m, M): \mu = \iint\limits_G f\varphi\, d\sigma \Big/ \iint\limits_G \varphi\, d\sigma \Rightarrow \exists\, (x_{10}, x_{20}) \in G:$ $f(x_{10}, x_{20}) = \mu$ ◁

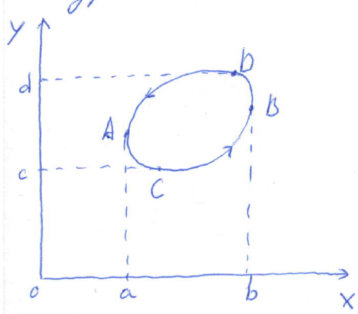
Следствие: Если $\varphi \equiv 1$ в G, то $\exists\, (x_{10}, x_{20}) \in G: \iint\limits_G f\, d\sigma = f(x_{10}, x_{20}) \cdot m(G)$

2. Доказательство теоремы о формуле Грина для выпуклой односвязной области в R ^2. Доказательство ее применимости в случае нарушения условия выпуклости области, а также в случае в случае нарушения условия односвязности области.

Теорема: Пусть $G \in \mathbb{R}^2$ - односвязная область, ограниченная кусочно-гладким замкн. контуром L, и в замкн. области $G \cup L$ опред. и непрерывные скал. ф-ии $P(x,y)$, $P'_y(x,y)$, $Q(x,y)$, $Q'_x(x,y)$. Тогда имеет место след. формула (ф-ла Грина для односв. обл.):

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_G \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dx\,dy$$

Доказательство: Пусть обл. G явл-ся x и y прав. Тогда $Пр_{Ox} G = [a,b]$, $Пр_{Oy} G = [c,d]$, а участки контура L описываются ур-ми:



$\overrightarrow{ACB}: y = \varphi_1(x)$, $\overrightarrow{DAC}: x = \psi_1(y)$

$\overrightarrow{BDA}: y = \varphi_2(x)$, $\overrightarrow{CBD}: x = \psi_2(y)$

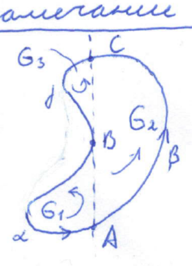
Тогда:
$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \oint\limits_L P\,dx + \oint\limits_L Q\,dy = \int\limits_{\overrightarrow{ACB}} P(x,y)\,dx + \int\limits_{\overrightarrow{BDA}} P(x,y)\,dx + \int\limits_{\overrightarrow{DAC}} Q(x,y)\,dy + \int\limits_{\overrightarrow{CBD}} Q(x,y)\,dy$$

$$= \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))\,dx + \int\limits_b^a P(x, \varphi_2(x))\,dx + \int\limits_d^c Q(\psi_1(y), y)\,dy + \int\limits_c^d Q(\psi_2(y), y)\,dy$$

$$= -\int\limits_a^b \left\{ P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \right\} dx + \int\limits_c^d \left\{ Q(x,y)\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \right\} dy = -\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy +$$

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx = \iint\limits_G \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dx\,dy$$ ◁

Замечание 1: Пусть обл. Γ_G не явл. x и y-правильной, но все остальные допущ. вып. Согласно св-м крив. инт-ла:

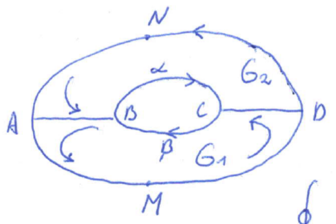


$$\int\limits_{\overrightarrow{AB}} + \int\limits_{\overrightarrow{BA}} = 0 = \int\limits_{\overrightarrow{BC}} + \int\limits_{\overrightarrow{CB}} \Rightarrow$$

$$\oint\limits_{\Gamma_G} = \int\limits_{\overrightarrow{B\alpha A}} + \int\limits_{\overrightarrow{AB}} + \int\limits_{\overrightarrow{A\beta C}} + \int\limits_{\overrightarrow{CB}} + \int\limits_{\overrightarrow{BA}} + \int\limits_{\overrightarrow{C\gamma B}} + \int\limits_{\overrightarrow{BC}} = \iint\limits_{G_1} \{Q'_x - P'_y\}\,dx\,dy$$

$$+ \iint\limits_{G_2} \{Q'_x - P'_y\}\,dx\,dy + \iint\limits_{G_3} \{Q'_x - P'_y\}\,dx\,dy = \iint\limits_G \{Q'_x - P'_y\}\,dx\,dy$$ т.е. формула Грина применима и для невып. обл.

<u>Замечание 2</u>: Пусть при выводе ф-лы Грина нарушено усл. односв-ти обл. G.



Пусть, для примера, G - двухсвязн. обл. с полож. ориент. Γ_G.
Разрезами AB и CD превращаем G в две односв. обл. G_1 и G_2:

$$\oint_{\Gamma_G} = \left\{ \int_{\overrightarrow{AMD}} + \int_{\overrightarrow{DC}} + \int_{\overrightarrow{C\beta B}} + \int_{\overrightarrow{BA}} \right\} + \left\{ \int_{\overrightarrow{DNA}} + \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{\overrightarrow{B\alpha C}} + \int_{\overrightarrow{CD}} \right\} =$$

$$\iint_{G_1} \{ Q'_x - P'_y \} dx\,dy + \iint_{G_2} \{ Q'_x - P'_y \} dx\,dy = \iint_{G} \{ Q'_x - P'_y \} dx\,dy,$$ т.е.

ф-ла Грина применима и для неодносв. областей.

3. Теорема о четырех эквивалентных условиях независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (с док-ом).

<u>Теорема</u>: Если $P(x,y)$, $P'_y(x,y)$, $Q(x,y)$, $Q'_x(x,y)$ опр. и непрер. в замкн. огран. односв. обл. $G \cup L$, где $L \triangleq \Gamma_G$, то следующие 4 условия эквивалентны:

① $\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \ \forall C \in G$

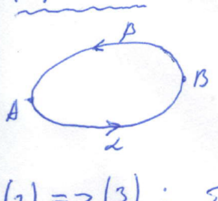
② $\int_{\overrightarrow{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от профиля $\overrightarrow{AB} \in G$

③ В G опр. ф-я $U(x,y)$: $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

④ $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad \forall (x,y) \in G$

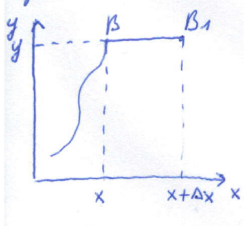
<u>Док-во</u>: Достаточно док-ть, что $(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to (1)$

<u>$(1) \Rightarrow (2)$</u>: Пусть (1) имеет место. Тогда



$$0 \equiv \oint_{(A\alpha B)\cup(B\beta A)} \equiv \int_{\overrightarrow{A\alpha B}} + \int_{\overrightarrow{B\beta A}} \equiv \int_{\overrightarrow{A\alpha B}} - \int_{\overrightarrow{A\beta B}},$$ т.е. $\int_{\overrightarrow{AB}}$ не зависит от профиля $\overrightarrow{AB} \in G$

<u>$(2) \Rightarrow (3)$</u>: Пусть (2) имеет место. Пусть точка $A = (x_0, y_0) \in G$ фикс. и точка $B = (x,y)$ произв. Тогда $U(x,y) = \int_{\overrightarrow{AB}} P(x,y)dx + \int_{\overrightarrow{AB}} Q(x,y)dy$ и



$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{BB_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \equiv \{ \text{т.к. } BB_1 \parallel 0x \} \equiv$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} P(x+\theta\Delta x, y)\Big|_{0\le\theta\le 1} = P(x,y)$$ т.к. $P(x,y)$ непр. на G. Аналогично док-ся: $dU = U'_x\,dx + U'_y\,dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$(3) \Rightarrow (4)$ Пусть (3) имеет место, т.е. $\exists\, U(x,y)$: $dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Т.к. $P'_y(x,y)$, $Q'_x(x,y)$ опр. и непр. в $G \cup \Gamma_G$, то по теор. о смеш. произв. имеем:

$Q'_x(x,y) = \{U'_y(x,y)\}'_x = \{U_x{}'(x,y)\}'_y = P'_y(x,y)$ в G, что и тр. док-ть.

$(4) \Rightarrow (1)$: следует непосред-но из формулы Грина

4. Знать определение числового ряда, сходящегося числового ряда, знакоположительного числового ряда, знакопеременного и знакочередующегося числовых рядов. Доказательство необходимого признака сходимости числового ряда. Критерий Коши сходимости числового ряда.

Опр.: Пару послед. $\{a_k\}_{k\ge1}$, $\{S_n\}_{n\ge1}$ наз-ют числовым рядом, если их элементы явл. веществ. числами и $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\forall n \ge 1$. При этом a_k наз-ют k-ым и общим членом ряда, а S_n – n-ой частной суммой ряда.

Опр.: Ч.р. $\{a_k\}_{k\ge1}$ наз-ют сходящимся, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $|S| < \infty$. При этом число S наз-ют суммой сход-ся ч.р. $\{a_k\}_{k\ge1}$ и пишут $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Опр: Ч.р. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ наз-ют знакоположит. ч.р., если $a_k \ge 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Опр. Ряды, элементами которых явл. действ. числа, имеющие различные знаки наз-ют знакоперем. Если элементы ряда послед-но измен. знак, то такой ряд наз-ся знакочеред.

Необх. призн. сход-и ч.р.: Если ч.р. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сход-ся, то $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

▷ По условию $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $|S| < \infty$. А т.к. $a_n = S_n - S_{n-1}$, то

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$ ☒

Крит-й Коши сход-и ч.р.: Ч.р. $\{a_k\}_{k\ge1}$ сход-ся т. и т.т., когда для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$: $n \ge N(\varepsilon)$ и $\forall m \in N$ вып. нер-во:

$\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon$

5. Доказать признак сравнения и предельный признак сравнения числовых рядов.

Признак срав-я: Пусть $\{a_n\}_{n\geq 1}$ и $\{b_n\}_{n\geq 1}$ – два знакопол. ч.р. и $\exists N \geq 1: \forall n \geq N$ $a_n > b_n$. В этом случае из сход-и ряда $\{a_n\}_{n\geq 1}$ следует сходимость ряда $\{b_n\}_{n\geq 1}$, а из расх-и ряда $\{b_n\}_{n\geq 1}$ следует расх-ть ряда $\{a_n\}_{n\geq 1}$

Док-во: По условию $\forall p \geq 1$ имеем $\sum\limits_{k=N}^{N+p} a_k \geq \sum\limits_{k=N}^{N+p} b_k$. Если знакополот. ч.р. $\{a_n\}_{n\geq 1}$ сход., то $\sum\limits_{k=N}^{N+p} b_k \leq \sum\limits_{k=N}^{N+p} a_k < \sum\limits_{k=N}^{\infty} a_k < \infty$

Т.о. послед-ть частных сумм для знакополот. ч.р. $\{b_k\}_{n\geq 1}$ неубыв-я и огран. сверху, т.е. она имеет кон. предел и ряд $\{b_k\}_{k\geq 1}$ - сход-и

Если ряд $\{b_n\}_{n\geq 1}$ расход., то $\sum\limits_{k=N}^{N+p} a_k \geq \sum\limits_{k=N}^{N+p} b_k \to \infty$ и ряд $\{a_n\}_{n\geq 1}$ - расход. ☒

Предельн. признак срав-я: Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q \in (0;\infty)$, то ряды $\{a_n\}_{n\geq 1}$ и $\{b_n\}_{n\geq 1}$ сход. или расх. одновременно

Док-во: согласно опред. предела имеем:

$\left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q\right) \Leftrightarrow \Big((\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0): (n \geq N(\varepsilon)) \Big) \Rightarrow$

$\Big(|a_n/b_n - q| < \varepsilon \Big)$. Пусть $\varepsilon = \frac{q}{2}$. Тогда $\forall n \geq N(q/2)$:

$\left(\left|\frac{a_n}{b_n} - q\right| < \frac{q}{2} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{q}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3q}{2} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n < \frac{3}{2} q b_n \ (*) \\ a_n > \frac{1}{2} q b_n \ (**) \end{array} \right\}$

согласно $(*)$ из сход-и ряда $\{b_n\}_{n\geq 1}$ следует сход-ть ряда $\{a_n\}_{n\geq 1}$, а из расх-и ряда $\{a_n\}_{n\geq 1}$ следует расх-ть ряда $\{b_n\}_{n\geq 1}$

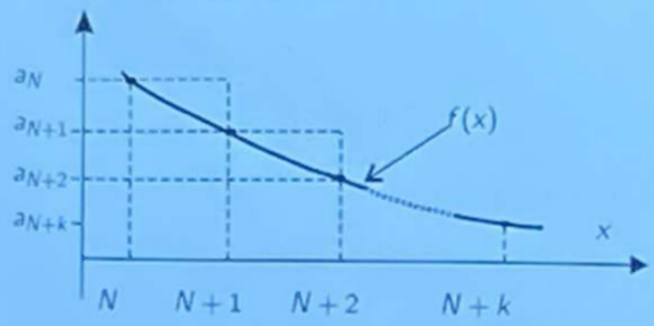
согласно $(**)$ из сход-и ряда $\{a_n\}_{n\geq 1}$ след. сход. ряда $\{b_n\}_{n\geq 1}$, а из расх-и ряда $\{b_n\}_{n\geq 1}$ след. расход. ряда $\{a_n\}_{n\geq 1}$ ☒

6. Доказать интегральный признак Коши для знакоположительных числовых рядов. Ряды Дирихле.

Теорема (интегральный признак Коши)

Если, начиная с некоторого номера N, члены знакоположительного числового ряда $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ могут быть представлены как значения некоторой непрерывной, положительной, монотонно убывающей функции $f(x): a_k = f(k); \forall\, k \geqslant N$, то исходный ряд сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_N^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство.



Пусть выполнены условия теоремы. Тогда из свойств площадей объемлемых и объемлющих плоских фигур следует (здесь σ^m_{N+1} – m-ая частная сумма остатка R_{N+1} исходного ряда):

$$\sigma^k_{N+1} \triangleq a_{N+1} + \ldots + a_{N+k} < \int\limits_N^{N+k} f(x)dx < a_N + \sigma^{k-1}_{N+1} \equiv a_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+k-1}.$$

доказательство (продолжение).

Т.о. $\sigma^k_{N+1} \triangleq a_{N+1} + \ldots + a_{N+k} < \int\limits_N^{N+k} f(x)dx < a_N + \sigma^{k-1}_{N+1}$.

1. Пусть рассматриваемый интеграл сходится.

Тогда $\sigma^k_{N+1} < \int\limits_N^{N+k} f(x)dx < \int\limits_N^{\infty} f(x)dx < \infty,\ \forall\, k \geqslant 1$.

Последовательность частичных сумм остатка ряда монотонно возрастает и ограничена сверху и, следовательно, остаток ряда R_{N+1} сходится. По теореме об остатках, исходный ряд сходится.

2. Пусть рассматриваемый интеграл расходится.

Т.к. $\int\limits_N^{N+k} f(x)dx < a_N + \sigma^k_{N+1},\ \forall\, k \geqslant 1$, то знакоположительная числовая последовательность $\{\sigma^k_{N+1}\}_{k\geqslant 1}$ монотонно неограниченно возрастает, что означает расходимость остатка R_{N+1} и, как следствие (см. теорему об остатках), расходимость исходного ряда.

доказательство (продолжение).

Напомним: $\sigma_{N+1}^{k} \stackrel{\Delta}{=} a_{N+1} + \ldots + a_{N+k} < \int\limits_{N}^{N+k} f(x)dx < a_N + \sigma_{N+1}^{k-1}$,

3. Пусть сходится исходный числовой ряд. Тогда одновременно с ним сходятся и все его остатки, т.е. $a_N + \sigma_{N+1}^{k-1} \leqslant b < \infty$, и, как следствие, имеют место неравенства

$\int\limits_{N}^{N+k} f(x)dx < a_N + \sigma_{N+1}^{k-1} < b < \infty$, из которых и следует сходимость рассматриваемого несобственного интеграла.

4. Пусть исходный числовой ряд расходится. Тогда $\sigma_{N+1}^{k} \to \infty$ при $k \to \infty$ и из неравенства $\sigma_{N+1}^{k} < \int\limits_{N}^{N+k} f(x)dx$ следует расходимость рассматриваемого несобственного интеграла.

Пример

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\lambda}}$ *т.е.* $a_k = \frac{1}{k^{\lambda}}$, $\forall\, k \geqslant 1$.

При $\lambda = 1$ *имеем расходящийся гармонический ряд, а при* $\lambda \leqslant 0$ *числовой ряд* $\{a_k\}_{k \geqslant 1}$ *расходится по необходимому признаку.*

Рассмотрим случай $(\lambda > 0) \wedge (\lambda \neq 1)$:

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Big|_{1}^{\infty}$$ *– сходится при* $\lambda > 1$ *и расходится при* $0 < \lambda < 1$.

Таким образом знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\lambda}}$ *сходится при* $\lambda > 1$ *и расходится при* $\lambda \leqslant 1$.

Данный ряд называют рядом Дирихле.

7. Доказать признак Даламбера для знакоположительных числовых рядов и его предельный вариант.

Призн. Даламбера для знакопол. ч.р: Если существует $N \in \mathbb{N}$ такой что для $\forall n \geq N$ имеет место нерав-во $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, то знакополож. ч.р. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сход и расход, если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$

Док-во: • Пусть $\forall n \geq N$ имеет место нер-во $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. Тогда $a_{N+1} \leq a_N$, $a_{N+2} < q a_{N+1} \leq q^2 a_N, \dots, a_{N+p} \leq q^p a_N$

т.к. a_N - const и $0 < q < 1$, то ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} q^p a_n$ сход-ся как сумма беск. убыв. геометр. прогрессии. Тогда ч.р. $\sum\limits_{k=1} a_k$ сход. по приз. сравнения.

• Пусть $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$ $\forall n \geq N$, тогда $a_{N+p} \geq q^p a_N$ $\forall p \geq 1$

т.к. $\lim\limits_{p \to \infty} q^p a_N = \infty \neq 0$ (или не $\exists$), то ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} q^p a_n$ расход. и по признаку срав-я расход и исслед. ряд.

Предельный признак Даламбера: Если $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ и $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сход; если $q > 1$, то ряд расход.

Док-во: т.к. ($\exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$), то по опред. предела имеем $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) > 0 : (n \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$. Тогда

$q - \varepsilon < a_{n+1}/a_n < q + \varepsilon$ $\forall n \geq N(\varepsilon)$

• Пусть $0 < q < 1$. Выбрав $\varepsilon = (1-q)/2$, получаем, что $a_{n+1}/a_n < (q+1)/2 < 1$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сход по призн. Даламбера.

Пусть $q > 1$. Выбрав $\varepsilon = (q-1)/2$, получаем, что $a_{n+1}/a_n > (q+1)/2 > 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх. по призн. Даламбера.

8. Доказать признак Коши (с радикалом) для знакоположительных числовых рядов и его предельный вариант.

Радикальный признак Коши: Если $\exists N \geq 1$ такой, что для $\forall n \geq N$ имеет место нер-во $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1} a_k$ сход-ся, если $\sqrt[n]{a_n} \geq q > 1$, то исходн. ряд расход-ся.

Док-во: • Пусть $\forall n \geq N$ имеет место нер-во $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$. Тогда $a_n \leq q^n$, где $q < 1$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сход-ся как сумма беск. убыв. прогрессии. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сход. по призн. срав-я

• Пусть $\sqrt[n]{a_n} \geq q > 1$ $\forall n \geq N$. Тогда $a_n \geq q^n$ т.к. $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \infty \neq 0$ или $\nexists$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ расход по необход признаку, а исходн ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расход. по призн. срав-я ☒

Предельный радик. призн. Коши: Если $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q<1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}$ и расход. при $q>1$

Док-во: Т.к. $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то, по опред. предела, имеем: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0 : n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$. Тогда $q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon)$

- Пусть $0 < q < 1$. Выбрав $\varepsilon = (1-q)/2$, получаем, что $\sqrt[n]{a_n} < (q+1)/2 < 1$. Тогда исх. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сход. по рад. призн. Коши
- Пусть $q > 1$. Выбрав $\varepsilon = (q-1)/2$, получаем, что $\sqrt[n]{a_n} > (q+1)/2 > 1$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расх. по рад. призн. Коши.

9. Доказать признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Оценка остатка ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница.

Признак Лейбница: Если знакочеред. ч.р. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ удовлетв. условиям:

① $a_1 > a_n > \ldots > a_k > a_{k+1} > \ldots > 0$

② $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то данный знакочеред. ряд сход. и его сумма $S < a_1$

Док-во: Рассмотрим частичную сумму: $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) > 0$, т.к. $a_{2k-1} > a_{2k} > 0 \ \forall k$. Т.о. послед-ть $\{S_{2n}\}$ явл. знакополож. и монотонно возрастает.

При этом $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$ т.к. $a_{2k} > a_{2k+1}$

Т.о., по признаку Вейерштрасса, $\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S < a_1$

С другой стороны $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ и $\exists \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, т.е. $\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S < a_1$

Следствие: Если знакочеред. ч.р. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ удовл. условиям призн. Лейбница, то $|R_n| \leq a_{n+1}$, где $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ - k-ый остаток ряда.

10. Доказать теорему о сходимости абсолютно сходящегося числового ряда. Сформулировать теоремы о перестановках членов абсолютно и условно сходящихся рядов.

Теорема: любой абсолютно сходящ. ряд сходится.

Док-во: Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сход абс., т.е. сход ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Тогда, согласно критерию Коши, имеем:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \in N(\varepsilon) \ \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_n| < \varepsilon$

Т.к. $\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_n \right| < \sum_{k=n+1}^{n+1} |a_n|$, то, согласно критерию Коши, сход. и исходн. ряд. ■

Теор. (о перестан. членов абс. сход. ряда):

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сход. абсолютно, то любой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный из исходн. ряда перестановкой его членов, тоже сход. абс., причем $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

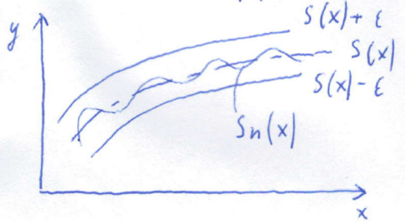
Теор. (о перестановке членов условно сход. ряда):

Пусть действ. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сход. условно. Тогда для $\forall S$ можно перест. членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ получить условно сход. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, сумма которого равна S.

11. Знать определение функционального ряда, равномерной сходимости функционального ряда. Уметь доказывать: теорему о равномерной сходимости степенного ряда, признак Вейерштрасса.

Опр.: Пусть $a_k = a_k(x)$, $\forall k \geq 1$ - скалярная ф-я, определенная на нек-ом множестве Ω. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ - функциональный ряд с общим членом $a_k(x)$, $x \in \Omega$.

Опр.: Говорят, что ф.р. сход. равномерно на множ. $M \subset D \subset \Omega$, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \geq 1) : |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, $(\forall n \geq N(\varepsilon)) \wedge (\forall x \in M)$



Опр: Говорят, что функц. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сход. равномерно на мн-ве $M \subset D \subset \Omega$, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \geq 1) : |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, $(\forall n \geq N(\varepsilon)) \wedge (\forall x \in M) \wedge (\forall m \geq 1)$

◀ $|\sigma_{nm}(x)| = \left| \sum_{k=1}^{m} a_{n+k}(x) \right| < \sum_{k=1}^{m} |a_{n+k}(x)| \leq \sum_{k=1}^{m} b_{n+k} < \varepsilon$,

т.е. $|R_n(x)| = \lim_{m \to \infty} |\sigma_{nm}(x)| < \varepsilon$, $(\forall n \geq N(\varepsilon)) \wedge (\forall x \in M)$, ч.т.д. ▶

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости)

Если на множестве $M \subset D$ для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ существует мажоранта $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, т.е. $|a_k(x)| \leqslant b_k$, $\forall\, k \geqslant 1$, $\forall\, x \in M$ и знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится на множестве $M \subset D$ абсолютно и равномерно.

Доказательство.

Пусть выполнены условия теоремы т.е. $|a_k(x)| < b_k$ $\forall k \geqslant 1$, $\forall x \in M$.

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то по признаку сравнения в каждой точке $x \in M$ исходный функциональный ряд сходится абсолютно.

$\square$

доказательство (продолжение).

Пусть теперь

$R_n(x) \overset{\triangle}{=} a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+m}(x) + \ldots$ - n-ый остаток исходного функционального ряда и

$\sigma_{nm}(x) \overset{\triangle}{=} a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+m}(x)$ - m-ая частная сумма этого n-го остатка.

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится на $M \subset D$ абсолютно, то он сходится на $M \subset D$ и $\sigma_{nm}(x) \to R_n(x)$ при $m \to \infty$ $\forall x \in M \subset D$.

Так как знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \geqslant 1) : \sum_{k=1}^{m} b_{n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_{n+k} < \varepsilon,\ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \wedge \forall m \geqslant 1.$$

Таким образом, $(\forall\, n \geqslant N(\varepsilon)) \wedge (\forall\, x \in M) \wedge (\forall\, m \geqslant 1)$

$$|\sigma_{nm}(x)| = \left|\sum_{k=1}^{m} a_{n+k}(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |a_{n+k}(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} b_{n+k} < \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$|R_n(x)| = \lim\limits_{m\to\infty} |\sigma_{nm}(x)| < \varepsilon$, $(\forall\, n \geqslant N(\varepsilon)) \wedge (\forall\, x \in M)$, ч.т.д.

$\square$

12. Знать определение степенного ряда и интервала сходимости степенного ряда. Доказать теорему об абсолютной и равномерной сходимости степенного ряда внутри интервала сходимости.

Опр.: Если $a_k(x) = \alpha_k (x - x_0)^k$, $\forall k \geq 0$, где α_k – веществ. или комп. число, то ф.р. $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-x_0)^k$ наз-ют степ. рядом.

Замечание: Заменой $t = x - x_0$ степ. ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-x_0)^k$ всегд. м.б. приведен к станд. виду $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k$

Опр.: интерв. сх-и веществ. степ. ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ наз-ют множество $(-R; +R) \subset \mathbb{R}^1$, в каждой точке которого их. ряд сход. абсолютно и расх. при $|x| > R$, где R называют радиусом сход-и.

Теор. (о равномерной сход-и степ. ряда)
Если $R > 0$ - радиус сход-и степ. ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$, то этот ряд будет сходится равномерно и абс. на $\forall$ отр $[-r, r] \subset (-R, R)$

Док-во: Если $0 < r < R$, то при $|x| = r$ их. ряд сход-ся абсолютно т.е. сход. знакополож. ч.р. $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| r^k$. Тогда при $\forall x \in [-r; r]$ имеем $|x| \leq r$, т.е $|\alpha_k x^k| = |\alpha_k| |x^k| \leq |\alpha_k| r^k$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| r^k$ явл. мажорантой для их. степ. ряда. По теор. Вейерштрасса (см. ниже) ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ сход. равномерно на $x \in [-r; r]$ ⊠

13. Доказать теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенных рядов.

Теор. (о почленном дифф. степ. ряда)
Сумму $S(x)$ степ. ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ с радиусом сход-и $R > 0$ можно почленно дифф-ть в интерв. сход-и произв. число ра[з]. При этом все производные с.р. $S'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k x^{k-1}$ и т.д. имеют тот же радиус сход-и R.

Док-во: По теореме о равномерной сход-и степ. ряда иссл. ряд сход-ся равномерно на $\forall$ отр $[-r, r] \subset (-R; R)$ и его сумму можно почленно дифф-ть. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$ - производн. степ. ряда, т.е $\beta_k = (k+1)\alpha_{k+1}$, $\forall k \geq 0$

Т.о. $R^* = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|\beta_k|}{|\beta_{k+1}|} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+1)|\alpha_{k+1}|}{(k+2)|\alpha_{k+2}|} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+2} \cdot \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_{k+2}|} = R$ ☑

Теор (о почленном интегрировании степ. ряда)

Сумму $S(x)$ степ. ряда $(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k)$ с радиусом сх-и $R > 0$ можно почленно интегрировать в и. с. произвольное число раз. При этом получ. степ. ряд

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k x^{k+1}}{k+1}$$ и т.д. имеет тот же радиус сходимости R

Док-во: Т.к. на $\forall [-r; r] \subset (-R; +R)$ исх степ. р. сход-ся равномерно $\Rightarrow$ допустимо почленное интегр-е его суммы. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$ - новый с.р., полученный путем интегр-я исх. ряда $|x| < R$

$$\int_0^x \alpha_k t^k dt = \frac{\alpha_k x^{k+1}}{k+1}, \text{ т. е. } \beta_{k+2} = \frac{\alpha_{k+1}}{k+2} \text{ и } \beta_{k+1} = \frac{\alpha_k}{k+1} \Rightarrow$$

$$R^* = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\beta_{k+1}}{\beta_{k+2}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+2)|\alpha_k|}{(k+1)|\alpha_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k+1} \lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|} = R$$

14. Доказать теорему Абеля. Следствия из теоремы Абеля (6 свойств, свойство об абсолютной сходимости на границе круга сходимости с док-ом).

Теор. Абеля: Если с.р. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ с компл. членами сход. при нек. $z = z_1 \neq 0$, то он абс. сход. $\forall z: |z| < |z_1|$. Если же он расход-ся при нек. $z = z_2 \neq 0$, то он расх. $\forall z \in C: |z| > |z_2|$

Док-во:

(=>) Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$ сход-ся. Тогда по необх. признаку $\exists \lim_{k\to\infty} a_k z_1^k = 0$, т.е. $(\forall \varepsilon > 0): (\exists N(\varepsilon) > 0): |a_n z_1^n| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon)$

Пусть $z \in C$ и $|z| < |z_1|$. Тогда

$|a_n \cdot z^n| = |a_n \cdot z_1^n \cdot \left(\frac{z}{z_1}\right)^n| = |a_n \cdot z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n < \varepsilon q^n, \forall n \geq N(\varepsilon)$, где

$q = \frac{|z|}{|z_1|} < 1$ откуда и след. абс. сход-ть ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ при $|z| < |z_1|$ ☒

(<=) Пусть теперь $z_* \in C$ и $|z_*| > |z_2|$. Предположим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_*^k$ сход-ся. Тогда, согласно уже доказан-му, в т. z_2 ряд должен сход-ся абсолютно, т.к $|z_2| < |z_*|$, что невозможно. => ряд расх. в $z_* \in C: |z| \geq |z_2|$

Следствия:

① Для каждого компл. степ. ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ в C сущ. круг с центром в т. z_0 и рад R, в кажд. внутр. точке которого исх. ряд сход. абс. и расх. в каждой внешн. точке.

② Радиус круга сход-и степ. ряда равен:

$R = \lim_{k\to\infty} |a_k|/|a_{k+1}| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$

③ Если R - радиус сход-и, то в любом круге $K_r = \{z: |z| \leq r < R\}$ исх. степ. ряд сход. рав-но.

④ Если хотя бы в одной точке окр. $L_R = \{z \in C: |z| = R\}$ круга сход-и исх. степ. ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ сход. абс., то он сход. абс. в каждой т. окружности L_R

Док-во: Пусть $z_0 \in L_R$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$ сход. абс., т.е. сход-ся знакополож. ч.р. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z_0|^k$. Тогда $\forall z \in L_R$ имеют место равенства

$|a_k z^k| = |a_k||z|^k = |a_k||z_0|^k = |a_k| R^k$ => ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ сход. абс. $\forall z \in L_R$.

⑤ Если хоть в одной точке окр. L_R круга сход-и исходный ряд расход по необх. признаку, то он расх. в каждой точке этой окр-и (док-во аналог. док-ву следствия ④

⑥ Если $\exists z_0 \in L_R$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сход. условно, то в точках окр. L_R исходн. ряд может как расход-ся так и сход-ся условно.

15. Доказать теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции комплексного переменного. Сформулировать следствие из нее.

Теор. (о необх. услов-х дифф-и ф-ии компл. перем.)
Если $f(z)$ дифф-ма в т. $z_0 \in G$, то в этой точке вып. ус[ловия]
Коши - Римана:

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$$

, где $u(x,y) = Re f(z)$ и $v(x,y) = Im f(z)$

Док-во: Т.к. по условию ф-я дифф-ма, то $\forall \Delta z$:
$z_0 + \Delta z \in G$ $\quad \Delta f(z_0) = \Delta u(x_0,y_0) + i\Delta v(x_0,y_0) = A\Delta z + o(|\Delta z|) =$
$f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|) = (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|)$
Т.к. $\Delta z \to 0 \iff (\Delta x \to 0) \wedge (\Delta y \to 0)$, то $\Delta u + i\Delta v = (\alpha\Delta x - \beta\Delta y) +$
$i(\alpha\Delta y + \beta\Delta x) + o_u(|\Delta z|) + i o_v(|\Delta z|)$, где $o_u(|\Delta z|) = Re\, o(|\Delta z|)$ и
$o_v(|\Delta z|) = Im\, o(|\Delta z|)$

Воспользовавшись опред. рав-ва компл. чисел, получаем:
$\Delta u(x_0,y_0) = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + o_u(|\Delta z|) \quad \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}; \; \beta = -\frac{\partial u}{\partial y}$
$\Delta v(x_0,y_0) = \beta\Delta x + \alpha\Delta y + o_v(|\Delta z|) \quad \beta = \frac{\partial v}{\partial x}; \; \alpha = \frac{\partial v}{\partial y}$
Т.о., мы доказали, что в т. (x_0,y_0) ф-ии $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифф-мы
причем

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}, \; \beta = -\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \beta = \dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}, \; \alpha = \dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} \end{cases}$$

откуда и следует искомое утверждение.

Следствие:
Если $f(z)$ дифф-ма в т. $z_0 \in G$, то

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} - i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$$

16. Доказать теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции комплексного переменного.

Теор. (о достат. услов. дифф-ти ф-ии комплексн. перем.)
Если ф-я $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ опр-на в G, а в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in G$ ф-ии $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифф-мы и в этой точке вып. условия Коши-Римана, то в точке z_0 сущ. $f'(z_0)$

Док-во: Т.к. ф-ии $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифф-мы в точке (x_0, y_0), то $\Delta u(x,y) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + o_u(|\Delta z|)$,
$\Delta v(x,y) = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + o_v(|\Delta z|)$, где $o_u(|\Delta z|)$ и $o_v(|\Delta z|)$ - б.м. при $\Delta z \to 0$ более высокого порядка чем Δz. Тогда

$$\Delta f(z) = \Delta u(x_0,y_0) + i\Delta v(x_0,y_0) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + o_u(|\Delta z|) + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + i\,o_v(|\Delta z|) = \left| \begin{matrix} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{matrix} \right| =$$
$$\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|) =$$
$$\left| \text{т.к. } o(|\Delta z|) = o_u(|\Delta z|) + i\,o_v(|\Delta z|) \text{ и } \Delta z = \Delta x + i\Delta y \right| =$$
$$\left(\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\right)\Delta z + o(|\Delta z|) = \Delta f(z) / \Delta z \Rightarrow$$
$$\exists f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} + o(|\Delta z|)/\Delta z\right) =$$
$$\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} \quad \boxtimes$$

17. Действительная и мнимая части аналитической функции как сопряженные гармонические функции. Нахождение аналитической функции по ее действительной (мнимой) части.

Опр.: Пару гармонич. ф-й $u(x,y)$ и $v(x,y)$, удовлетворяющих условиям Коши-Римана, называют сопряженными гармоническими функциями.

Замечание: Зная одну из сопр. гармон. в области G ф-й $u(x,y)$ или $v(x,y)$, используя условия Коши-Римана, можно восстановить другую, определенную с точностью до произвольной постоянной. Т.о., аналитич. ф-я $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ м. б. восстановлена по своей действительной или мнимой части.

Пример: Пусть $v(x,y) = x^2 - y^2 + 1$. Тогда $v''_{xx} + v''_{yy} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

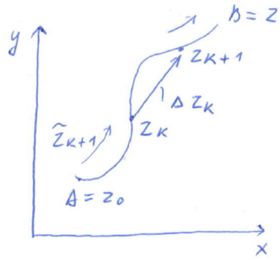
$$\left.\begin{matrix} (u'_x = v'_y = -2y) \Rightarrow u = \int v'_y\,dx = -2xy + C(y) \\ (u'_y = -v'_x = -2x) \Rightarrow -2x + C'(y) = -2x \Rightarrow C'(y) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$u(x,y) = -2xy + C_0$ т.о.

$$f(z) = u + iv = -2xy + C_0 + i(x^2 - y^2 + 1) = i(x^2 + 2ixy - y^2) + C_0 + i =$$
$$iz^2 + C_0 + i$$

18. Дать определение интеграла от функции комплексного переменного. Сформулировать его основные свойства.

• Пусть $L \subset \mathbb{C}$ - гладкая или кусочно-гладкая ориент. дуга, соед. две фикс. точки A и B компл. плоскости и $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ опр. и непр. во всех точках L.



Дугу L точками $\{z_k\}_{k=0}^{n}$ разбиваем на n элем. дуг $\{\overrightarrow{z_k z_{k+1}}\}_{k=0}^{n-1}$ произв. образом, где $z_0 = A$ и $z_n = B$. На каждой эл. дуге $z_k z_{k+1}$ произв. образом выбираем точку $\tilde{z}_{k+1} \in z_k z_{k+1}$ и составл. интегр. сумму:

$S_n(f) \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{z}_{k+1}) \Delta z_{k+1}$, где $\Delta z_{k+1} \triangleq z_{k+1} - z_k$

Если вне зависимости от выбора точек $\{z_k\}$ и $\{\tilde{z}_k\} \in L$ существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0} S_n(f)$, где $\Delta z = \max|\Delta z_k|$, то его наз-ют интег. от ф-ии $f(z)$ компл. переменного по кривой $L \subset \mathbb{C}$ и обозн. $\int_L f(z)dz$ т.о. $\int_L f(z)dz = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{z}_{k+1}) \Delta z_{k+1}$

L - путь интег-я

• $$\int_L f(z)dz = \int_L (u(x,y) + i v(x,y))(dx + i dy) = \underbrace{\int_L u\,dx - v\,dy}_{} + i \underbrace{\int_L v\,dx - u\,dy}_{\text{криволин. интег-лы}}$$

• Свойства

Пусть $f(z)$, $f_m(z)$ - непр. ф-ии, а L, L_k - кусочн.-гладкие кривые тогда:

① линейность $\int_L \sum_{m=1}^{N} \lambda_m f_m(z)dz = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \int_L f_m(z)dz$

② Аддитивность

Если $L = \bigcup_{k=1}^{m} L_k$ и дуги L_k, L_{k+1} имеют лишь одну общ. точку $\forall k = \overline{1, m-1}$, то $\int_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{L_k} f(z)dz$

③ Ориентированность

Если дуги отличаются лишь направл. обхода, то (L и L^*)

$\int_L f(z)dz = -\int_{L^*} f(z)dz$

④ Оценка интеграла

• $\left|\int_L f(z)dz\right| \le \int_L |f(z)|dz$ • Если $|f(z)| < N$ $\forall z \in L$ и длина дуги L равна $m(L)$, то $\left|\int_L f(z)dz\right| \le N \cdot m(L)$

19. Сформулировать и доказать теорему Коши для односвязной области и следствие из нее.

Теор. (Коши для односв обл-и):
Если ф-я $f(z)$ явл. аналит. в односв. области $G \cup \Gamma_G \subset \mathbb{C}$ и Γ_G - кусочно-гладкий замкн. контур, то

$$\oint_{\Gamma_G} f(z)\,dz = 0$$

Док-во: Пусть, дополнительно, $f'(z)$ непрерывна в $G \cup \Gamma_G \subset \mathbb{C}$ и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, тогда $\oint_{\Gamma_G} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_G} u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\oint_{\Gamma_G} v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$

Т.к. $f(z)$ аналит. в замкн. односв. обл. $G \cup \Gamma_G$, то $\forall z \in (G \cup \Gamma_G)$ вып. условия Коши-Римана $\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right) \wedge \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\right)$

Вып-е услов. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ обеспечивает рав-во нулю криволин. интеграла $\oint_{\Gamma_G} v\,dx + u\,dy$, а условие $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ - криволин. интег-ла $\oint_{\Gamma_G} u\,dx - v\,dy \Rightarrow \oint_{\Gamma_G} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_G} u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\oint_{\Gamma_G} v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy = 0$ ■

Следствие

Если в усл-ях теор. Коши $G \subset \mathbb{C}$ - двухсвязная обл., ограниченная внешним контуром L и внутр. контуром J, то $\oint_L f(z)\,dz = \oint_J f(z)\,dz$

Д-во:

Разрезом AB превращаем исходную обл. в односвязную. В силу св-ва аддитивности и ориентированности $\int$-ла от ф-ии комплекс. переменного по теор. Коши получаем: $0 = \oint_L f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{BA}} f(z)\,dz + \oint_J f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\,dz = \oint_L f(z)\,dz + \oint_{J} f(z)\,dz$

Следовательно $\oint_L f(z)\,dz = \oint_J f(z)\,dz$

20. Сформулировать и доказать теорему об интегральной формуле Коши.

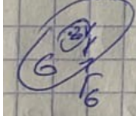
Интегральная ф-ла Коши

▽ Пусть $f(z)$ — аналат. ф-я в односвязной обл. G и на Γ_G. Тогда для $\forall$ т. $z_0 \in G$ верно

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_G} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Д-во:

Пусть ф-я $f(z)$ явл. аналитической в



односвязной обл. $G \cup \Gamma_G$, огр. кусочно-гладким замкн. контуром Γ_G и z_0 явл. внутр. т. обл. G

Тогда $\exists \rho > 0 : \gamma \stackrel{def}{=} \{z : |z - z_0| = \rho\} \subset G$

В этом случае ф-я $f(z)/(z-z_0)$ явл. аналитич. в двухсвязной обл., огр. контурами Γ_G и γ. Поэтому, согласно следствию теор. Коши, имеем:

$$\oint_{\Gamma_G} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = -\oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Из аналитич. ф-ии $f(z)$ во всех точках $G \cup \Gamma_G$ следует её непр. во всех точках круга $K_\rho \stackrel{def}{=} \{z : |z-z_0| \le \rho\} \subset G$. Тогда $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \rho > 0) : (|z-z_0| = \rho) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Следовательно

$$\left| \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-z_0} - \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z_0)dz}{z-z_0} \right| = \left| \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq$$

$$\leq \max_{z\in\gamma} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} \cdot m(\gamma) < \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho \equiv 2\pi\varepsilon$$

Поскольку $\oint\limits_{\gamma} \frac{f(z_0)dz}{z-z_0} = f(z_0)\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$ – не зависит от ε, то:

$$\left| \oint\limits_{\Gamma_6} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| < \varepsilon$$

, т.е. разность явл. б.м., а т.к. все входящие величины не зависят ни от $\varepsilon > 0$, ни от $\rho > 0$, то разность будет постоянной, т.е. равной нулю

21. Дать определение аналитичности функции комплексного переменного в области и в точке. Доказать бесконечную дифференцируемость аналитической функции.

Опр.: Если ф-я $w = f(z)$ диф-ма не только в точке z обл. G её определения, но и в нек. ее окрест-и, то эту ф-ю наз-ют аналитической в этой точке. Если ф-я является аналитич. в каждой точке обл. $G_1 \subset G$, то её наз-ют анали в этой обл.

Т Аналит. в окрестности $V(z_0)$ т. z_0 ф-ия $f(z)$ имеет в этой т. производную любого порядка n, причем $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_6}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, где $\Gamma_6 \subset V(z_0)$ – $\forall$ простой кусочно гладкий контур, охват. т. z_0

Д-во:

Т.к. $f(z)$ анал. в односвязной обл. $G \cup \Gamma_6$ и $z_0 \in G \subset V(z_0)$ – внутрен т., то $\forall\, \Delta z : |\Delta z| < \min\limits_{z\in\Gamma_6} |z-z_0|$ имеем:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z}\left\{ \oint\limits_{\Gamma_6}\frac{f(z)dz}{z-z_0-\Delta z} - \oint\limits_{\Gamma_6}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \right\} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_6}\frac{\Delta z f(z)dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}$$

Можно показать, что в силу непрерывности $f(z)$ на Γ_6, верно $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_6}\frac{f(z)dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_6}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}$

Т.О. $f'(z_0) = \frac{1!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_6}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}$

Аналогично находим:

$$\frac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z}\left\{ \oint_{\Gamma_G} \frac{f(z)dz}{(z-z_0-\Delta z)^2} - \oint_{\Gamma_G} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}\right\} =$$

$$= \frac{1!}{2\pi i\Delta z}\oint_{\Gamma_G} \frac{(z-z_0)^2-(z-z_0)^2+2\Delta z(z-z_0)-\Delta^2 z}{(z-z_0-\Delta z)^2(z-z_0)^2} f(z)dz$$

Т.о. $F''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3}$ и т.д.

22. Доказать теорему Тейлора для функции f(z), аналитической в области G.

Лекция 12 Ряд Тейлора и Лорана

Пусть ф-я $f(z)$ явл. анал. в обл. $G\subset \mathbb{C}$. Если z_0 - внутр. т. G и $r=\min_{z\in\Gamma_G}|z-z_0|$, то в круге $K_\rho=\{z: |z-z_0|<\rho<r\}\subset \mathbb{C}$ ф-я $f(z)$ представима в виде суммы степ. ряда.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\quad |z-z_0|<\rho$$

Д-во:

Пусть $\gamma_\rho \triangleq \{\varepsilon: |\varepsilon-z_0|=\rho<r\}$ - граница круга $K_\rho\subset G$ и z - внутр. т. круга K_ρ, т.е. $|z-z_0|<\rho$, $\varepsilon\in\gamma_\rho$

Тогда $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{\varepsilon-z}$, Преобразуем $\frac{1}{\varepsilon-z}$:

$$\frac{1}{\varepsilon-z}=\frac{1}{(\varepsilon-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\varepsilon-z_0}\cdot\frac{1}{1-(z-z_0)/(\varepsilon-z_0)}$$

Т.к. при фиксированном z верно $|z-z_0|/|\varepsilon-z_0|<1$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\varepsilon-z_0)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{\varepsilon-z_0}\right)},\quad \text{где } q=\frac{|z-z_0|}{r}<1$$

Т.о. при $\varepsilon\in\gamma_\rho$ функц. ряд $\frac{1}{\varepsilon-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\varepsilon-z_0)^{k+1}}$ имеет мажоранту $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{r}$ и, след., по признаку Вейерштрасса он сход. на γ_ρ равномерно.

След-но функц. ряд $\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon-z}=\sum_{k=0}^{\infty}f(\varepsilon)\frac{(z-z_0)^k}{(\varepsilon-z_0)^{k+1}}$ также сход. равномерно относ. ε на γ_ρ

Тогда $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon-z)}d\varepsilon=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}f(\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\varepsilon-z_0)^{k+1}}d\varepsilon=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{(\varepsilon-z_0)^{k+1}}\right\}(z-z_0)^k$$

Т.о. $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$, $c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{(\varepsilon-z_0)^{k+1}}=\frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)$ $\forall k\geq 0$

При этом $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ не зависит от z.

23. Классификация конечных изолированных особых точек аналитической функции. Доказать необходимое и достаточное условие устранимой особой точки, полюса порядка m. Доказать теорему о виде ряда Лорана в окрестности полюса m-го порядка.

Опр: Изолированную особую точку $z_0 \neq \infty$ ф-ии $f(z)$ наз-ют:

① устранимой особой точкой (или прав-й), если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$

② полюсом, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$

③ существенно особой точкой, если не сущ. ни конечного, ни бесконечного предела ф-ии $f(z)$ при $z \to z_0$.

Теор (необх. и дост. условие устранимой ОТ): Пусть $f(z)$ явл. аналит. в кольце $K = \{z : 0 < |z - z_0| < \rho\}$. Точка $z_0 \neq \infty$ - устранимая ОТ ф-ии $f(z)$ т. и т.т., когда сущ. окр-ть т. z_0, в которой $|f(z)| < M < \infty$

Док-во: Пусть $z_0 \neq \infty$ - устр. О.Т. Тогда $f(z)$ можно доопределить в т. z_0 конеч. числом так, что $f(z)$ становится аналит. в круге $D = \{z : |z - z_0| < \rho\}$ и, как след-е, огран. в D. Пусть теперь $|f(z)| < M$ в $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$. Тогда в кольце $K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \rho\}$ имеем разложение в ряд Лорана:

$f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k$, где $c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\xi) \cdot d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}$, $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho_1 < \rho\} \subset D$

$|c_k| \leq \frac{1}{|2\pi i|} \oint\limits_{\gamma} \frac{|f(\xi)||d\xi|}{|\xi - z_0|^{k+1}} < \frac{M}{2\pi \rho_1^{k+1}} \oint |d\xi| = \frac{M}{2\pi \rho_1^{k+1}} 2\pi \rho_1 = \frac{M}{\rho_1^k}$

Если $k < 0$ и $\rho_1 \to 0$, то $c_k = 0$ и мы получаем разлож-е Тейлора $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, т.е. $f(z_0) = c_0$ ☐

Теор. (необх. и дост. условие полюса порядка m) Изолиров. особ. точка $z_0 \neq \infty$ однозн. аналит. ф-ии $f(z)$ явл. для нее полюсом порядка „m" т. и т.т., когда $\exists \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = b$, $0 < |b| < \infty$

Док-во: • Пусть $z_0 \neq \infty$ - полюс пор-ка m для $f(z)$, т.е нуль порядка m для $F(z) = \frac{1}{f(z)}$. В этом случае сущ. аналит. ф-я $\varphi(z)$ такая, что $F(z) = \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \varphi(z)$ и $\varphi(z_0) \neq 0$ и $\varphi(z_0) \neq \infty$. Но тогда $(z - z_0)^m f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ и $\frac{1}{|\varphi(z_0)|} = b$, где $0 < |b| < \infty$

• Пусть $\exists \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = b$ и $0 < |b| < \infty$

Тогда если $\psi(z) = (z - z_0)^m f(z)$, то $\psi(z)$ - аналитична в кольце $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$, а $z_0 \neq \infty$ - устранимая для $\psi(z)$ в силу сущ. конеч. предела.

В круге $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < \delta\}$ ф-я $\frac{1}{\psi(z)}$ - аналитична и $\frac{1}{\psi(z_0)} = \frac{1}{b}$, где $0 < \frac{1}{|b|} < \infty$, т.е. $1/f(z) = (z-z_0)^m \cdot \frac{1}{\psi(z)}$ и точка z_0 - ноль пор-ка „m" для $\frac{1}{f(z)}$ ☒

Теор. (о виде ряда Лорана в окр. полюса m-го пор-ка): Изолир. особ. точка $z_0 \neq \infty$ аналит. ф-ии $f(z)$ явл. полюсом порядка „m" т. и т.т., когда

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \text{ и } c_{-m} \neq 0$$

Док-во:

• Пусть $z_0 \neq \infty$ - полюс пор-ка m для $f(z)$, т.е. $\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \varphi(z)$ где $\varphi(z)$ - аналит. и $\varphi(z_0) \neq 0$

Тогда $\frac{1}{\varphi(z)}$ - аналит и $\frac{1}{\varphi(z_0)} \in \{0; \infty\}$, и, по теор. Тейлора

$$f(z) = (z-z_0)^{-m} \frac{1}{\varphi(z)} = (z-z_0)^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-m} = \left| \begin{matrix} n = k-m \\ c_n = a_{n+m} \end{matrix} \right|$$

$$\sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \text{ и } c_{-m} = a_0 \neq 0$$

• Пусть $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ и $c_{-m} \neq 0$, т.е. $f(z) = (z-z_0)^{-m}$.

$\cdot \{c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \dots\} = (z-z_0)^{-m} \cdot \frac{1}{\varphi(z)}$, где $\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-m+k} \cdot (z-z_0)^k$ - аналит-на и $\frac{1}{\varphi(z_0)} = c_{-m} \neq 0$

Тогда $\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ - аналит. и $\varphi(z_0) = \frac{1}{c_{-m}}$, т z_0 - нуль пор-ка m для $\frac{1}{f(z)}$ и полюс пор-ка m для $f(z)$

☒

24. Определение изолированной особой точки z0 = ∞ аналитической функции. Классификация бесконечно удалённых изолированных особых точек аналитических функций и вид ряда Лорана в окрестности этих точек

Опр (изолир. особ. т. $z_0 = \infty$ аналит. ф-ии)

Изолир. особ. т $z_0 = \infty$ ф-ии $f(z)$ наз-ют:

① устранимой ОТ (или прав), если $\exists \lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A \neq \infty$;

② полюсом, если $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$;

③ сущ. особой точкой, если не сущ. ни конечн, ни беск. предела ф-ии $f(z)$ при $z \to \infty$

Опр: (ИОТ $z_0 = \infty$): Беск. удаленную точку $z_0 = \infty$ наз-ют ИОТ однозн. аналит. ф-ии $f(z)$, если сущ. её окр-ть $B_N = \{z \in \mathbb{C} : |z| > N\}$, которая не содерж. других особых точек.

Опр: (классифик беск. уд. ИОТ по виду ряда Лорана):

В беск. уд. точке поведение ф-ии опр-ся членами ряда

Лорана с полож. степенями z и ИОТ $z_0=\infty$ яв-ся:

① устранимой, если $f(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{0} c_k z^k$;

② полюсом пор-ка m, если $f(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{m} c_k z^k$, $c_m \neq 0$

③ сущ. особой, если $f(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ и сущ. счетное множество ненулевых коэфф с полож. индексами.

25. Определение вычета функции комплексного переменного в её изолированной особой точке (в том числе и в бесконечно удалённой). Связь вычета с разложением в ряд Лорана в окрестности данной точки. Вывод формулы для вычисления вычета в полюсе порядка m.

Опр.: Если $z_0 \neq \infty$ - точка аналит. или изолир. особая т. однозн. аналит. ф-ии $f(z)$ и L - замкн. контур, охватывающий т. z_0 так, что на самом контуре L и всюду внутри него, за исключением б.м. самой точки z_0, ф-я $f(z)$ яв. аналитич., то вычетом $f(z)$ относит. т. z_0 наз-ся число
$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)\,dz$$

Опр.: Вычетом $\operatorname{Res} f(z)$ однозн. аналит. ф-ии $f(z)$ отн. беск. уд. точки $z_0=\infty$, яв. ИОТ ф-ии $f(z)$ называ. число
$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=N} f(z)\,dz,$$ где $N>0$ столь велико, что в кольце $B_N=\{z\in\mathbb{C}: N<|z|<\infty\}$ ф-ии $f(z)$ яв. анал. При этом обход конт. инт-я - станд., т.е. обл. B_N остается слева

Связь вычета с разлож. в ряд Лорана в окр. данной точки:

• Если z_0 - ИОТ однозн. аналит. ф-ии $f(z)$, то $\operatorname{Res}_{z_0} f(z)=c_{-1}$, где c_{-1} - коэфф. при $(z-z_0)^{-1}$ в лорановском разложении ф-ии $f(z)$ в окр-ти т $z_0\neq\infty$

• Вычет ф-ии $f(z)$ в беск. удал. точке равен коэфф. c_{-1} лорановского разлож-я ф-ии $f(z)$ в окр-ти т. $z_0=\infty$, взятому с обр. знаком, т.е. $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}$

Формула для выч-я вычета в полюсе пор-ка m.

Если $z_0\neq\infty$ - полюс m-го пор-ка однозн. аналит. ф-ии $f(z)$, то в проколотой окр-и z_0 имеет место разложение:
$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \wedge c_{-m}\neq 0$$
Тогда для ф-ии $(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}$

$+\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+m}$ точка z_0 явл. устран. особ. точкой

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z) = (m-1)!\, c_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (m+k)\ldots(k+2)\, c_k (z-z_0)^{k+1} \Rightarrow$$

$$\underset{z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z-z_0)^m f(z) \right\}$$

Если $m=1$, т.е. z_0 - полюс 1-го пор-ка, то

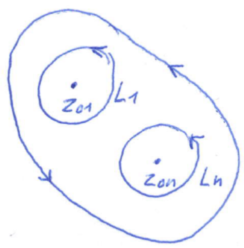
$$\underset{z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \lim_{z\to z_0} \left\{ (z-z_0) / f(z) \right\}$$

26. Сформулировать и доказать теорему Коши о вычетах и теорему о сумме вычетов, аналитической функции, имеющей в С лишь изолированные особые точки.

Теор. (Коши о вычетах)

Если $f(z)$ - однозн. аналит. ф-я в замкнутой обл. $G\cup\Gamma_G$, за исключением конечн. числа изолир. точек $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ охваченных кусочно-гладким замкнутым контуром Γ_G, то $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_G} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\mathrm{Res}}\, f(z)$

Док-во:



т.к. для каждого номера $k \in \{1, 2, 3, \ldots n\}$ точка z_k явл. внутр. изолир. точкой, то каждую из них можно охватить окр L_k столь малого радиуса, чтобы она целиком лежала в $\{G\setminus\Gamma_G\}$ и не имела общ. точек с другими окр. L_j, где $j\neq k$. Тогда по теореме Коши для многосв. обл.:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_G} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\mathrm{Res}}\, f(z) \quad \blacksquare$$

Теор (о сумме вычетов)

Если однозн. аналит. ф-я $f(z)$ в комплексн. плоскости $\mathbb{C}$ имеет лишь конечн. число изолир. особых точек z_k, $k=\overline{1,n}$, то сумма вычетов этой ф-ии, включая вычет в беск. удал. точке, равно нулю, т.е

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\mathrm{Res}}\, f(z) + \underset{z=\infty}{\mathrm{Res}}\, f(z) = 0$$

Док-во: Пусть L - окр. $|z|=R$, ориент. против часовой стрелки, причем все точки z_k, $k=\overline{1,n}$ лежат внутри L.

По теореме Коши о вычетах имеем:

$\oint_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Res}}\, f(z)$. Поскольку $\oint_L f(z)\,dz = -\oint_L f(z)\,dz$

и $\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)\,dz$, то $2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Res}}\, f(z) = -2\pi i \underset{z=\infty}{\mathrm{Res}}\, f(z)$

27. Определение логарифмической функции Ln z комплексного переменного z. Свойства Ln z. Главное значение ln z логарифмической функции Ln z. Общая показательная и степенная функции.

Опр: Ф-я $w = \operatorname{Ln} z$ определяется как ф-я, обратная по отношению к показат. ф-ии $z = e^w$ при $z \neq 0$. Если $w = u + iv$ и $z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} \neq 0$, то $z = e^w \Leftrightarrow |z| e^{i\operatorname{Arg} z} = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} \Leftrightarrow$ $(|z| = e^u) \wedge (\operatorname{Arg} z = v)$. Т.о. $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k$

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z$ – главное значение логарифма при $k=$

Свойства:

① $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$

② $\operatorname{Ln}(z_1 / z_2) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$

③ $\operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln}(z)$

④ $\operatorname{Ln}(\sqrt[n]{z}) = \frac{1}{n} \operatorname{Ln}(z)$

Замечание:

Определим возведение компл. числа в произв. степень, как $a^z = e^{z \ln a}$, $a \neq 0$

При $a \neq 0$ соотношение определяет общую показат. ф-ю. При этом значение $a^z = e^{z \ln a}$ наз-ют главным знач-м показ. ф-ии a^z.

28. Определение функций sin z и cos z комплексного переменного z. Их свойства.

28

Опр: $\cos z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$; $\sin z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $|z| < \infty$

① $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$; $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ – формулы Эйлера

② $\cos z$ и $\sin z$ – периодические ф-ии с периодом 2π

③ Для $\cos z$ и $\sin z$ остаются корректными все формулы тригонометрии

◁ Для примера рассмотрим следующие 2 рав-ва:

• $\sin(z_1 + z_2) = \frac{1}{2i}\{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\} = \frac{1}{2i}\{e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} - e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}\}$

$= \frac{1}{2i}\{(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) - (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2)\} =$

$\cos z_1 \cdot \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2$

• $\cos z_1 \cdot \cos z_2 = \frac{1}{2}\{e^{iz_1} + e^{-iz_1}\} \cdot \frac{1}{2}\{e^{iz_2} + e^{-iz_2}\} = \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)})$

$\cos z_1 \cdot \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2$

• $\cos z_1 \cdot \cos z_2 = \frac{1}{2}\{e^{iz_1} + e^{-iz_1}\} \cdot \frac{1}{2}\{e^{iz_2} + e^{-iz_2}\} = \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)})$

$+ \frac{1}{2}(e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)})\} = \frac{1}{2}\{\cos(z_1+z_2) + \cos(z_1-z_2)\}$

④ В $\mathbb{C}$ ф-ции $\cos z$ и $\sin z$ не явл. огран.

◁ Пусть $z = x + iy$. В этом случае

$\cos z = \frac{1}{2}\{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\} = \frac{1}{2}\{e^{-y} \cdot e^{ix} + e^{y} \cdot e^{-ix}\} = \frac{1}{2}\{e^{-y}(\cos x + i\sin x)$
$+ e^{y}(\cos x - i\sin x)\} = \operatorname{ch} y \cos x - i \operatorname{sh} y \sin x$. т.о $\operatorname{Re}\cos z = \operatorname{ch} y \cos x$
и $\operatorname{Im}\cos z = -\operatorname{sh} y \sin x$

$\sin z = \frac{1}{2i}\{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\} = \frac{1}{2i}\{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\}$
$= \operatorname{ch} y \sin x + i \operatorname{sh} y \cos x \Rightarrow \operatorname{Re}\sin z = \operatorname{ch} y \sin x \quad \operatorname{Im}\sin z = \operatorname{sh} y \cos x$

Поскольку $\operatorname{ch} y$ и $\operatorname{sh} y$ - неогр. ф-ции, то $|\cos z|$ и $|\sin z|$ неогран. в $\mathbb{C}$ ▷

29. Определение функций e^z, sin z, cos z комплексного переменного z. Вывести формулы Эйлера. Вывести свойства функции e^z.

[ку]

Опр: $e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad |z| < \infty$

свойства:

① Если φ - вещ. число, то $\cos\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$ и $\sin\varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i$

▷ При $z \equiv i\varphi$ имеем

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \varphi^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \underline{\cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Полагая $z = i(-\varphi)$, получим $\underline{e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi}$

Из полученных равенств и следуют искомые представления для $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ ▷

② e^z - периодич. ф-я с периодом $2\pi i$

◁ $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z$ ▷

③ Если $z = x + iy$, то $|e^z| = e^x$ и $\arg e^z = y$, $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$ и $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$

◁ $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x\{\cos y + i\sin y\}$ откуда и след. иск. рав-ва

④ $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

◁ $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^k \cdot z_2^n}{k!\,n!} = \left\{\begin{array}{l} m = k+n \\ S = k \end{array}\right| \; m \geq 0;\ 0 \leq S \leq m,$

т.к. $n \geq 0$, и $n = m - S$ $\Big\} = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{S=0}^{m} \frac{z_1^S \cdot z_2^{m-S}}{S!\,(m-S)!} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left\{\sum\limits_{S=0}^{m} \frac{m!}{S!(m-S)!} z_1^S \cdot z_2^{m-S}\right\} =$

$\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^m}{m!} = e^{z_1+z_2}$ ◁

30. Постановка и решение задачи о наилучшей аппроксимации. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля (формулировки). Ряд Фурье.

__Теор.__ (о наилучшей аппроксимации)
Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонорм система ф-й из $\mathbb{L}^2[a,b]$ и $f(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]$. Тогда

$$\min_{c_k \in \mathbb{R}} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right\| = \| f(x) - S_n(x) \| = \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k(x) \right\|,$$ где

$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k(x)$ - n-я частичная сумма ряда Фурье ф-ии $f(x)$ по ортонорм системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$

__Док-во:__ $\| f(x) - S_n(x) \|^2 = (f(x) - S_n(x), f(x) - S_n(x)) = \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right\|$

$$= \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right\| = \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x), f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right) =$$

$$(f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k (\varphi_k, f) - \sum_{m=1}^{n} c_m (f, \varphi_m) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} c_k c_m (\varphi_k, \varphi_m) = \|f\|^2 -$$

$$2 \sum_{k=1}^{n} c_k f_k + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (f_k^2 - 2 c_k f_k + c_k^2) - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 =$$

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2.$$ Тогда $\min\limits_{c_k \in \mathbb{R}} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right\| =$

$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2$, т. е. достигается при $c_k = (f, \varphi_k) = f_k, \forall k = \overline{1,n}$

__Теор.__ (нер-во Бесселя):
Для $\forall$ ф-ии $f(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]$ и любой ортонорм. в $\mathbb{L}^2[a,b]$ системы ф-й $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f(x), \varphi_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ сходится. При этом справедливо __нер-во Бесселя__:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \| f(x) \|^2$$

__Теор.__ (рав-во Парсеваля)
Если ортонорм. система ф-й $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ __замкнута__ в $\mathbb{L}^2[a,b]$, то для $\forall f(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]$ верно рав-во Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \| f(x) \|^2$$

__Опр:__ В бесконечномерн-м евкл. простр-ве $\mathbb{L}^2[a,b]$ ортонорм. сист. ф-й $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ наз-ют замкнутой, если $\forall f(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ такие, что $\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\| < \varepsilon$.

__Опр:__ Рядом Фурье ф-ии $f(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]$ по ортонорм. сист. ф-й $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ наз-ся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$, где $f_k = (f(x), \varphi_k(x))$, $k \in \mathbb{N}$ - коэфф. Фурье и обозн. $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$

$S_n(x) = \sum_{k=1} f_k \varphi_k(x)$ – n-я частичная сумма. Рассмотрим всевозм. л.к. $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$. Для фикс. n необх. найти $\{c_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{R}^1$ такие, что $\rho(f, S_n) = \|f(x) - S_n(x)\| \to \min_{\{c_k\}}$

31. Сформулировать теорему Дирихле. Разложение в неполный тригонометрический ряд функций, заданных на интервале (0; l) (разложение по синусам и косинусам). Разложение в тригонометрический ряд функций, заданных на интервале (−l; l). Разложение в тригонометрический ряд функций, заданных на произвольном интервале (a; b).

Теор. Дирихле

Если на $\mathbb{R}$ опр-на ф-я $f(x)$ такая, что:

① имеет период 2π

② на $[-\pi;\pi]$ она кусочно-непрер., т.е. может иметь лишь конечн. число т. разрыва 1-го рода.

③ на $[-\pi;\pi]$ она кусочно-монотонна, т.е. $[-\pi,\pi]$ можно разбить на конечн число уч. монотонности.

Тогда $y = f(x)$ м. б. представ. суммой своего тригоном. ряда Фурье, который сход в $\forall$ точке $x \in \mathbb{R}$ и при этом:

1) в каждой точке непр. ф-ии $f(x)$ имеет место рав-во $S_f(x) = f(x)$

2) в каждой точке разрыва $S_f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$

3) $S_f(-\pi) = S_f(+\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$

• Пусть $y = f(x)$ опр-на на отр $[-\pi;\pi] \subset \mathbb{R}^1$ и удовл. на ней условиям теор. Дирихле. Тогда

$f(x) \sim S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, $k \geq 1$ При этом

а) если $f(x)$ – четная ф-я, т.е $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in [-\pi;\pi]$, то

$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$; $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$; $k \geq 0$

б) если $f(x)$ - нечетная ф-я, т.е. $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in [-\pi;\pi]$, то

$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$; $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$, $k \geq 1$

• Если ф-я $f(x)$ опр-на на отр. $[-l, l]$ и удовл. на нем усл-м теор. Дирихле, то заменой $x = \frac{lt}{\pi}$ производим взаимно-однозн. отобр. отр. $[-l, l]$ на отр. $[-\pi;\pi]$

Ф-я $\varphi(t) = f(lt/\pi) \equiv f(x)$ опр. на отр. $[-\pi;\pi]$ и удовл. на нем услов. теор. Дирихле

т. о.

$S_\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \iff$

$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)$

$a_{k \geq 0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cdot\cos(kt)dt = \left| \begin{matrix} t = \frac{\pi x}{l} \\ dt = \frac{\pi}{l}dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right)dx$

$$b_{k\geq 1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(k t)\,dt = \left| \begin{array}{l} t = \frac{\pi x}{l} \\ dt = \frac{\pi}{l}dx \end{array} \right| = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx$$

При этом все ранее получ. результаты распр. и на данный случай.

• Пусть ф-я $f(x)$ опред. и удовл. услов. теор. Дирихле на отр. $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Тогда $C=(a+b)/2$ - центр, а $l=(b-a)/2$ - полуразмах отр. $[a,b]\subset\mathbb{R}^1$. Тогда $x=\frac{b-a}{2\pi}t+\frac{a+b}{2}$ устан-т взаимн-однозн. соответствие между отр. $[a,b]$ и $[-\pi;\pi]$. Тригоном. система $\left\{1, \cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right), \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ - явл-ся ортогон. на отр. $[C, C+2l]$, $\forall C, l\in\mathbb{R}$

Т.о. если $\varphi(t)=f\left(\frac{b-a}{2\pi}t+\frac{a+b}{2}\right)=f(x)$, то, согласно приведенному выше замечанию (ф-я $f(x)$ опр-на на отр. $[-l,l]$), проводя аналог. выч-я, получим:

$$a_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2\pi k x}{b-a}\,dx, \quad k\geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2\pi k x}{b-a}\,dx, \quad k\geq 1$$

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi k x}{b-a}+b_k\sin\frac{2\pi k x}{b-a}\right)$$